Лекция 22. Магнитные поля $\vec B, \vec M$ и $\vec H$ в средах. Понятие о диа-, пара- и ферромагнетиках. Простая теория диамагнитных сред. Простая теория парамагнитных сред по Ланжевену. Теория ферромагнитных сред по Вейссу. Граничные условия для полей $\vec B$ и $\vec H$.

§1. Феноменологическая классификация магнитных сред. Понятие о диа-, пара- и ферромагнетиках.

На прошлой лекции было показано, что уравнения Максвелла для полей в магнитных средах имеют вид:

$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0, \qquad \vec\nabla\cdot\vec D = \rho_{своб},$$

$$\vec\nabla\times\vec H = \vec j + \frac{\partial \vec D}{\partial t}; \qquad \vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t}.$$

$$\vec B = \mu_0(\vec H + \vec M) \qquad \vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P$$

К этим уравнениям необходимо добавить так называемые материальные соотношения, то есть уравнения, выражающие намагниченность $\vec M$ как функционал $\vec H$, для статических полей M_i задается рядом по степеням $\vec H$:

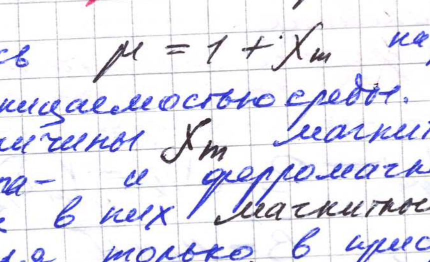
$$\vec M[\vec H] = ? \qquad M_i = \underbrace{M_{i0}}_{\text{Спонтанная намагниченность}} + \sum_{k=1}^{3}\chi_{ik}^{(m)}H_k + \sum_{j,k=1}\chi_{ijk}^{(m)}H_jH_k + \dots$$

Для однородных и изотропных магнитных сред с $M_{i0}=0$

$$M_i = \sum_{k=1}^{3}\chi_m\delta_{ik}H_k = \chi_m H_i, \qquad \vec M = \chi_m\vec H$$

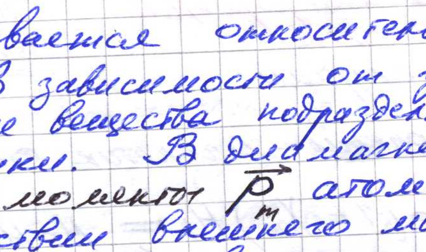
$$\Rightarrow \quad \vec B = \mu_0(\vec H + \vec M) = \mu_0(1+\chi_m)\vec H \overset{def}{=} \mu_0\mu\vec H,$$

здесь $\mu = 1+\chi_m$ называется относительной магнитной проницаемостью среды. В зависимости от знака и абсолютной величины χ_m магнитные вещества подразделяются на диа-, пара- и ферромагнетики. В диамагнетиках $\chi_m<0$, так как в них магнитные моменты $\vec p_m$ атомов отличны от нуля только в присутствии внешнего магнитного поля, эти моменты $\vec p_m \neq 0$ индуцируются в атомах внешним полем и направлены против этого поля. В парамагнетиках магнитные моменты атомов присутствуют, т.е. отличны от нуля $\vec p_m \neq 0$, в отсутствие внешнего магнитного поля хаотически ориентированы, при наложении внешнего поля парамагнетики намагничиваются, у них появляется намагниченность $\vec M \neq 0$ и носит она ориентационный характер. В ферромагнетиках существуют области материала — домены с некоторым числом атомов с параллельными магнитными моментами $\vec p_m \neq 0$; в отсутствие внешнего поля домены хаотически ориентированы, при включении внешнего магнитного поля (даже слабого) домены начинают ориентироваться по полю, ферромагнетики имеют поэтому $\chi_m \gg 1$.



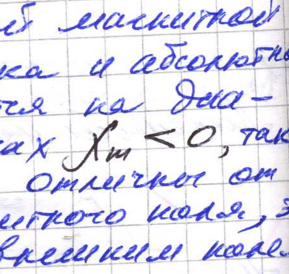
Диамагнетик

$\vec M \uparrow\downarrow \vec H$, $\vec H \neq 0$, $\vec p_m \uparrow\downarrow \vec H$, $\chi_m < 0$



Парамагнетик

$\vec H \neq 0$, $\vec M \uparrow\uparrow \vec H$, $\chi_m > 0$



Ферромагнетик

$\vec H \neq 0$, $\vec M \uparrow\uparrow \vec H$, Отмеченное иллюстрируют приведенные выше рисунки. Порядки величин магнитной восприимчивости для различных веществ показаны ниже в таблице. Видно, что диамагнитная и парамагнитная восприимчивости являются малыми величинами $|\chi_m| \ll 1$.

Диамагнетики

Вещество	χ_m
Висмут	$-16{,}7\cdot 10^{-5}$
Кварц	$-1{,}51\cdot 10^{-5}$
Вода	$-0{,}88\cdot 10^{-5}$
Ртуть	$-3{,}23\cdot 10^{-5}$
Аргон	$-0{,}945\cdot 10^{-5}$
Водород	$-0{,}208\cdot 10^{-5}$

Парамагнетики

Вещество	χ_m
Жидкий O_2	$3{,}46\cdot 10^{-3}$
Палладий	$8{,}25\cdot 10^{-4}$
Платина	$2{,}93\cdot 10^{-4}$
Алюминий	$2{,}14\cdot 10^{-5}$
Воздух	$3{,}65\cdot 10^{-7}$

Ферромагнетики

$\chi_m \gg 1$

$\chi_m \sim 10^3 \div 10^6$

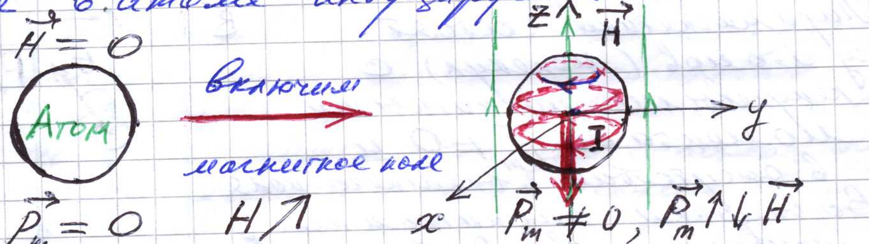
$\exists$ Точка Кюри с температурой T_C. При $T < T_C$ — ферромагнетик, $T > T_C$ — парамагнетик.

$$\chi_m\Big|_{T\to T_C} \sim \frac{C_0}{T - T_C}$$ — восприимчивость в окрестности точки Кюри.

$$\chi_{диа} = -\frac{\mu_0 n q^2 \langle R^2\rangle Z}{6m} \qquad \chi_{пара} = \frac{\mu_0 p_m^2 n}{3 k_Б T}$$

§2. Простая теория диамагнитных сред.

Вещества, атомы которых при $\vec H = 0$ имеют нулевые магнитные моменты $\vec P_m = 0$, называются диамагнетиками. При наложении на атом диамагнитного материала внешнего магнитного поля в атоме индуцируется магнитный момент, возникающий вследствие наведённых магнитным полем индукционных токов атомных электронов; токи показаны на рисунке красными линиями.



Для индуцированного магнитного момента, обусловленного кольцевыми токами атомных электронов, получаем выражение:

$$\vec P_m = -I S\cdot \vec e_3 = -|q|\nu\cdot S\vec e_3, \quad \nu = \frac{V}{2\pi r}$$ — частота вращения электрона

Используя закон электромагнитной индукции, определяем напряжённость $\vec E$ вихревого электрического поля на окружности радиуса r.

$$\oint \vec E\cdot d\vec\ell = E\cdot 2\pi r = -\frac{d}{dt}\int_{S=\pi r^2}\vec B\cdot d\vec S = -\mu_0\frac{dH}{dt}\pi r^2 \Rightarrow E = -\frac{\mu_0 r}{2}\frac{dH}{dt}$$

С помощью второго закона Ньютона оцениваем скорость электрона на орбите радиуса r

$$m\frac{dV}{dt} = qE = -\frac{\mu_0 r}{2}q\frac{dH}{dt} \Longrightarrow V = -\frac{\mu_0 q r}{2m}H$$

и вычисляем индуцированный магнитной момент

$$\vec P_m = -\frac{\mu_0 q^2 r}{2m}\frac{1}{2\pi r}\pi r^2\vec e_3 = -\frac{\mu_0 q^2 r^2 H}{4m}\vec e_3$$

$$\Rightarrow \vec P_m = -\frac{\mu_0 q^2}{4m}H\cdot\frac{2}{3}Z\langle R^2\rangle\vec e_3 \quad \text{т.к. } r^2 \Rightarrow \langle(x^2+y^2)\rangle = \frac{2}{3}\langle(x^2+y^2+z^2)\rangle = \frac{2}{3}\langle R^2\rangle$$

$$\Rightarrow \vec M = n\vec P_m = -\frac{\mu_0 n q^2 Z\langle R^2\rangle}{6m}H\vec e_3$$

проведено усреднение и учтён вклад Z атомных электронов. т.к. $\langle X^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle = \frac{1}{3}\langle R^2\rangle$

$$\Rightarrow \chi_{m(диа)} = -\frac{\mu_0 n q^2 Z \langle R^2\rangle}{6m}$$, n — концентрация атомов.

Ориентация индуцированных магнитных моментов против $\vec H$ согласуется с правилом Ленца: направление индукционных токов должно быть таким, что их собственное магнитное поле компенсирует внешнее магнитное поле, порождающее эти токи.

Задача. Оценить $\chi_{m(диа)}$ для следующих данных

$q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, $\langle R^2\rangle = 10^{-20}$ м^2, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ ед.СИ

Ответ:
$$\chi_{m(диа)} \simeq -\frac{4\pi\cdot10^{-7}(1{,}6)^2\,10^{-38}}{6\cdot 9{,}1\cdot10^{-31}} \times 10\times10^{-20}\times 3{,}33\cdot10^{28} = -\frac{4\cdot3{,}14\cdot(1{,}6)^2\cdot 3{,}33\cdot10^{-36}}{6\cdot9{,}1\cdot10^{-31}} \sim$$

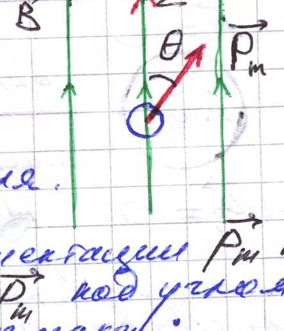
$$n = n_{H_2O} = \frac{\rho}{m_{H_2O}} = \frac{10^3\ кг/м^3}{18\cdot1836\cdot9{,}1\cdot10^{-31}} = \frac{10^3\cdot10^{26}}{18\cdot1{,}836\cdot0{,}91\cdot10^{-26}} = 3{,}33\cdot10^{28}\ \frac{1}{м^3}.$$

$\sim -1{,}96\cdot10^{-5}$, табличное же значение $\chi^{(H_2O)}_{m(диа)} = -0{,}88\cdot10^{-5}$

Согласие для грубой оценки достаточно неплохое.

§3. Простая теория парамагнитных сред по Ланжевену.

Парамагнетики состоят из атомов (молекул) с ненулевыми магнитными моментами $\vec P_m \ne 0$ и в отсутствие внешнего поля.



Неплотный парамагнетик

Во внешнем магнитном поле парамагнетики намагничиваются вследствие ориентации $\vec P_m$ по внешнему полю. Вероятность ориентации $\vec P_m$ под углом θ к полю $\vec B$ даётся распределением Больцмана:

$$dW(\theta) = A e^{-W_{вз}/k_Б T}\sin\theta\, d\theta = A e^{\frac{\vec P_m \vec B}{k_Б T}}\sin\theta\, d\theta$$

(см. Лекцию №16 по поводу ориентационной поляризуемости диэлектриков).

$$W_{вз} = -\vec P_m \vec B = -P_m B\cos\theta$$

Намагниченность парамагнетика (магнитный момент единицы объема) дается выражением:

$$M = M_z = n\langle P_{mz}\rangle = n\cdot\frac{\int_0^\pi \exp\left(\frac{P_m B}{k_Б T}\cos\theta\right)\sin\theta\, d\theta\, P_{m0}\cos\theta}{\int_0^\pi e^{\frac{P_m B\cos\theta}{k_Б T}}\sin\theta\, d\theta}$$

n — концентрация атомов

$P_{mz} = P_{m0}\cdot\cos\theta$

$$\Rightarrow M = nP_{m0}\frac{\partial}{\partial(P_{m0}B/k_Б T)}\ln\left(\int_0^\pi e^{\frac{P_m B\cos\theta}{k_Б T}}\sin\theta\, d\theta\right) =$$

$$= nP_{m0}\frac{\partial}{\partial\left(\frac{P_{m0}B}{k_Б T}\right)}\ln\left(\frac{e^{\frac{P_m B}{kT}} - e^{\frac{P_m B}{kT}}}{\frac{P_m B}{k_Б T}}\right) = nP_{m0}\left(\operatorname{cth}\frac{P_m B}{k_Б T} - \frac{1}{P_m B/k_Б T}\right)$$

$$\Rightarrow M = nP_{m0}\,\mathcal{L}\left(\frac{P_{m0}B}{k_Б T}\right),\quad \mathcal{L}(x) = \operatorname{cth}x - \frac{1}{x}$$ — функция Ланжевена

Проделанные вычисления вполне аналогичны случаю ориентационной поляризуемости полярных диэлектриков. Как и в лекции №16, имеем для намагниченности M при $\left(p_m B / k_Б T\right) \ll 1$

$$\chi_{m(пара)} H = M_{(пара)}\Big|_{\frac{p_m B}{k_Б T}\ll 1} = M_\infty \mathcal{L}\left(\frac{p_m B}{k_Б T}\right)\Big|_{\frac{p_m B}{k_Б T}\ll 1} \simeq n p_{m0}\cdot \frac{p_{m0}\mu_0}{3 k_Б T} H,$$

Задача: Используя соответствующие табличные данные, оцените $\chi_{m(пара)}$

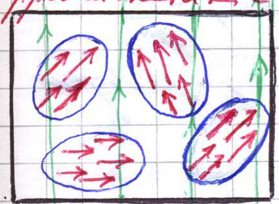
$$\Rightarrow \chi_{m(пара)}\Big|_{\frac{p_m B}{k_Б T}\ll 1} \simeq \frac{n p_{m0}^2 \mu_0}{3 k_Б T}.$$

$M_\infty = n p_{m0}$. Максимальная намагниченность

С повышением температуры намагниченность парамагнетиков разрушается, т.к. при $T \nearrow$ $\chi_{m(пара)} \to 0$, $\mu_{пара} \to 1$.

§4. Простая теория ферромагнитных сред по Вейссу.

Ферромагнетик с



доменами

Первая простая количественная теория ферромагнетиков была разработана в 1907 г. французским физиком Вейссом (1865-1940). Вейсс предположил, что атомы ферромагнетика, как и парамагнетика, обладают магнитными моментами, взаимодействующими между собой с силами, зависящими от угла между ними. Силы между моментами стремятся установить магнитные моменты соседних атомов (группы тесно расположенных атомов — домена) параллельно друг другу. В результате ориентации магнитных моментов атомов (доменов) в определённом направлении и создаётся намагниченность ферромагнетика. В полуфеноменологической теории Вейсса силы взаимодействия между атомами формально приводят к некоторому "эффективному" среднему магнитному полю, которое и "ориентирует" атомы ферромагнетика. Эффективное поле складывается из обычного макроскопического поля $\mu_0 \vec{H}$ в веществе и некоторого гипотетического „молекулярного" поля $\mu_0 \lambda \vec{M}$, пропорционального намагниченности $\vec{M}$:

$$\vec{B}_{эфф} = \mu_0\left(\vec{H} + \lambda \vec{M}\right),$$

λ — некоторая константа, характеризующая свойства различных ферромагнетиков.

λ — постоянная Вейсса.

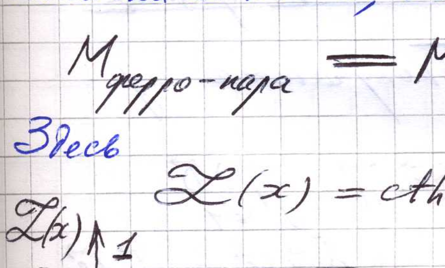
Используем далее выражение для $\vec{B}_{эфф}$ в формуле для намагниченности, полученной в предыдущем разделе:

$$M_{ферро-пара} = M_\infty \mathcal{L}\left(\frac{p_{m0}\mu_0}{k_Б T}(H + \lambda M)\right) = M$$

— получается некоторое трансцендентное ур-е для M!

Здесь

$$\mathcal{L}(x) = \mathrm{cth}\, x - \frac{1}{x}$$ — функция Ланжевена.

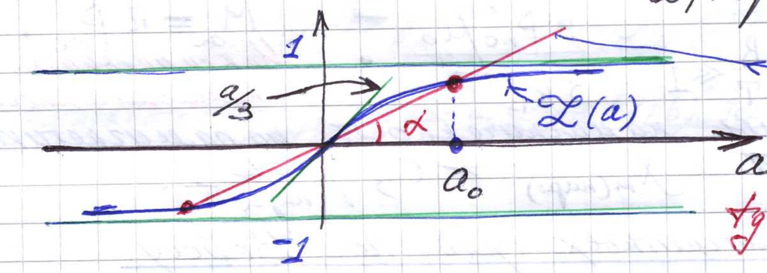


Используя сформулированное трансцендентное уравнение можно объяснить (A) существование спонтанной намагниченности $M_{S0} \neq 0$ (B) существование точки Кюри с температурой T_C.

(А) Существование спонтанной намагниченности $M_{s0}\neq 0$, как нетривиального решения уравнения ($H=0!$)

$$H=0 \Rightarrow M = M_\infty \mathcal{L}\left(\frac{p_{m0}\mu_0}{k_Б T}\cdot\lambda M\right), \quad a \overset{def}{=} \frac{p_{m0}\mu_0\lambda M}{k_Б T}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(a) = \frac{M}{M_\infty} = \frac{a k_Б T}{M_\infty p_{m0}\mu_0\lambda} = \frac{a k_Б T}{n p_{m0}^2 \mu_0 \lambda} = a\,tg\,\alpha$$



$\frac{a k_Б T}{n p_{m0}^2\mu_0\lambda}$. Ясно, что $M_{s0}\neq 0$ существует, если

$$tg\,\alpha = \frac{k_Б T}{n p_{m0}^2 \mu_0\lambda} < \frac{1}{3}, \text{ т.е.}$$

$$M_{s0} = M_\infty \cdot \mathcal{L}(a_0) \neq 0 \text{ при } T < \frac{n p_{m0}^2\mu_0\lambda}{3k_Б}$$

(Б) Проведенное рассмотрение показывает, что существует критическая температура

$$T_c = \frac{n p_{m0}^2 \mu_0\lambda}{3k_Б}$$

такая, что при $T>T_c$ $M_{s0}=0$ — остаётся тривиальное решение ур-я $M = M_\infty\mathcal{L}\left(\frac{p_{m0}\mu_0}{k_Б T}\lambda M\right)$,

трив. решение $M=M_{s0}=0$ соответствует парамагнитной фазе, парамагнитному состоянию вещества. При $T<T_c$, напротив, существует нетривиальное решение $M_{s0}=M_\infty\mathcal{L}(a_0)\neq 0$, соответствующее ферромагнитной фазе вещества.

Имеем в окрестности точки $T=T_c$, т.е. критической температуры

$$M = M_\infty \mathcal{L}(x)\Big|_{x\ll 1} \cong M_\infty\frac{x}{3} = M_\infty \frac{1}{3} \frac{p_{m0}\mu_0}{k_Б T}(H+\lambda M)$$

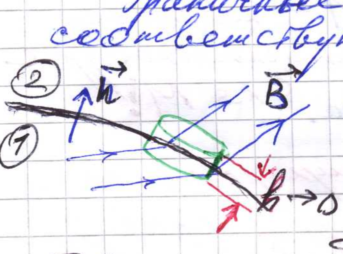
$$\Rightarrow M\left(1-\frac{n p_m^2\mu_0}{3k_Б T}\lambda\right) = \frac{n p_m^2 \mu_0}{3k_Б T} \Rightarrow M = \frac{c_1}{T-T_c}$$ — закон Кюри

здесь

$$c_1 = \frac{n p_m^2\mu_0}{3k_Б}, \quad T_c = \frac{n p_m^2\mu_0\lambda}{3k_Б}$$

§5. Граничные условия для полей $\vec B$ и $\vec H$ на границе двух магнитных сред.

Граничные условия для полей $\vec B$ и $\vec H$ получаются из соответствующих уравнений Максвелла.



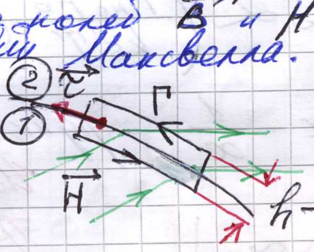
$$\vec\nabla\cdot\vec B = 0$$

$$h\to 0 \Rightarrow \oint\limits_{\partial(\text{▭})} \vec B\, d\vec S = 0, \quad h\to 0$$

т.е.

$$B_{2n}\Delta S - B_{1n}\Delta S = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$



$$\vec\nabla\times\vec H = \vec j + \frac{\partial \vec D}{\partial t}$$

$$h\to 0 \Rightarrow \oint\limits_\Gamma \vec H\, d\vec l = \int \vec j\, d\vec S\Big|_{h\to 0}$$

$$\Rightarrow H_{2\tau}\cdot\Delta l - H_{1\tau}\Delta l = (H_{2\tau}-H_{1\tau})\Delta l = 0 \Rightarrow H_{2\tau} =$$

М. сущ. случай $(H_{2\tau}-H_{1\tau})\Delta l = j\, h\Delta l\Big|_{h\to 0} = i_{\text{м}}\Delta l$