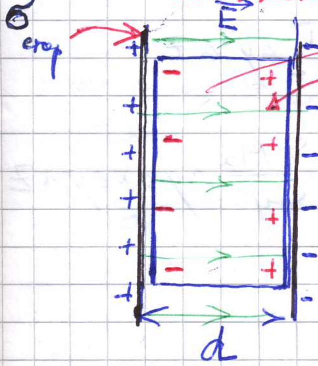
Лекция 21. Уравнения Максвелла для статических полей в средах — простая теория для диэлектрических и магнитных сред. Уравнения Максвелла для переменных во времени полей в магнито-диэлектрических средах.

§1. Простая теория статических полей в средах

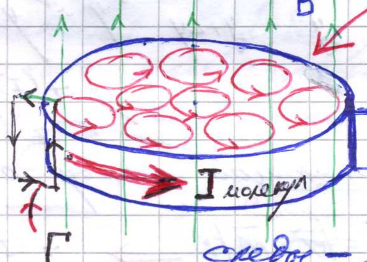
Приведём для начала простую теорию статических полей в конденсированных средах, диэлектрических и магнитных, проводя сравнение указанных случаев друг с другом.

Диэлектрики — поляризуются ← Простая теория → Магнетики — намагничиваются



$$\vec{P} \overset{def}{=} \frac{\sum_k \vec{P}_{ek}}{\Delta V}$$

Поляризация среды — электрич. дип. момент единицы объема



$$\vec{M} = \frac{\sum_{k\in\Delta V} \vec{P}_{mk}}{\Delta V}$$

Намагниченность среды — магнитный дипольный момент единицы объёма

$$|\vec{P}_e| = \sigma_{ind} \cdot S d$$ ← эл. дип. момент пластины диэлектрика

Магн. момент шайбы → $|\vec{P}_m| = I_{молекул} S = i S h$

$i_{молек} = \frac{I_{молек}}{h}$, $[i] = A/м$ — линейная плотность молекул. токов.

σ_{ind} — плотность индуциров. зарядов поляризации

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{P}| = \frac{|\vec{P}_e|}{Sd} = \sigma_{ind}} \quad \xleftrightarrow{\text{сравним}} \quad \Rightarrow \boxed{|\vec{M}| = \frac{|\vec{P}_m|}{Sh} = i}$$

$$\oint_{\Delta S} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{полн}}{\varepsilon_0} = \frac{(\sigma_{своб} - \sigma_{ind})\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_{Г} \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} d\vec{S} = \mu_0 (I_{своб} + i_{молек} h)$$

$$\Rightarrow (E\varepsilon_0 + \sigma_{ind})\Delta S = \sigma_{своб}\Delta S$$

$$\Rightarrow \left(\frac{B}{\mu_0} - i_{молек}\right) h = I_{своб} = \int \vec{j}_{своб} d\vec{S}$$

т.е.

$$(E\varepsilon_0 + P)\Delta S = \sigma_{своб}\Delta S$$

т.е.

$$\left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) h = I_{своб}$$

$$\vec{D} \overset{def}{=} \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

индукция электрического поля

$$\vec{H} \overset{def}{=} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right)$$ — напряженность магнитного поля

$$\Rightarrow \oint_{\Delta S} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta V} \rho_{своб}\, dV = Q_{своб}$$

$$\Rightarrow \oint_{Г} \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{своб} = \int_{\Delta S} \vec{j}_{своб}\cdot d\vec{S}, \quad Г = \partial(\Delta S)$$

по теореме Гаусса-Остроградского

$$\int_{\Delta V} \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = \int_{\Delta V} \rho_{своб}\, \Delta V$$

по теореме Грина-Стокса

$$\int_{\Delta S} [\vec{\nabla}\times\vec{H}]\cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S} \vec{j}_{своб}\cdot d\vec{S}$$

$$\forall \Delta V \Rightarrow \operatorname{div}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_{своб}$$

$$\forall \Delta S \Rightarrow [\vec{\nabla}\times\vec{H}] = \vec{j}_{своб}$$

Для однородных и изотропных диэлектрических → материалов ← магнитных

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$$

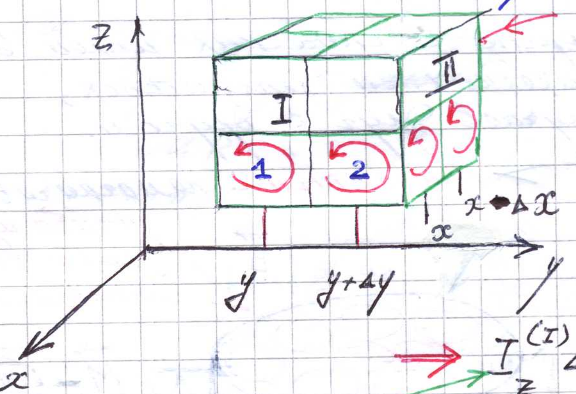
$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H}$$

$\vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E}$, $\varepsilon = 1 + \chi_e$, χ_e — диэл. восприимч.

$\vec{M} = \chi_m\vec{H}$, $\mu = 1 + \chi_m$, χ_m — магнитная восприимчивость

§2. Вывод формулы $\vec{j}_{молекул} = \vec{\nabla}\times\vec{M}$, связывающей плотность молекулярных токов с намагниченност

Приведем простой вывод важной формулы, связывающе плотность молекулярных токов с намагниченностью магнитного материала.



Образец из магнитного материала

$\vec{P}_m = I S \vec{n}$

$$M_x(y)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = I_1\,\Delta y\,\Delta z$$

$$M_x(y+\Delta y)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z = I_2\,\Delta y\,\Delta z$$

$$\Rightarrow I_z^{(I)}\Delta y\Delta z = (I_1 - I_2)\Delta y\Delta z \cong -\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta y$$

Ток, протекающий между областями 1 и 2

Формальный вывод ф-лы $\vec{j}_{молек} = [\vec{\nabla}\times\vec{M}]$:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2}\int_V [\vec{r}\times[\vec{\nabla}\times\vec{M}]]\,dV = \frac{1}{2}\int_V \left(\vec{\nabla}_M(\vec{r}\cdot\vec{M}) - (\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{M}\right) = \int_V \vec{M}\,dV$$

$$\Rightarrow I_z^{(I)} = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta x\Delta y$$

def

$$j_z^{(I)}\Delta x\Delta y = -\frac{\partial M_x}{\partial y}\Delta x\Delta y$$

$\Rightarrow j_z^{(I)} = -\dfrac{\partial M_x}{\partial y}$, аналогично $j_z^{(II)} = \dfrac{\partial M_y}{\partial x}$, откуда определяем полную плотность молекул. токов j_z

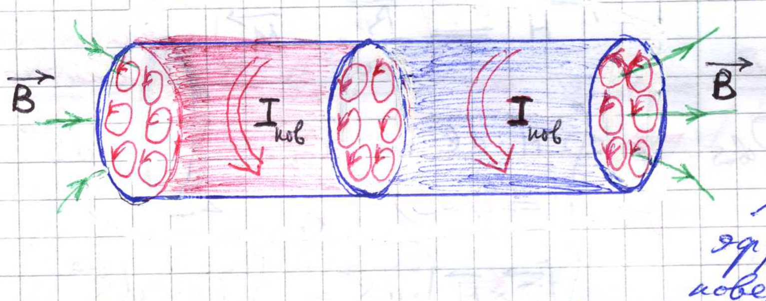
См. выкладки в § 3 этой лекции.

$$[\vec{\nabla}\times\vec{M}]_3 = j_z = \frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \Rightarrow \vec{j} = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{j}_M$$

Упражнение Проделайте внимательно все выкладки, приводящ к соответствующим выражениям:

$$j_x = [\vec{\nabla}\times\vec{M}]_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z},\quad j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x} = [$$

Выкладки при получении j_x и j_y вполне аналогичны т которые использовались при выводе j_z



На рисунке слева показа молекулярные токи в полосовом магнит с полюсами N и

Молекулярные токи в магн эффективно проявляют себя поверхностные токи на боковой поверхности магнита

Формулу

$$\vec{j}_{молекул} = \vec{\nabla}\times\vec{M} = \vec{j}_M \leftarrow \text{плотность молекулярных токов намагниченности}$$

будем использовать в последующих разделах при получ уравнений Максвелла для полей в средах с помощью некоторой процедуры усреднения по физ бесконечно малым объемам ΔV и промежутку в $\Delta \tau$.

§ 3. Уравнения Максвелла для магнитных и диэлектрических сред. Процедура усреднения микроскопических уравнений.

Уравнения Максвелла в магнитных и диэлектрических средах можно получить, усредняя микроскопические уравнения для полей заряженных частиц в вакууме. Среднее значение любой физической величины определим следующим образом:

$$\langle f(\vec r,t)\rangle \stackrel{def}{=} \frac{1}{T\Delta V}\int_{\Delta V} d^3\vec\xi \int_{-T/2}^{T/2} f(\vec r+\vec\xi,\ t+\tau)\,d\tau\,,$$

здесь ΔV — физически бесконечно малый объём в окрестности точки $\vec r$; T — физически бесконечно малое время $T \gg \tau_{характ}$, $\nu = \frac{1}{T} \ll \nu_{характ}$. Мотивировка усреднения: в средах устанавливаются макроскопические, усредненные или сглаженные по пространству и времени поля, кроме того, приборы воспринимают так же сглаженные поля. Справедлива следующая важная

Лемма

$$1^\circ.\ \frac{\partial}{\partial t}\langle f\rangle = \left\langle\frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle, \quad 2^\circ.\ \frac{\partial}{\partial x_k}\langle f\rangle = \left\langle\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\rangle.$$

Лемма легко доказывается с помощью определения средних.

Усредним микроскопические уравнения Максвелла для микро-полей $\vec b(\vec r,t)$ и $\vec e(\vec r,t)$ заряженных частиц в вакууме.

$$\vec\nabla\cdot\vec e(\vec r,t) = \frac{\rho(\vec r,t)}{\varepsilon_0} \xrightarrow{\langle\vec e\rangle = \vec E(\vec r,t)} \vec\nabla\cdot\langle\vec e\rangle = \vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho_{своб} - \vec\nabla\cdot\vec P}{\varepsilon_0},$$

$$\vec\nabla\cdot\vec b(\vec r,t) = 0 \xrightarrow{\langle\vec b\rangle = \vec B(\vec r,t)} \vec\nabla\cdot\vec B(\vec r,t) = 0,$$

$$\vec\nabla\times\vec e(\vec r,t) = -\frac{\partial\vec b(\vec r,t)}{\partial t} \longrightarrow \vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B(\vec r,t)}{\partial t},$$

$$\vec\nabla\times\vec b = \mu_0\vec j + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec e}{\partial t} \longrightarrow \vec\nabla\times\vec B = \mu_0\langle\vec j\rangle + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec E}{\partial t}.$$

В первом уравнении было использовано разбиение полной плотности электрического заряда на плотность свободного (или стороннего) эл. заряда и плотность $\rho_{связ} = -\vec\nabla\cdot\vec P$ связанных зарядов, связанных с поляризацией:

$$\langle\rho(\vec r,t)\rangle = \rho_{своб} + \rho_{связ} = \rho_{своб} - \vec\nabla\cdot\vec P \Rightarrow \vec\nabla(\varepsilon_0\vec E + \vec P) = \rho_{своб},$$

Вводя электрическую индукцию $\vec D \stackrel{def}{=} \varepsilon_0\vec E + \vec P$ среды, получаем уравнение Максвелла

$$\vec\nabla\cdot\vec D = \rho_{своб} \Longleftrightarrow \oint_{\partial(V)}\vec D\cdot d\vec S = \int_V \rho_{своб}\cdot dV$$ — уравнение Максвелла о потоке $\vec D$

Второе и третье уравнения остаются без изменений, в последнем же уравнении необходимо прояснить структуру среднего значения плотности тока $\langle\vec j_{полн}\rangle = \vec j_{своб} + \vec j_в$

$\vec j_в = \vec j_P + \vec j_M$, $\vec j_в$ — плотность тока связ. зарядов, $\vec j_{P,M}$ — плотности токов поляризац. и намагнич.

$\vec\nabla\cdot$ от последнего ур-я Максвелла даёт:

$$0 = \vec\nabla\cdot[\vec\nabla\times\vec B] = \mu_0\,\vec\nabla\cdot\vec j_{своб} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\cdot\vec E) + \frac{\vec\nabla\cdot\vec j_в}{\varepsilon_0 c^2} =$$

$$= \mu_0\,\vec\nabla\cdot\vec j_{своб} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\rho_{своб} + \rho_{связ})}{\partial t} + \frac{\vec\nabla\cdot\vec j_в}{\varepsilon_0 c^2}$$

Сторонние или свободные заряды удовлетворяют ур-ю непрерывности (закон сохранения эл. заряда в лок. форме)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{своб}+\frac{\partial\rho_{своб}}{\partial t}=0$$

$\vec{j}_B$, $B\equiv$ bounded связанный

поэтому

$$0=\frac{1}{\varepsilon_0c^2}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_B-\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)=\frac{1}{\varepsilon_0c^2}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}_B-\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)=$$

$$\Rightarrow\ \vec{j}_B=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{M}=\vec{j}_P+\vec{j}_M\ \Rightarrow\ \vec{j}_B=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{M}$$

На этом этапе была использована следующая лемма.

Лемма. Пусть $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$, тогда $\exists$ и найдётся $\vec{A}(\vec{r},t)$ такое, что $[\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{A}]$.

Итак, имеем следующие важные формулы:

плотность токов связанных зарядов

$$\rho_B=\rho_{связ}=-\vec{\nabla}\cdot\vec{P},\quad \vec{j}_B=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\vec{\nabla}\times\vec{M}=\vec{j}_P+\vec{j}_M$$

плотность тока поляризационных зарядов $\rightarrow$ $\vec{j}_P=\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$, $\vec{j}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M}$ $\leftarrow$ плотность молекулярных токов намагничен...

Подчеркнём, что из условия

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}_B-\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)=0\ \xrightarrow{\exists\vec{M}(\vec{r},t)}\ \vec{j}_B-\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}=\vec{M}(\vec{r},t),$$

здесь $M(\vec{r},t)$ – намагниченность среды, это легко доказать, вычисляя магнитный момент $\vec{P}_m$, связанный с $\vec{j}_M=\vec{\nabla}\times\vec{M}$:

$$\vec{P}_m=\frac{1}{2}\int_V[\vec{r}\times\vec{j}_M]\,dV=\frac{1}{2}\int_V[\vec{r}\times[\vec{\nabla}\times\vec{M}]]\,dV=$$

Вспомогательная выкладка:

$$[\vec{r}\times[\vec{\nabla}\times\vec{M}]]=\vec{\nabla}_M(\vec{r}\cdot\vec{M})-(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{M}=\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M})-\vec{\nabla}_r(\vec{r}\cdot\vec{M})-(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{M}$$
$$=\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M})-\vec{M}-(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{M}+3\vec{M}=$$
$$=\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M})-(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{M}+2\vec{M}$$

Задача. Докажите, что $\int_V\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M})dV=\int_V(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{M}\,dV=0$

$$\Rightarrow\ \vec{P}_m=\frac{1}{2}\int_V\left(\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot\vec{M})dV-(\vec{\nabla}\cdot\vec{r})\vec{M}+2\vec{M}\right)dV=\int_V\vec{M}\,dV,$$

т.е., действительно, $\vec{M}$ – намагниченность среды, т.е. магнитный момент единицы объёма среды.

После всего проделанного получаем из последнего усреднённого уравнения Максвелла:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_{своб}+\mu_0\left(\vec{j}_P+\vec{j}_M\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=$$
$$=\mu_0\vec{j}_c+\mu_0\frac{\partial\vec{P}}{\partial t}+\mu_0[\vec{\nabla}\times\vec{M}]+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)+\vec{j}_{своб},$$ вводя векторы напряжённости магн. поля $\vec{H}\stackrel{def}{=}\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$, $\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$, и $\vec{D}\stackrel{def}{=}\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$ – индукции эл. по...

получаем ур-е Максвелла

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Итак, получена система уравнений Максвелла для макроскопических, т.е. усредненных по пространству и времени, полей:

$$\vec\nabla\cdot\vec D = \rho_{своб} = \rho_{стор} = \rho,$$

употреблены различные обозначения плотности своб. зарядов и плотности своб. токов.

$$\vec\nabla\times\vec E = -\frac{\partial\vec B}{\partial t};\qquad \vec\nabla\cdot\vec B = 0,$$

$$\vec\nabla\times\vec H = \vec j_{своб} + \frac{\partial\vec D}{\partial t} = \vec j_{стор} + \frac{\partial\vec D}{\partial t} = \vec j + \frac{\partial\vec D}{\partial t}.$$

Здесь введены дополнительные поля, $\vec D$ — вектор эл. индукции, $\vec H$ — напряженность магнитного поля, эти поля связаны с $\vec B$ и $\vec E$ следующими соотношениями:

$$\vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P,\qquad \vec B = \mu_0(\vec H + \vec M)$$

Для линейных, однородных и изотропных диэл. и магнитных сред:

$$\vec P = \varepsilon_0\chi_e\vec E,\qquad \vec M = \chi_m\vec H$$

$$\Rightarrow\quad \vec D = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec E = \varepsilon_0\varepsilon\vec E,\qquad \vec B = \mu_0(1+\chi_m)\vec H = \mu_0\mu\vec H.$$

Здесь χ_e, χ_m — электрическая и магнитная восприимчивости. ε — относительная диэлектрическая и μ — относительная магнитная проницаемости.

§ 4. Феноменологическая классификация магнитных сред

Намагниченность среды $\vec M$ для широкого класса магнитных сред можно представить в виде ряда по степеням $\vec H$:

$$M_i = \underbrace{M_{i0} + \chi^{(m)}_{ik}H_k}_{\text{линейный анизотропный магнетик}} + \underbrace{\chi^{(m)}_{ikl}H_kH_l + \dots}_{\text{нелинейные анизотропные магнетики}},$$

здесь M_{i0} — спонтанная намагниченность.

Важные частные случаи:

1°. Линейный, изотропный магнетик с $\vec M_0 = 0$, $\chi^{(m)}_{ik} = \chi_m\delta_{ik}$

$$\Rightarrow\quad B_i = \mu_0(1+\chi_m)H_i = \mu_0\mu H_i,\qquad \vec B = \mu_0\mu\vec H$$

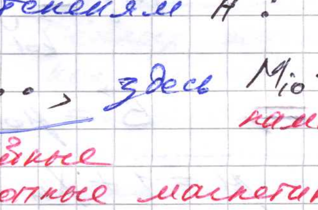
2°. Линейный, анизотропный магнетик с $\vec M_0 = 0$, $M_i = \chi^{(m)}_{ik}H_k$

$$\Rightarrow\quad B_i = \mu_0\Big(H_i + \sum_{k=1}^{3}\chi^{(m)}_{ik}H_k\Big) = \sum_{k=1}^{3}\mu_0\big(\delta_{ik} + \chi^{(m)}_{ik}\big)H_k = {}_0\Sigma_{ik}H_k$$

3°. Ферромагнетики, однородные, изотропные, но нелинейные, и с $M_{i0}\neq 0$ — с неравной нулю спонтанной намагниченностью

$B = B(H)$ — нелинейная функция

$B = \mu_0 M_0 + \mu_0\mu(H)H$



H_c — коэрцитивная сила

B_R — остаточная

Петля гистерезиса магн. поле

Как и в случае сегнетоэлектриков для ферромагнетиков имеет место явление гистерезиса с характерной петлёй гистерезиса

4°. Линейные изотропные, однородные магнетики с $\chi_m < 0$ и $\chi_m > 0$

$$\vec B = \mu_0(1+\chi_m)\vec H = \mu_0\mu\vec H$$

$$\mu = 1 + \chi_m$$

$\chi_m < 0$, $\mu < 1$ — диамагнетики

$\chi_m > 0$, $\mu > 1$ — парамагнетики