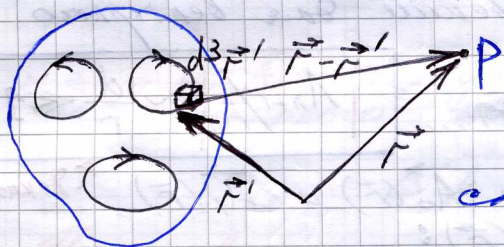


Расчет магнитных полей с помощью формул Био-Савара-Лапласа и уравнения Максвелла о циркуляции магнитного поля \vec{B} . Сила и момент силы, действующие на магнитный момент во внешнем магнитном поле.

§1. Расчет магнитных полей с помощью формулы Био-Савара-Лапласа.



$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}(\vec{r})$$

Уравнение Пуассона для потенциалов в пространстве с стационарными токами с объемной плотностью $\vec{j}(\vec{r})$ имеет при $\vec{A}(\vec{r}) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ следующее решение:

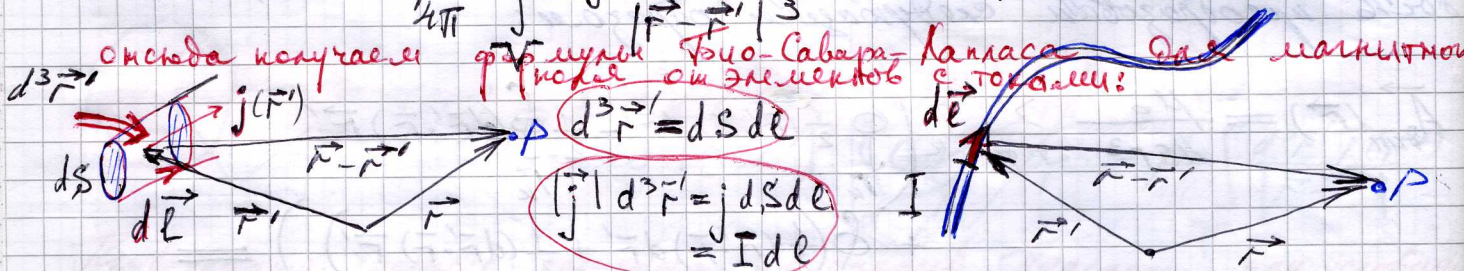
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

(*) P - точка наблюдения.

По данному векторному потенциалу легко рассчитывается индукция магнитного поля:

$$\vec{B}(\vec{r}) = [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] = \frac{\mu_0}{4\pi} \int [\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{j}(\vec{r}')] d^3r' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



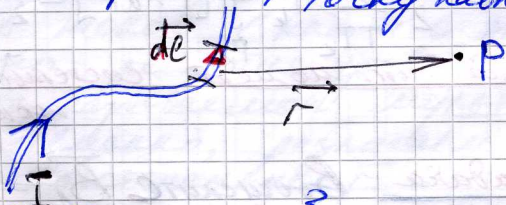
$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 [\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')] d^3r'}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')] d\ell}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Для объемного распределения токов

Для линейных токов

Часто формулу Био-Савара-Лапласа для линейного тока записывают более просто, используя непосредственно редукс-вектор \vec{r} , проведенный от элемента с током в точку наблюдения:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}]$$

Приведем простой пример использования формулы Био-Савара-Лапласа к расчету индукции магнитного поля прямолинейного отрезка с током I , конец отрезка виден из точки наблюдения P под углом φ_1 и φ_2 , рассматриваем отрезок с током до точки наблюдения обозначим через a . Введем подходящую для вычисления систему координат с осью y , направленной вдоль отрезка с током:

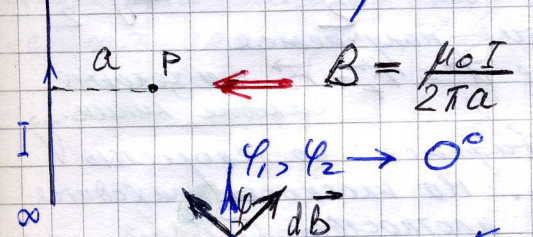
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}] \Rightarrow dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} dl \cdot r \sin\varphi$$

$d\vec{B} \perp$ плоскости рисунка, $|\vec{B}_p| = B_p = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin\varphi}{r^2}$

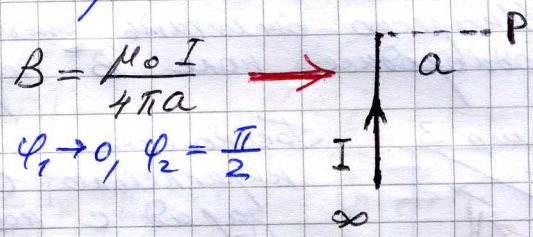
$$y = -a \cot\varphi, dl = dy = a \frac{1}{\sin^2\varphi} d\varphi, r = \frac{a}{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_2} \frac{a d\varphi}{\sin^2\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{a^2} \sin\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (-\cos\varphi) \Big|_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$$

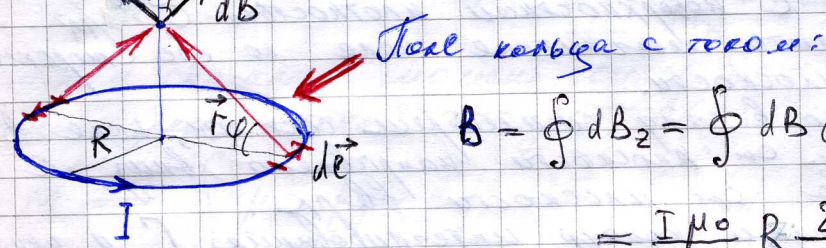
частных случаях бесконечного и полубесконечного проводов получаем следующие коды:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}$$



Поле кольца с током:

$$B = \oint dB_z = \oint dB \cos\varphi = \oint \frac{I\mu_0}{4\pi r^2} dl \cos\varphi = \frac{I\mu_0}{4\pi r^2} R \cdot 2\pi R = \frac{I\mu_0 R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}$$

Результирующее поле от всех элементов кольца с током направлено, очевидно, по оси z.

Другие примеры расчета магнитных полей с помощью формулы Био-Савара-Лапласа будут рассмотрены на практических занятиях.

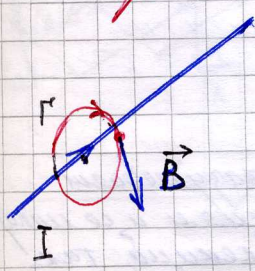
§2. Расчет магнитных полей с помощью уравнения Максвелла $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ обтекающей магнитного поля.

В случае распределений токов, обладающих некоторой симметрией, магнитное поле удобно рассчитывать с помощью уравнения Максвелла о циркуляции вектора \vec{B} :

$$[\nabla \times \vec{B}] = \mu_0 \vec{j} \iff \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

часть называется законом полного тока.

Пример 1. Поле бесконечного прямолинейного тока

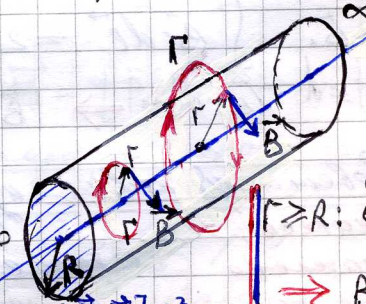


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{2r^2} R^2 \mu_0$$

Пример 2. Поле бесконечного цилиндра с током.



$$r \leq R: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 j \pi r^2$$

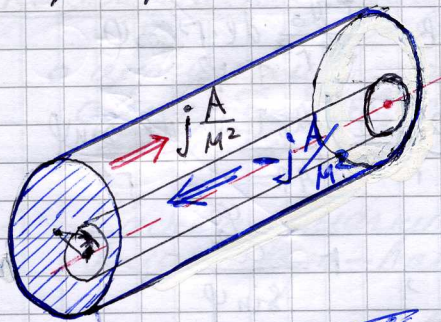
$$\Rightarrow B(r) = \frac{j r \mu_0}{2}$$

$$r \geq R: \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = j \pi R^2 \mu_0$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{j R^2 \mu_0}{2r}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{[\vec{j} \times \vec{r}]}{2r} \mu_0$$

Пример 2



Магнитное поле в цилиндрической полости бесконечного цилиндра с плотностью тока $j \text{ A/m}^2$.

Решение. Зададим ось тока $+j \text{ A/m}^2$ и $-j \text{ A/m}^2$.

текущими в противоположные стороны

Магнитное поле в любой точке полости с координатами \vec{r}_+ , от центра большого цилиндра, и \vec{r}_- , от центра полости, равно сумме полей токов большого и малого цилиндров:

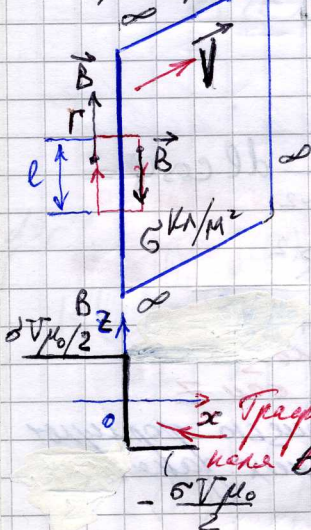
Магнитное поле в любой точке полости с координатами \vec{r}_+ , от центра большого цилиндра, и \vec{r}_- , от центра полости, равно сумме полей токов большого и малого цилиндров:

$$\vec{B}_{\text{полости}} = \vec{B}_+ + \vec{B}_- = \frac{[\vec{j} \times \vec{r}_+]}{2} \mu_0 - \frac{[\vec{j} \times \vec{r}_-]}{2} \mu_0 = \frac{[\vec{j} \times (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)]}{2} \mu_0 = \frac{[\vec{j} \times \vec{d}]}{2} \mu_0$$

Здесь $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$.

Интересно отметить, что в полости получается однородное поле \vec{B} , перпендикулярное $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$, см. зеленые стрелки.

Пример 3



Бесконечная плоскость движется со скоростью v параллельно самой себе. На плоскости находится заряд с поверхностной плотностью $\sigma \text{ Кл/м}^2$. Определите магнитное поле по обе стороны от плоскости.

Очевидно, в силу симметрии векторы поля \vec{B} справа от плоскости направлены вниз, а слева от плоскости вверх. Выбираем контур интегрирования Γ и применяем уравнение Максвелла о циркуляции \vec{B} :

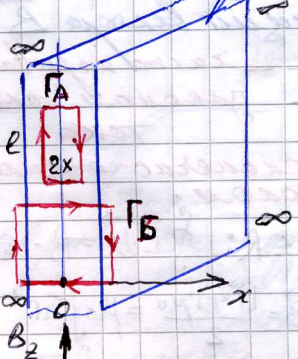
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2l = \mu_0 I = \mu_0 \sigma v \cdot l$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sigma v \mu_0}{2}$$

Роль плотности тока в задаче играет $|j| = \sigma v$.

Пример 4

Усложним предыдущую задачу, выдрав вместо плоскости бесконечную плиту с плотностью тока $j \text{ A/m}^2$. Толщина плиты $2d$. Требуется вычислить магнитное поле $B_z(x)$ во всем пространстве: А. в самой плите, при $|x| \leq d$; Б. снаружи плиты, при $|x| \geq d$.

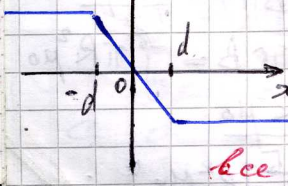


А. $\oint_{\Gamma_A} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2l \cdot B = 2j l |x| \mu_0$

$|x| \leq d \Rightarrow |\vec{B}| = j |x| \mu_0, B_z = -j x \mu_0$

Б. $\int_{\Gamma_B} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2l \cdot B = j l 2d \mu_0$

$|x| \geq d \Rightarrow |\vec{B}| = j d \mu_0$



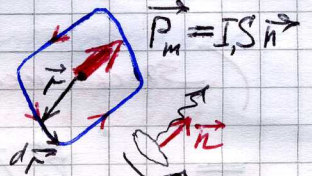
Совет студентам: изучение физики подразумевает подготовку к лекциям и семинарам, чтение, как конспекта лекций, так и учебников, решение задач, выполнение лабораторных работ. Не ленитесь, внимательно выкапайте во все детали предмета!

§3. Сила и момент сил, действующие на магнитный момент во внешнем магнитном поле.

Важную роль для понимания явлений в магнитных средах играет вопрос о поведении элементарного магнитного момента во внешнем магнитном поле; выясним какие моменты сил и сила действуют на магнитный момент, помещенный во внешнее магнитное поле с индукцией $\vec{B}(\vec{r})$.

Найдем, что ограниченное в пространстве распределение токов $\vec{j}(\vec{r})$ А/м² характеризуется магнитным моментом \vec{P}_m :

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \int_V [\vec{r} \times \vec{j}(\vec{r})] d^3r = \frac{1}{2} \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint [\vec{r} \times d\vec{r}]$$



Для рамки с током:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} I \oint [\vec{r} \times d\vec{r}] = I \cdot S \vec{n}$$

Магнитный момент не зависит от начала отсчета, т.е. если сделать замену $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$, то

$$\vec{P}_m \Big|_0 = \frac{1}{2} \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint [\vec{r}' - \vec{a} \times d\vec{r}'] = \frac{1}{2} \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint [\vec{r}' \times d\vec{r}'] = \vec{P}_m \Big|_0, \text{ т.к. } \oint d\vec{r}' = 0$$

Вычислим сначала момент сил, действующий на систему стационарных токов с $\vec{j}(\vec{r})$ А/м²:

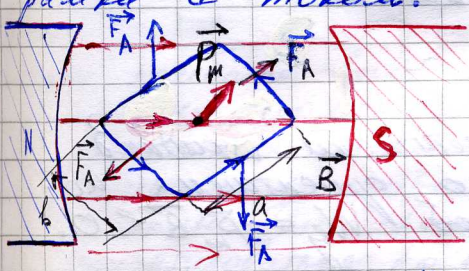
$$\begin{aligned} \vec{M} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_V [\vec{r} \times [\vec{j} \times \vec{B}]] d^3r = \int_V (j^i (\vec{r} \cdot \vec{B}) - (\vec{r} \cdot j) B^i) d^3r = \\ &= \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint_{\pi\pi_k} (d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - (\vec{r} \cdot d\vec{r}) \vec{B}) = \\ &= \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint_{\pi\pi_k} \left(\frac{1}{2} d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \frac{1}{2} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} + \frac{1}{2} d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) + \frac{1}{2} (d\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{r} \right) \\ &= \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint_{\pi\pi_k} \frac{1}{2} [\vec{B} \times [d\vec{r} \times \vec{r}]] = \frac{1}{2} \sum_{\pi\pi_k} I_k \oint_{\pi\pi_k} [(\vec{r} \times d\vec{r}) \times \vec{B}] = [\vec{P}_m \times \vec{B}] \\ &\rightarrow \vec{M} = [\vec{P}_m \times \vec{B}] \end{aligned}$$

Замечание!

$$\oint \vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \oint dr^2 = 0$$

$$\frac{1}{2} \oint d(\vec{r} \cdot \vec{B}) = 0$$

Элементарный вывод той же формулы для простого случая рамки с током:

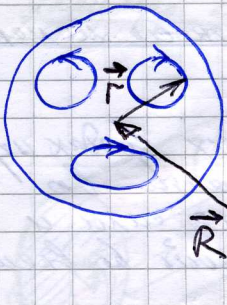


$$|\vec{M}| = I a B b \sin(\vec{B}, \vec{n}) = I B S \sin(\vec{B}, \vec{n}) = |[\vec{P}_m \times \vec{B}]|$$

$\rightarrow \vec{M} = [\vec{P}_m \times \vec{B}]$ - та же формула, что и выше.

На сторонах рамки с током действуют силы Ампера, в результате действия пар сил Ампера на стороны длиной a , как раз и возникает вращающий момент

Внимательно рассмотрите рисунок, проследите за парами сил, действующих на рамку и т.д.



Точно также может быть получено выражение для силы, действующей на распределение токов с $\vec{j}(\vec{r})$ А/м², помещенное во внешнее магнитное поле:

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= \int_V [\vec{j} \times \vec{B}(\vec{R} + \vec{r})] d^3 \vec{r} = \\
 &\approx \int_V [\vec{j} \times (\vec{B}(\vec{R}) + (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{B}(\vec{R}))] d^3 \vec{r} \\
 &= \int_V \vec{\nabla}_R \cdot \vec{r} [\vec{j} \times \vec{B}(\vec{R})] d^3 \vec{r} = \sum_{\pi \pi_k} I_k \oint_{\pi \pi_k} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) [d\vec{r} \times \vec{B}(\vec{R})] = \\
 &= \sum_{\pi \pi_k} I_k \oint_{\pi \pi_k} \left[\frac{1}{2} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) d\vec{r} - \frac{1}{2} (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{r} + \frac{1}{2} (d\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{r} + \frac{1}{2} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) d\vec{r} \right] \times \vec{B} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\pi \pi_k} I_k \oint_{\pi \pi_k} [d\vec{r} \times \vec{r}] \times \vec{B}(\vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_{\pi \pi_k} I_k \oint_{\pi \pi_k} [(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{r}] \times \vec{B}(\vec{R}) = \\
 &= [[\vec{P}_m \times \vec{\nabla}_R] \times \vec{B}(\vec{R})] = \vec{\nabla}_R (\vec{P}_m \cdot \vec{B}(\vec{R})) - \vec{P}_m (\vec{\nabla}_R \cdot \vec{B}) = \vec{\nabla}_R (\vec{P}_m \cdot \vec{B})
 \end{aligned}$$

В данной лекции использовался переход от интегралов с объемной плотностью токов к суммированию по трубкам с токами:

$$\int_V \vec{j}(\vec{r}) \dots d^3 \vec{r} = \sum_{\pi \pi_k} I_k \oint_{\pi \pi_k} d\vec{r} \dots$$

такой переход детально обоснован в вводимой лекции.

$$\vec{F} = \vec{\nabla}_R (\vec{P}_m \cdot \vec{B}(\vec{R})) \stackrel{def}{=} -\vec{\nabla}_R W_M$$

В результате проведенного вывода получается также формула для энергии взаимодействия магнитного диполя \vec{P}_m с внешним магнитным полем:

$$W_M = -\vec{P}_m \cdot \vec{B}$$

Из данного выражения видно, что энергетически выгодной ориентацией диполя является его ориентация по внешнему полю, для которой $W_M = -\vec{P}_m \cdot \vec{B} < 0$.

§4. Связь магнитного момента \vec{P} системы заряженных частиц с $q/m = \text{const}$ с орбитальными моментами
Прецессия магнитного момента во внешнем магнитном поле.

Рассмотрим систему заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе, т.е. $q_i/m_i = \text{const}$, для всех частиц системы. Магнитный момент системы даётся формулой:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \sum_i [\vec{r}_i \times q_i \vec{v}_i] = \frac{1}{2} \sum_i [\vec{r}_i \times \frac{q}{m} m \vec{v}_i] = \frac{q}{2m} \sum_i [\vec{r}_i \times m \vec{v}_i] = \frac{q}{2m} \vec{L} = g_L \vec{L}$$

здесь $g_L = \frac{q}{2m}$ — так называемое гиромагнитное отношение.

Установившаяся связь между магнитным и орбитальным моментами

$$\vec{P}_m = g_L \vec{L}$$

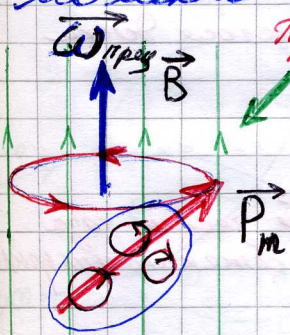
означает, что для системы с $\frac{q}{m} = \text{const}$ магнитный момент системы пропорционален орбитальному моменту. Для такой системы, в силу полученного соотношения между \vec{P}_m и \vec{L} , легко выводится скорость прецессии $\vec{\omega}_{\text{прец}}$ магнитного момента системы, помещенной во внешнее магнитное поле:

$$\frac{d\vec{P}_m}{dt} = g_L \frac{d\vec{L}}{dt} = g_L [\vec{P}_m \times \vec{B}] = \left[-\frac{q}{2m} \vec{B} \times \vec{P}_m \right] = [\vec{\omega}_{\text{прец}} \times \vec{P}_m]$$

здесь угловая скорость

$$\vec{\omega}_{\text{прец}} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$$

является угловой скоростью прецессии магнитного момента во внешнем магнитном поле.



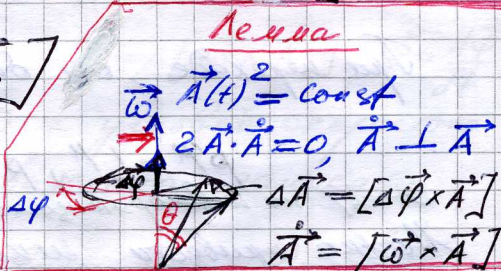
Прецессия магнитного момента системы стаб. токов для системы с $-\frac{q}{m} > 0$

Так как потенциальная энергия магнитного момента во внешнем магнитном поле имеет вид:

$$W_{\text{вз}} = -\vec{P}_m \cdot \vec{B}$$

то наиболее выгодна ориентация магнитных моментов по полю \vec{B} . Но магнитные моменты прецессируют во внешнем магнитном поле, не ориентируясь по полю. Что же заставляет их ориентироваться по полю? Ответ очевиден — это столкновения частиц в среде с магнитными моментами.

Получается любопытная картина: с одной стороны столкновения способствуют ориентации магн. моментов по полю, а с другой — эти же столкновения из-за тепловых движений разупорядочивают магнитную среду.



Лемма

$$\begin{aligned} \vec{A}(t)^2 &= \text{const} \\ 2\vec{A} \cdot \dot{\vec{A}} &= 0, \vec{A} \perp \dot{\vec{A}} \\ \Delta \vec{A} &= [\dot{\phi} \times \vec{A}] \\ \dot{\vec{A}} &= [\vec{\omega} \times \vec{A}] \end{aligned}$$

Пример Орбитальной магнитной момент электрона

$$\begin{aligned} \vec{P}_{mL} &= g_L \vec{L} = \frac{q}{2m} \vec{L} \\ \vec{P}_m &= I S \vec{n}, \vec{n}^2 = 1 \\ |\vec{P}_m| &= |q| \frac{v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} |q| v r \\ &= \frac{|q|}{2m} m v r = \frac{|q|}{2m} |\vec{L}_{\text{орб}}| \end{aligned}$$

Эксперименты показывают, что у электрона (позитрона) есть еще и собственная магн. момент пропорциональный спинальному моменту

