Лекция 21. Орбиты в задачах Кеплера и Кулона.

§1. Вывод уравнений орбит из законов сохранения энергии и момента импульса.

Исходим из закона сохранения энергии относительного движения и момента импульса относительного движения:

(1) $$E_{\text{отн.дв}} = E = \frac{\mu \dot r^2}{2} + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r} = const$$

(2) $$L_{\text{отн.дв}} = l = \mu r^2 \dot\varphi = const$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\alpha = \begin{cases} G m_1 m_2 > 0 & \text{— в задаче Кеплера,} \\ -k q_1 q_2 & \text{— в задачах Кулона.}\end{cases} \\ \alpha > 0 \text{ — притяжение}, \quad \alpha < 0 \text{ — отталкивание}\end{array}}$$

Из (2) можно выразить $\dot\varphi(t)$ через $r(t)$:

(3) $$\dot\varphi = \frac{l^2}{\mu r^2}.$$

Используя (3) вычислим $\frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} r(\varphi(t))$, как производную по времени от сложной ф-ции $r(\varphi(t))$:

(4) $$\dot r = \frac{dr(\varphi(t))}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\dot\varphi = \frac{l^2}{\mu r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{l^2}{\mu}\left(\frac{1}{r}\right)'.$$

Штрихами будем обозначать производные по φ:

$$r' = \frac{dr}{d\varphi}, \quad -\left(\frac{1}{r}\right)' = -\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{r'}{r^2}$$

Подставим (4) в выражение (1) для E и введём новую переменную $u = \frac{1}{r}$, получим:

$$\frac{l^2}{2\mu}u'^2 + \frac{l^2}{2\mu}u^2 - \alpha u = E, \text{ т.е.}$$

$$u'^2 + u^2 - \frac{2\mu\alpha}{l^2}u = \frac{2\mu E}{l^2},$$

(5) $$\left(u - \frac{\mu\alpha}{l^2}\right)'^2 + \left(u - \frac{\mu\alpha}{l^2}\right)^2 = \frac{2\mu E}{l^2} + \frac{\mu^2\alpha^2}{l^4}$$

Введём еще одну новую переменную:

(6) $$y \stackrel{def}{=} \frac{u - \frac{\mu\alpha}{l^2}}{\sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{l^4} + \frac{2\mu E}{l^2}}} = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{l^2}}{(\mu|\alpha|/l^2)\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}}$$

Для неё, согласно (5), получается ур-е:

(7) $$y'^2 + y^2 = 1$$

Не нарушая общности, выберем решение уравнения (7) в виде

(8) $$y = \frac{\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{l^2}}{\frac{\mu|\alpha|}{l^2}\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}} = \cos\varphi$$

проверка: $y' = -\sin\varphi$, $y'^2 + y^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$.

Из последнего выражения (8) определяем $r = r(\varphi)$:

(9) $$r = \frac{l^2/(\mu|\alpha|)}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}\cos\varphi} \overset{def}{=} \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|}+\varepsilon\cos\varphi}$$

В (9) определены величины:

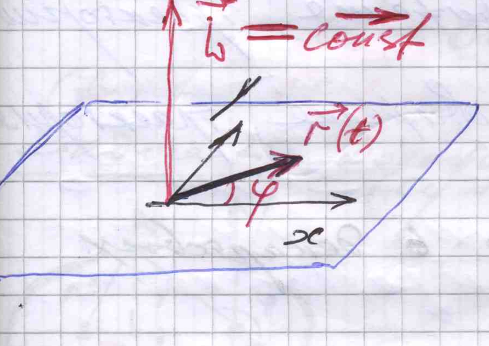
параметр орбиты $\Rightarrow p \overset{def}{=} \frac{l^2}{\mu|\alpha|}$ и

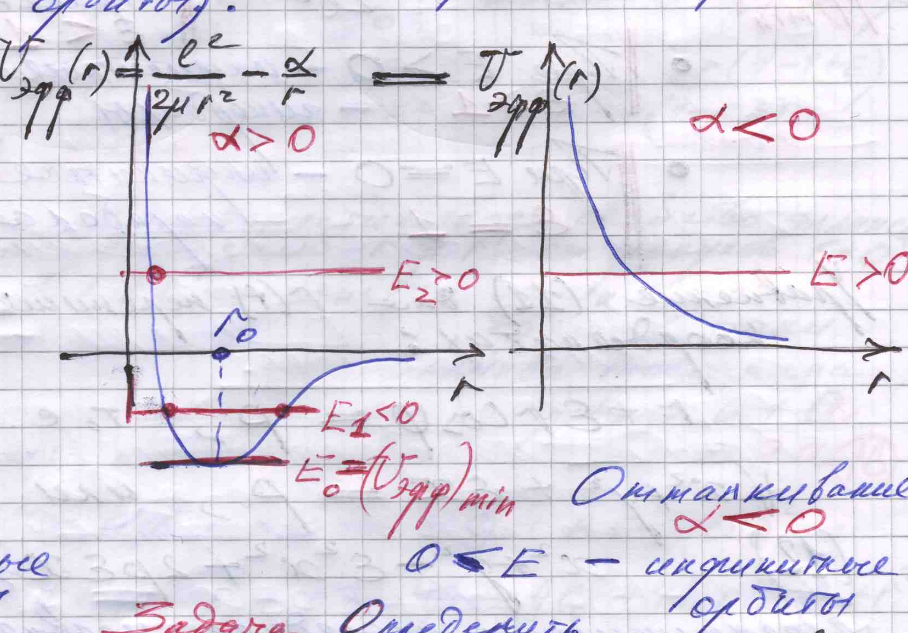
эксцентриситет орбиты $\Rightarrow \varepsilon \overset{def}{=} \sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}$

Уравнение орбиты, таким образом, имеет вид:

(10) $$\boxed{r(\varphi) = \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \varepsilon\cos\varphi}}$$

Подчеркнём, что получено уравнение орбиты относительного движения в плоскости (x, y), перпендикулярной постоянному значению $\vec{L}_{отн.дв} = \overrightarrow{const}$ сразу для всевозможных орбит, соответствующих различным знакам константы α ($\alpha > 0$ — притяжение, $\alpha < 0$ — отталкивание) и для всех значений энергии E относительного движения ($E > 0$ — инфинитные орбиты, $E < 0$ — финитные орбиты).





Притяжение. $\alpha > 0$:

$(U_{эфф})_{min} \le E < 0$ — финитные орбиты

$0 < E$ — инфин. орбиты

Отталкивание: $\alpha < 0$

$0 < E$ — инфинитные орбиты

Задача Определить r_0, соотв. $(U_{эфф})_{min}$.

Ответ: $U'_{эфф} = 0 \Rightarrow r_0 = \frac{l^2}{\mu\alpha}$ совпадает с p — параметром орбиты.

$$\rightarrow (U_{эфф})_{min} = -\frac{\alpha^2\mu}{2l^2}$$

§2. Анализ возможных орбит в задачах Кеплера и Кулона.

Итак, уравнения всех возможных орбит в задачах Кеплера и Кулона задаются одной компактной формулой:

$$r(t) = r(\varphi(t)) = \frac{p}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \varepsilon \cos\varphi(t)}$$

при этом угол φ меняется по закону:

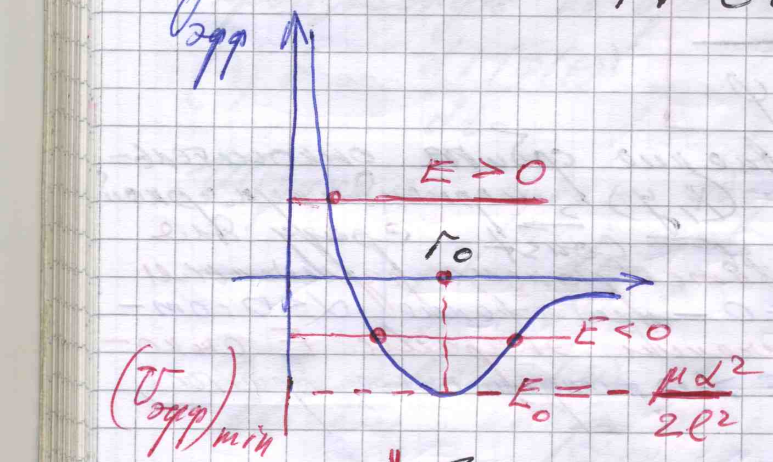
$$\dot{\varphi} = \frac{\ell^2}{\mu r^2}$$

и всегда может быть вычислен из закона изм. $r(t)$.

$$p \stackrel{def}{=} \frac{\ell^2}{\mu|\alpha|}, \quad \varepsilon \stackrel{def}{=} \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{\mu\alpha^2}}, \quad \alpha = \begin{cases} G m_1 m_2, \\ -k q_1 q_2. \end{cases}$$

Орбиты задачи Кеплера ($\alpha > 0$)

(11) $$r(t) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$ — уравнение возможных орбит.



- При $E = E_0 = -\frac{\mu\alpha^2}{2\ell^2} = (U_{эфф})_{min}$
  $\Rightarrow \varepsilon = 0$
  и $r(t) = p = r_0 = \frac{\ell^2}{\mu\alpha}$ — движение по окружности.
- При $(U_{эфф})_{min} < E < 0$ — финитные движения
  $\varepsilon < 1$ траектории — эллипсы.
- При $E > 0$ — инфинитное движение, траектории — гиперболы
  $\varepsilon > 1$
- При $E = 0$ — инфинитное движение, траектория — парабола
  $\varepsilon = 1$

Уравнение (11) для $r(t)$ перепишем в декартовых координатах:

$$r + \varepsilon r \cos\varphi = p, \quad \text{т. е.}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + \varepsilon x = p, \quad \text{или}$$

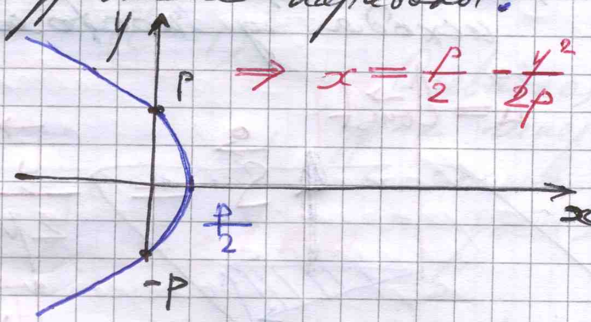
(12) $$x^2 + y^2 - \varepsilon^2 x^2 + 2p\varepsilon x = p^2$$

Проанализируем последнее уравнение повнимательнее для трёх различных случаев,

$\varepsilon = 1$, $\varepsilon > 1$ и $\varepsilon < 1$

При $\varepsilon = 1$ имеем из (12) уравнение параболы:

$$y^2 = p^2 - 2px \Rightarrow x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$$



При $\varepsilon < 1$ преобразуем уравнение (12) следующим образом:

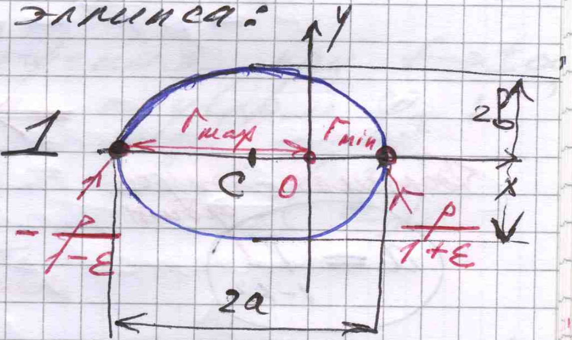
$$x^2(1-\varepsilon^2) + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2,$$

$$x^2 + \frac{2p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}x + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}, \text{ т. е.}$$

$$\left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2},$$

Окончательно получается ур-е эллипса:

$$\frac{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} = 1$$



с полуосями

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} \text{ — по } x \quad \text{и} \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{ — по } y$$

Апогей орбиты $r_{max} = \frac{p}{1-\varepsilon}$, достигается при $\varphi = \pi$.
Перигей орбиты $r_{min} = \frac{p}{1+\varepsilon}$, достигается при $\varphi = 0$ ‖ При выбранной параметризации $r = r(\varphi)$.

Можно легко решить следующие задачи.

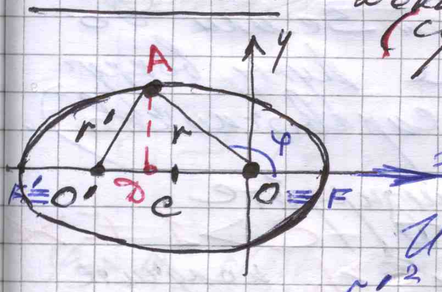
Задача 1 Определите расстояние l_0 от точки O до центра эллипса C.

$$l_0 = OC = a - r_{min} = \frac{p}{1-\varepsilon^2} - \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{p(1-1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon^2)}$$

(*) Ответ: $l_0 = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$.

Задача 2 Докажите характеристическое свойство эллипса (сумма расстояний r и r' от фокусов $F \equiv O$ и $F' \equiv O'$ до произв. точки эллипса постоянна и равна $a + a = 2a$ (16)

$$r + r' = \text{const}$$



Имеем:

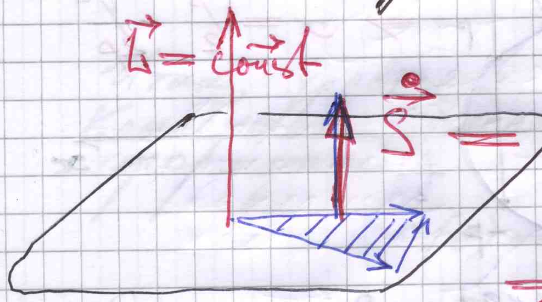
$$r'^2 = AO'^2 = O'D^2 + AD^2 = O'D^2 + AO^2 - OD^2 =$$

$$= (2l_0 + r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi = 4l_0^2 + 4l_0 r\cos\varphi + r^2$$

(*) $l_0 = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$ $\Longrightarrow$ $= \left(r - \frac{2p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 \Longrightarrow r' = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} - r$

$$\Longrightarrow r + r' = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} = 2a$$

Легко также получить и третий закон Кеплера, исходя из постоянства секториальной скорости:



$$\vec{\dot{S}} = \frac{\vec{L}}{2\mu} = \vec{const} \Rightarrow |\vec{\dot{S}}| \cdot T = \text{площадь элл}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{L}|}{2\mu} \cdot T = \pi a b = \pi \frac{p}{1-\varepsilon^2} \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi \mu p^2}{l (1-\varepsilon^2)^{3/2}} =$$

период обращения планеты

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2El^2}{\mu \alpha^2} \Rightarrow 1-\varepsilon^2 = -\frac{2El^2}{\mu\alpha^2} = \frac{2|E| l^2}{\mu \alpha^2}$$

$$p = \frac{l^2}{\mu |\alpha|}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi \mu \cdot l^4}{l \cdot \mu^2 \alpha^2} \cdot \frac{(\mu \alpha^2)^{3/2}}{(2|E| l^2)^{3/2}} =$$

Большая полуось орбиты

$$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$$

$$= \frac{|\alpha|^3 \pi \mu}{\sqrt{2} |E|^{3/2} \alpha^2 \sqrt{\mu}} = \pi \alpha \sqrt{\frac{\mu}{2|E|^3}}$$

$$= 2\pi a^{3/2} \sqrt{\mu/\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{\mu}{\alpha}}$$

Квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

В связи с третьим законом Кеплера попробуйте решить сл. задачу.

Задача Сколько времени Луна будет падать на Землю, если вдруг остановится? (Сами задайте расстояние от Земли до Луны и период обращения Луны вокруг Земли — из справочников).

Самостоятельно:

Совершенно аналогично проанализируйте случай гиперболических орбит ($\varepsilon > 1$ $E >$

Для этого из ур-я (12), при $\varepsilon > 1$, получите уравнение гиперболы:

$$y^2 - (\varepsilon^2 - 1) x^2 + 2 p \varepsilon x = p^2$$

$$y^2 - (\varepsilon^2-1)\left(x - \frac{p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}\right)^2 + (\varepsilon^2-1)\frac{p^2\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = p^2$$

$$y^2 - (\varepsilon^2-1)\left(x - \frac{p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}\right)^2 = p^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1}\right) = -p^2 \frac{1}{\varepsilon^2-1}$$

$$\Rightarrow \left(x-\frac{p\varepsilon}{-1+\varepsilon^2}\right)^2-\frac{y^2}{\varepsilon^2-1}=\frac{p^2}{(\varepsilon^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\left(x-\frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2}{\left(\frac{p}{\varepsilon^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\right)^2}=1}\quad \varepsilon>1,\ E>0$$

→ Очевидно, ур-е гиперболы с соотв. полуосями.

Интересно непосредственно, для случая гиперболических орбит поработать с их уравнением в полярной системе координат!

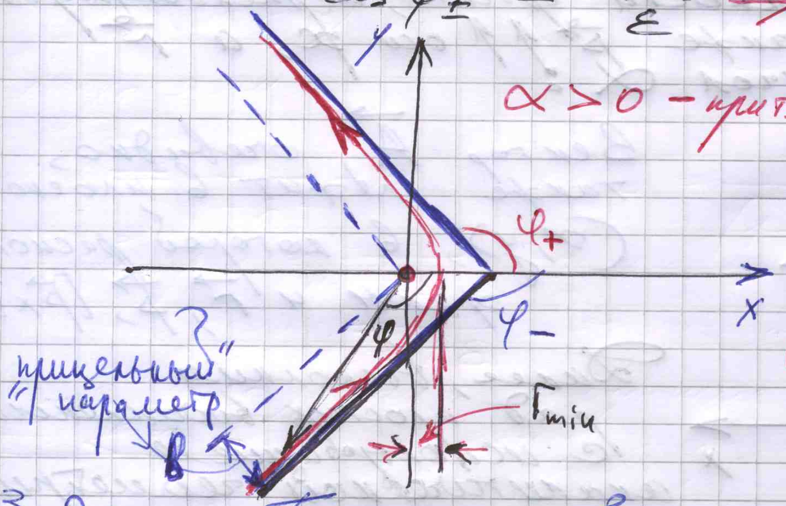
$$r(\varphi)=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\quad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{2El^2}{\mu\alpha^2}}>1$$

Ясно что существуют направления $\varphi_\pm$ движения, такие, для которых

$$r(\varphi_\pm)=\frac{1}{1+\varepsilon\cos\varphi_\pm}=\infty,$$

т.е. траектория относит. движения при $t\to\pm\infty$ приближается асимптотически к углам $\varphi_\pm$:

$$\cos\varphi_\pm=-\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow \varphi_\pm=\pm\,\mathrm{Arccos}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)$$



$\alpha>0$ — притяжение.

$$\varphi\to 0,\quad r(\varphi)\Big|_{\varphi\to 0}\to\frac{1}{1+\varepsilon}=r_{min}$$

$$l=\mu b v_\infty \qquad E=\frac{\mu v_\infty^2}{2}$$

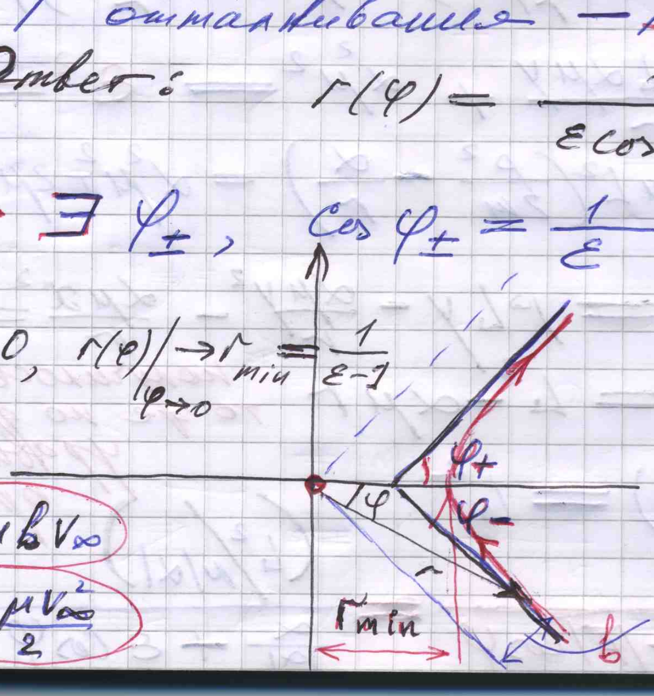
b — прицельный параметр.

Задача Проанализируйте точно также и случай инфинитных орбит в случае $\alpha<0$, $E>0$, отталкивания — Задача Кулона.

Ответ: $$r(\varphi)=\frac{1}{\varepsilon\cos\varphi-1},\quad \varepsilon>1,\ E>0$$

$$\to\ \exists\,\varphi_\pm,\quad \cos\varphi_\pm=\frac{1}{\varepsilon},\quad \varphi_\pm=\pm\,\mathrm{Arccos}\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\varphi\to 0,\quad r(\varphi)\Big|_{\varphi\to 0}\to r_{min}=\frac{1}{\varepsilon-1}$$



Задача Получите уравнение гипербол для случая отталкивания $\alpha<0$, $E>0$ в сист. координат x, y.

$$l=\mu b v_\infty$$

$$E=\frac{\mu v_\infty^2}{2}$$

§3 Вывод уравнений орбит с использованием сохраняющегося вектора Рунге-Кутта-Ленца

(Этот раздел носит факультативный, не обязательный характер).

Можно доказать, что помимо $\vec{L} = const$, сохраняется также и векторная физическая величина, названная в честь её открывателей, вектором Рунге-Кутта-Ленца:

$$\vec{A} = [\vec{p}\times\vec{L}] - \frac{\alpha\mu\vec{r}}{r} = const$$

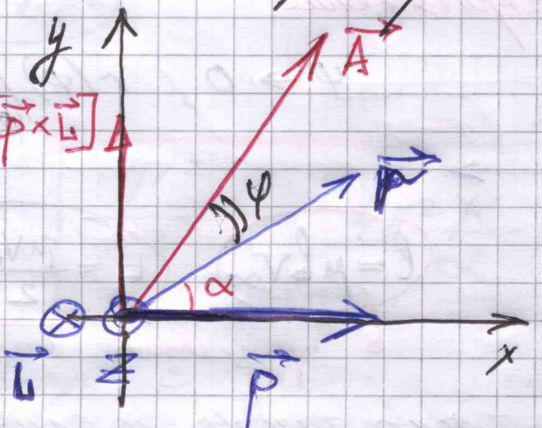
Задача. Докажите, что $\dot{\vec{A}} = 0 \Rightarrow \vec{A} = const$

Указание:

$$\dot{\vec{A}} = [\dot{\vec{p}}\times\vec{L}] + [\vec{p}\times\dot{\vec{L}}] - \frac{\alpha\mu\dot{\vec{r}}}{r} + \alpha\mu\frac{\vec{r}(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3} = 0$$

$$\dot{\vec{p}} = \mu\dot{\vec{r}} = -\frac{\alpha\vec{r}}{r^3},\quad \dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Далее, выберем, не нарушая общности, плоскость (x,y) в качестве плоскости орбиты, перпендикулярной $\vec{L}$. Пусть также $\vec{p} \uparrow\uparrow$ оси x, а $\vec{r}$ составляет с $\vec{p}$ угол α:



Вектор $\vec{A}$, очевидно, также лежит в плоскости (x,y), в которой расположены и $\vec{r}$, $\vec{p}$, $[\vec{p}\times\vec{L}]$

Далее, выполним ряд простых вычислений с использованием аналитической геометрии.

Имеем: $A_y = pL - \frac{\alpha\mu y}{r}$, $A_x = -\frac{\alpha\mu x}{r}$, $|\vec{L}| = py$.

$$\Rightarrow \vec{A}^2 = p^2L^2 - \frac{2pL\alpha\mu y}{r} + \alpha^2\mu^2 = \varepsilon^2 =$$

$$= \varepsilon^2 = \alpha^2\mu^2 + 2\mu L^2\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\alpha}{r}\right) = \alpha^2\mu^2 + 2\mu L^2 E$$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{r} = |\vec{A}||\vec{r}|\cos\varphi = pLy - \frac{\alpha\mu y^2}{r} - \frac{\alpha\mu x^2}{r} =$$

$$= L^2 - \alpha\mu r$$

получилось то же по форме уравнение орбит!

$$\Rightarrow r(|\vec{A}|\cos\varphi + \alpha\mu) = L^2$$

$$\Rightarrow r(\varphi) = \frac{L^2}{\alpha\mu + |\vec{A}|\cos\varphi} = \frac{\left(L^2/\mu|\alpha|\right)}{\frac{\alpha}{|\alpha|} + \varepsilon\cos\varphi}$$