

Лекция 23

Уравнения для магнитных полей в средах.

Граничные условия для полей \vec{M} , \vec{B} и \vec{H} . Расчёт магнитостатических полей в средах. Магнитное поле.

Постоянное магнитное поле.

§1. Уравнения для полей \vec{B} и \vec{H} в средах. Граничные условия для полей \vec{B} , \vec{H} и \vec{M} .

Итак, уравнения для полей \vec{B} и \vec{H} в средах имеют вид:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

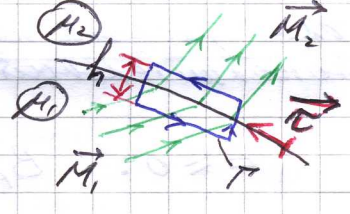
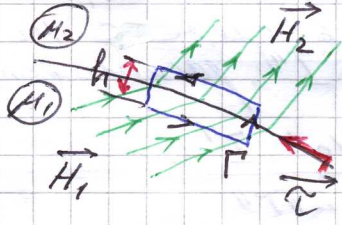
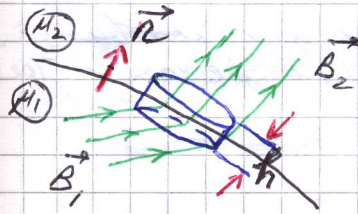
здесь векторы \vec{B} и \vec{H} связаны соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

а вектор намагниченности связан с плотностью молекулярных токов

$$\vec{j}_{\text{молек}} = [\vec{\nabla} \times \vec{M}]$$

Из приведенных уравнений следуют граничные условия для полей \vec{B} , \vec{H} и \vec{M} в магнитных средах, эти соотношения выводятся стандартным образом.



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = (B_{2\tau} - B_{1\tau}) \Delta S = 0$$

$\Delta S = h \cdot \Delta l$

$$\Rightarrow B_{2\tau} = B_{1\tau}$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{e} = (H_{2\tau} - H_{1\tau}) \Delta l = \int \vec{j} \cdot d\vec{s} = j h \Delta l$$

$$\Delta S = i_{\text{своб}} \Delta l$$

$$\Rightarrow H_{2\tau} - H_{1\tau} = i_{\text{своб}}$$

$$[i_{\text{своб}}] = [i_{\text{молек}}] = \frac{A}{M}$$

$$\int \vec{j} \cdot d\vec{s} = \oint \vec{M} \cdot d\vec{e} = (M_{2\tau} - M_{1\tau}) \Delta l$$

$$\Rightarrow M_{2\tau} - M_{1\tau} = i_{\text{молек}}$$

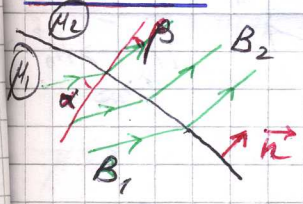
Замечание

$i_{\text{своб}} \neq 0, i_{\text{молек}} \neq 0$, если $\lim_{h \rightarrow 0} (j_{\text{своб}} \cdot h) \neq 0, \lim_{h \rightarrow 0} (j_{\text{молек}} \cdot h) \neq 0$.

Для линейных, однородных и изотропных магнитных сред

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}, \quad \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$$

Задача



Определите закон преломления силовых линий поля \vec{B} на границе двух магнитных сред с μ_1 и μ_2 , если $i_{\text{своб}} = 0$

Решение: $B_{2\tau} = B_{1\tau}, H_{2\tau} = H_{1\tau}$

$$\Rightarrow B_2 \sin \alpha = B_1 \sin \beta, \quad \frac{B_2 \tau}{\mu_2} = \frac{B_1 \tau}{\mu_1}, \quad \frac{B_2 \sin \alpha}{\mu_2} = \frac{B_1 \sin \beta}{\mu_1}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

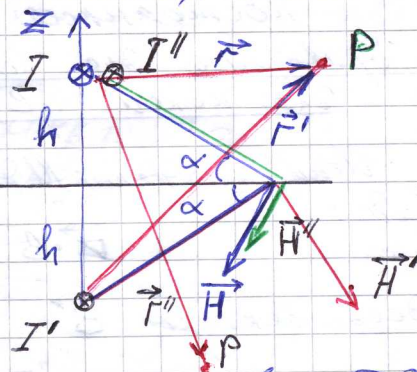
$\mu_1 = \mu_2$

§2. Расчёт магнитостатических полей в средах.

Покажем, как граничные условия для полей \vec{B} и \vec{H} используются для расчёта магнитостатических полей в средах.

Задача. В магнитной среде с μ_1 на расстоянии h

от границы раздела двух магнетиков с μ_1 и μ_2 , занимающих координатное пространство $Z \geq 0$ и $Z \leq 0$, расположен ток I , перпендикулярной плоскости рисунка. Требуется рассчитать магнитное поле во всем пространстве, т.е. при $Z \geq 0$ и $Z \leq 0$ в любой точке наблюдения P .



Решение: задачу будем решать методом изображений. для расчёта поля в среде с μ_1 используем ток I и I' , симметрично расположенный ко отражению к току I в среде с μ_2 .

$$Z \geq 0: B_P = \frac{\mu_0 \mu_1 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 \mu_2 I'}{2\pi r'}$$

для расчёта поля в среде с μ_2 будем использовать дополнительный ток I'' , расположенный там же, где ток I .

$$Z \leq 0: B_P = \frac{\mu_0 \mu_2 I''}{2\pi r''}$$

Из граничных условий $B_{2n} = B_{1n}$, $H_{2\tau} = H_{1\tau}$ получаем систему уравнений, при этом $r = r' = r''$:

$$\begin{cases} \mu_1 I \cos \alpha + \mu_1 I' \cos \alpha = \mu_2 I'' \cos \alpha \\ I' \sin \alpha - I \sin \alpha = I'' \sin \alpha \end{cases}$$

т.е. $\mu_1(I + I') = \mu_2 I''$, $I' - I = I''$

решаем систему $\Rightarrow I'' = \frac{2I\mu_1}{\mu_2 - \mu_1}$, $I' = I \frac{\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}$

Поля при этом находятся по приведенным выше формулам.

Задача

Шар из магнетика с μ_1 находится в однородном внешнем магнитном поле

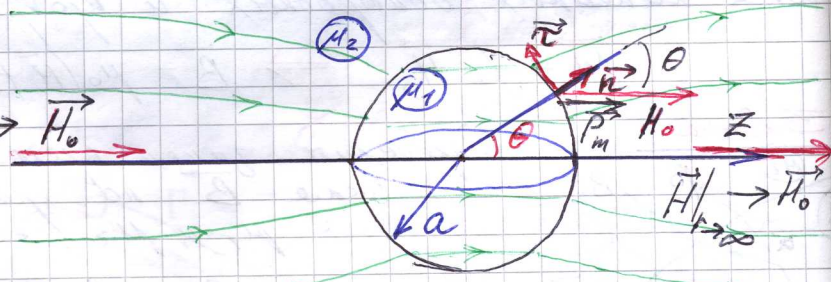
$$\vec{H} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \vec{H}_0 = (0, 0, H_0) \uparrow \text{оси } Z$$

в среде с μ_2 . Вычислите поле во всем пространстве.

Решение.

Будем искать поле в следующей форме $r \geq a$: $\vec{H} = \vec{H}_0 + \frac{3(\vec{P}_m \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{P}_m}{4\pi r^5}$ Подвергнет средленению

$r \leq a$: $\vec{H} = \vec{H}_0 + \alpha \vec{P}_m$ магнитной момент P_m шара const $\Rightarrow \alpha$



Физическая мотивировка указанного выбора полей при $r \geq a$ и $r \leq a$ следующая. Во внешнем магнитном поле \vec{H}_0 шар намагничивается и у него появляется магнитный момент \vec{P}_m . Поле при $r \geq a$ ищем как суперпозицию внешнего поля \vec{H}_0 и поля магнитного диполя \vec{P}_m . Поле при $r \leq a$ ищем в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \alpha \vec{P}_m, \quad \alpha - \text{некая константа}$$

Считаем, что шар намагничивается вдоль оси z , т.е. $\vec{P}_m \parallel z$. Получаем, используя граничные условия для полей, т.е.

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad H_{2t} = H_{1t}$$

следующие уравнения.

$$H_{1t} = H_{2t} \Rightarrow H_0 \sin \theta + \alpha P_m \sin \theta = H_0 \sin \theta - \frac{P_m \sin \theta}{4\pi a^3},$$

откуда определяем константу $\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{4\pi a^3}$.

$$B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_0 \mu_1 H_0 \cos \theta + \mu_0 \mu_2 \alpha P_m \cos \theta = \mu_0 \mu_2 H_0 \cos \theta + \mu_0 \mu_2 \frac{2P_m \cos \theta}{4\pi a^3},$$

$$\Rightarrow (\mu_1 - \mu_2) H_0 = (2\mu_2 + \mu_1) \frac{P_m}{4\pi a^3} \Rightarrow P_m = 4\pi a^3 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} H_0$$

Намагниченность магнетика шара в таком случае даётся выражением

$$\vec{M} = \frac{\vec{P}_m}{4\pi a^3} = \frac{3(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 + 2\mu_2} \vec{H}_0.$$

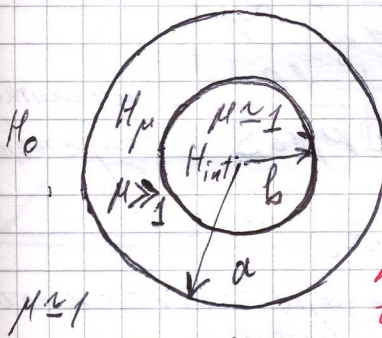
Для поля внутри шара получаем выражение:

$$\vec{H}_{int} = \vec{H}|_{r \leq a} = \vec{H}_0 + \alpha \vec{P}_m = \vec{H}_0 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \vec{H}_0 = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \vec{H}_0.$$

Отношение полей внутри шара и снаружи шара:

$$\frac{|\vec{H}_{int}|}{|\vec{H}_0|} = \frac{3\mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}$$

Используя полученный результат можно объяснить эффект экранировки от внешнего магнитного поля:



используя результат для шара намагниченность выше, т.е.

1. Считаем $a \gg b$, определяем сначала отношение

$$\frac{H_\mu}{H_0} = \frac{3}{\mu + 2} \Big|_{\mu \gg 1} \approx \frac{3}{\mu}, \quad \text{при } \mu \gg 1$$

2. Переходим от намагниченности M к внутренности, $r \leq a$:

$$\frac{H_{int}}{H_\mu} = \frac{3\mu}{1 + 2\mu} \Big|_{\mu \gg 1} \approx \frac{3}{2}$$

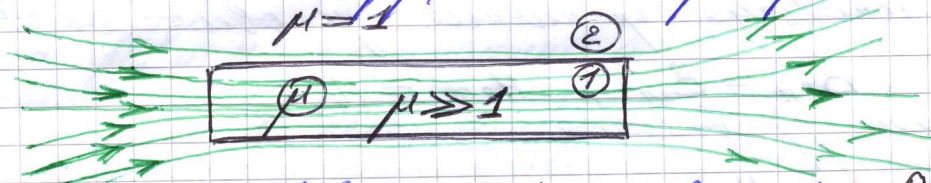
т.к. $\mu \gg 1$, то

$$\Rightarrow H_{int} \approx \frac{3}{2} H_\mu \approx \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\mu} H_0 = \frac{9}{2\mu} H_0, \quad H_{int} \ll H_0$$

экранировка!

§3. Законы для магнитных цепей.

Из ферромагнитных материалов с большими значениями $\mu \gg 1$ можно устраивать магнитные цепи. При этом из-за $\mu \gg 1$ оказывается, что магнитные потоки Φ сосредоточены в основном именно в ферромагнитных каналах-рукавах, лишь малая доля этих потоков рассеивается в окружающее пространство:



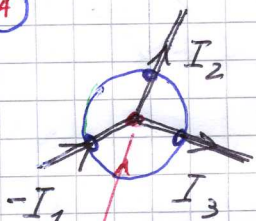
Из граничных условий $H_{1\tau} = H_{2\tau}$ следует, что $B_{1\tau} = \mu_0 \mu H_{1\tau} \gg B_{2\tau}$
 $\Rightarrow B_{1\tau} \gg B_{2\tau}$

Поле \vec{B} сосредоточено в основном в магнитоводе, и лишь малая его доля рассеивается в окружающее пространство. Это обстоятельство используется при создании магнитных цепей. При этом существует замечательная аналогия между магнитными цепями и цепями постоянного тока.

Законы постоянного тока -
- законы электрических цепей

Законы магнитных
цепей

(A)



узел электрич. цепи с токами

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \left(\sum_k \pm I_k \right) = 0$$

первый закон Кирхгофа

Очевидным образом можно провести аналогию

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\Phi = B \cdot S$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$$

$$\mathcal{E} = \int \vec{E} d\vec{e} = \int \frac{\vec{j} \cdot d\vec{e}}{\sigma} \longleftrightarrow \mathcal{H} = \int \frac{B dl}{\mu \mu_0} = \Phi \int \frac{dl}{\mu \mu_0 S}$$

электродвиж. сила

$$I \int \frac{dl}{\sigma S(x)} = IR$$

$$\mathcal{H} = \Phi R_\mu$$

магнитодвиж. сила

$$R = \int \frac{dl}{\sigma S(x)} \text{ - электрич. сопротивление}$$

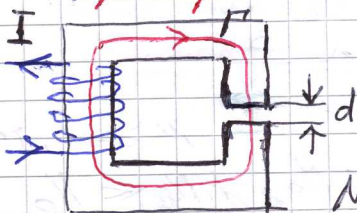
$$R_\mu = \int \frac{dl}{\mu \mu_0 S} \text{ - магнитн. сопротивление}$$

$$\frac{1}{R_{общ}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

$$\frac{1}{R_{эkv}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$$

Пример.

Расчет магнитного поля в зазоре постоянного электромагнита



$$\mathcal{H} = \Phi \int \frac{dl}{\mu \mu_0 S} = \Phi \left(\frac{l}{\mu \mu_0 S_{\text{ж}}} + \frac{d}{\mu_0 S} \right) = NI$$

N - число витков обмотки

$$\Rightarrow \Phi = NI \mu_0 S = \frac{e}{\mu_{\text{ж}} \mu_0 S_{\text{ж}}} + \frac{d}{\mu_0 S}$$

$$\rightarrow H_d = \frac{NI}{d + \frac{lS}{\mu_* S_*}} \approx \frac{NI}{d} \rightarrow H_* = \frac{H_d}{\mu_*} \ll H_d.$$

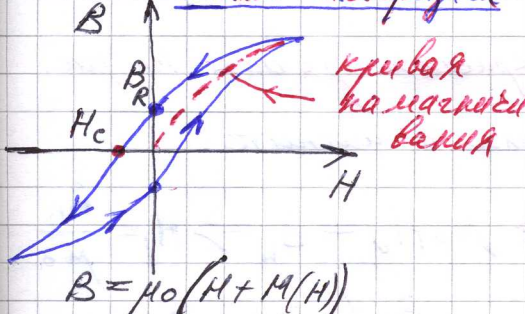
$\frac{l}{d} \sim 50$
 $\mu_* \gg 1$

$\mu_0 \mu_* H_* = B_{вн} = B_{вн} = \mu_0 H_d$

Здесь μ_* - магнитная проницаемость железа, H_d - поле в зазоре

§ 4. Приближенный расчёт колеб постоянных магнитов.

Петля гистерезиса



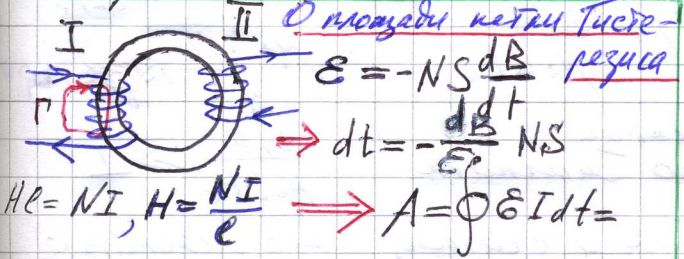
кривая намагниченности

Покажем, как приближенно рассчитываются поля постоянных магнитов, представляющих собой образцы ферромагнетиков. При этом мы будем использовать характерную для ферромагнетиков зависимость $B(H)$ в виде гистерезисной петли, показанной на рисунке слева.

B_R - остаточное поле,
 H_c - коэрцитивная сила.

$$B = \mu_0(H + M(H))$$

Пример 1 Ферромагнетик, однородный и изотропный, занимает все пространство:



О площади контура Гистезиса

$$\mathcal{E} = -NS \frac{dB}{dt}$$

$$\rightarrow dt = -\frac{dB}{\mathcal{E}} NS$$

$$H_e = NI, H = \frac{NI}{e} \Rightarrow A = \oint \mathcal{E} I dt =$$

$$= NS \frac{e}{N} \oint H dB = Sl \oint H dB =$$

Q - работа по перемагничиванию ферромагнетика за один цикл контура гистерезиса, пропорциональна площади петли.

$$\oint \vec{H} d\vec{e} =$$

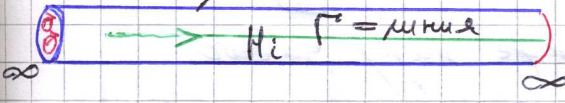
$$= H_i l = 0$$

$$\Rightarrow H_i = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0(H_i + \vec{M}) = \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_R$$

индукция магнитного поля в таком образце равна остаточному полю B_R .

Пример 2. Бесконечно длинный стержень из ферромагнитного материала

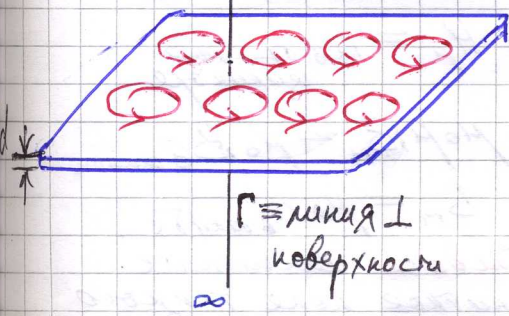


$$\oint \vec{H} d\vec{e} = H_i l = 0 \Rightarrow H_i = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_R$$

- тот же результат, что и в Примере 1.

Пример 3 Ферромагнетик представляет собой тонкую плиту больших размеров, намагниченную поперёк своей поверхности.



$$\oint \vec{H} d\vec{e} = H_i d + H_e l = 0$$

$$\Rightarrow H_e = -\frac{H_i d}{e} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$$

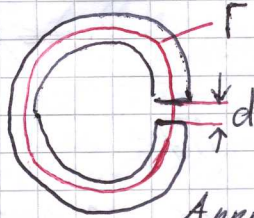
$$\Rightarrow B_i = \mu_0 \mu H_i = \mu_0 H_e \leftarrow B_{вн} = B_{вн}$$

$$B_i = 0$$

$$\Rightarrow B_i = \mu_0(H_i + M) = 0 \Rightarrow H_i = -M = -H_c$$

Напряженность поля внутри магнетика равна минус намагниченности!

Пример 4 Оценка магнитного поля в зазоре постоянного кольцевого магнита.



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_b l + H_d d = 0$$

$$\Rightarrow H_b = -H_d \frac{d}{l} < 0$$

Находимся на участке $(-H_c, 0)$.
 Аппроксимируем $B(H)$ на этом участке функцией:

$$B(H) \approx B_r \left(1 + \frac{H}{H_c}\right), \quad \text{— красная прямая на рис.}$$

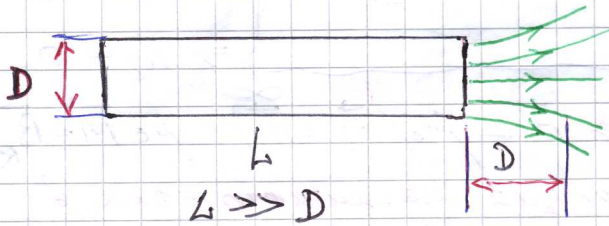
$$\Rightarrow B_b = B_r \left(1 + \frac{H_b}{H_c}\right) =, \quad B_b \text{ и } H_b \text{ — поля в магните.}$$

$$= B_r \left(1 - \frac{H_d d}{l H_c}\right); \quad B_{1n} = B_{2n} \Rightarrow \mu_0 H_d = B_b \Rightarrow H_d = \frac{B_b}{\mu_0}$$

$$\Rightarrow B_b = B_r \left(1 - \frac{B_b d}{\mu_0 l H_c}\right) \Rightarrow B_b \left(1 + \frac{B_r d}{\mu_0 l H_c}\right) = B_r$$

откуда получаем $B_b = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r d}{\mu_0 l H_c}} \approx \begin{cases} B_r, \text{ при } \frac{B_r d}{\mu_0 l H_c} \ll 1 \\ \frac{\mu_0 l H_c}{d} \ll B_r, \text{ при } \frac{B_r d}{\mu_0 l H_c} \gg 1 \end{cases}$

Пример 5 Оценка поля у конца длинного постоянного магнита

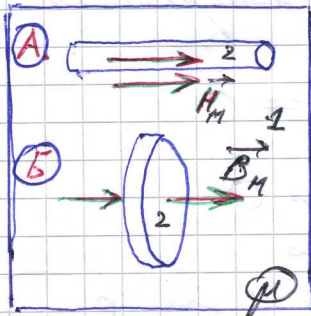


Будем считать, что магнитное поле рассеивается на расстоянии порядка D от конца магнита, применим формулу примера 4 с $d \sim D$:

$$B_b = \frac{B_r}{1 + \frac{B_r D}{\mu_0 l H_c}} \approx \begin{cases} B_r, \text{ при } \frac{B_r D}{\mu_0 l H_c} \ll 1 \\ \frac{\mu_0 l H_c}{D} \ll B_r, \end{cases}$$

В заключение раздела рассмотрим также пару задач.

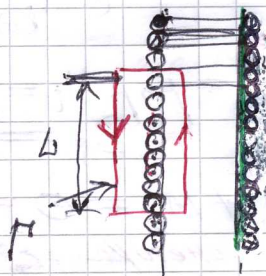
Задача Какие скорости следует сделать в магнетике, чтобы с их помощью можно было измерить поле \vec{B} и \vec{H} в магнетике?



В тонкой цилиндрической области (A):

(A) $H_{1r} = H_{2r} \Rightarrow H_m = H$ в длинном цилиндре

(B) $B_m = B_{2n} \Rightarrow \mu_0 H_m = \mu_0 H$ в шайбе
 $B_m = \mu_0 H$ в шайбе.



Задача Вычислите магнитное поле тонкого длинного соленоида с n витков намоткой.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H \cdot l = n I l \Rightarrow H = n I$$

n — число витков на 1 м.