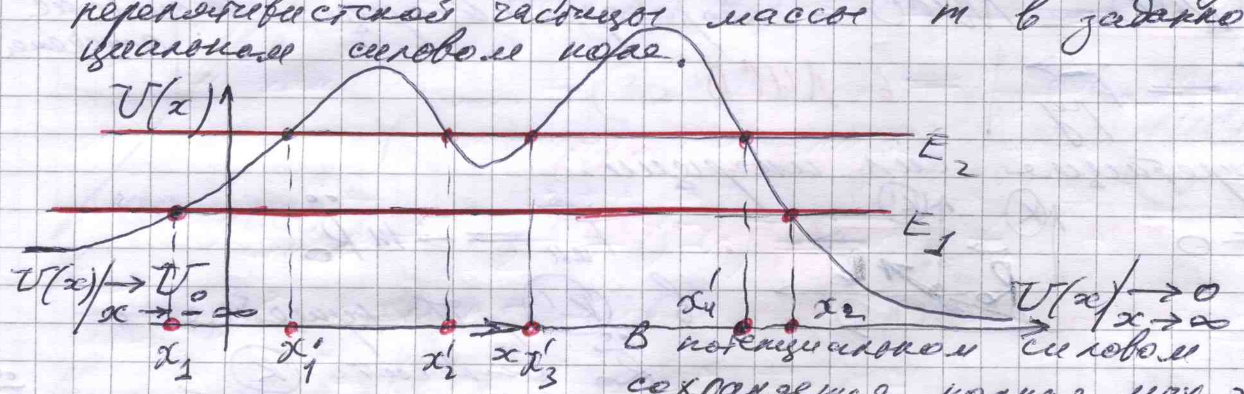
Лекция 20. Общий анализ одномерных движений. Постановка задачи двух тел, взаимодействующих посредством центральных сил. Задачи Кеплера и Кулона – качественный анализ возможных орбит.

§1. Общий анализ одномерных движений.

Покажем как осуществляется общий анализ движения нерелятивистской частицы массы m в заданном потенциальном силовом поле.



В потенциальном силовом поле сохраняется полная мех. энергия частицы:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E = const,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \geq 0, \text{ т.к. } \frac{m\dot{x}^2}{2} \geq 0$$

Из последнего равенства очевидно, что движение частицы возможно в областях, в которых $E \geq U(x)$, т.е. полная энергия частицы больше или равна её потенциальной энергии. Такие области называются классически доступными областями движений.

Так, на приведенном выше рисунке энергии частицы E_1 соответствуют две классически доступные области движения: область $x \leq x_1$, слева; область $x \geq x_2$ – справа. Эти движения, очевидно, происходят в бесконечных областях пространства и называются инфинитными (неограниченными, простирающимися до бесконечности: $-\infty < x \leq x_1$, $x_2 \leq x < +\infty$).

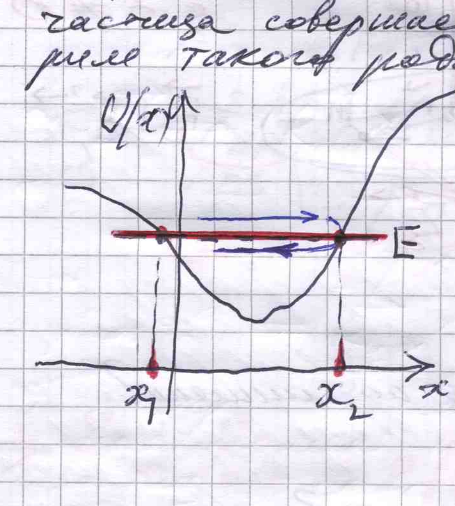
Уровню энергии частицы E_2 соответствует уже три классически доступных областей движения:

$-\infty < x \leq x_1'$ – область инфинитного движения,

$x_2' \leq x \leq x_3'$ – область финитного (ограниченного) движения

$x_4' \leq x < +\infty$ – область инфинитного (неограниченного движения).

Ясно, что в области финитного движения $x_2' \leq x \leq x_3'$ частица совершает колебательное движение. Рассмотрим такого рода движения более подробно.

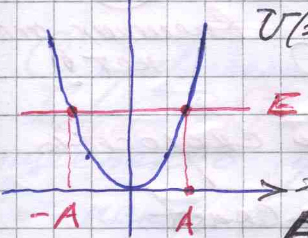


$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad 2\int_{x_1}^{x_2} dt = \underbrace{T}_{\text{период колебаний}} = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

Пример. Период колебаний математического маятника.



$U(x)=\frac{kx^2}{2}$ — такая энергия соответствует гармоническому осциллятору или математическому маятнику вблизи положения равновесия, для гармонических (по закону синуса или косинуса) колебаний.

$$T=2\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{kx^2}{2}\right)}}=2\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{kA^2}{2}-\frac{kx^2}{2}\right)}}=2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-A}^{A}\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=$$

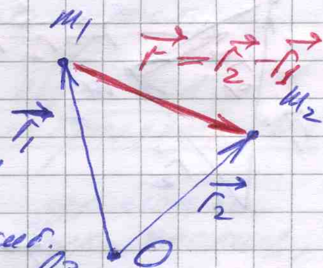
$$\overset{(x/A=y)}{=}2\sqrt{\frac{m}{k}}\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=2\sqrt{\frac{m}{k}}\arcsin y\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

§2. Постановка задачи двух тел, взаимодействующих посредством центральных сил.

Рассмотрим задачу двух частиц, взаимодействующих посредством центральных сил, т.е. таких сил, которым соответствует потенциальная энергия взаимодействия, зависящая от относительного расстояния между частицами. Полная энергия такой системы имеет вид:

$$E=\frac{m_1\dot{\vec r}_1^{\,2}}{2}+\frac{m_2\dot{\vec r}_2^{\,2}}{2}+U(|\vec r_1-\vec r_2|).$$



Анализируя движение частиц m_1 и m_2 в такой задаче, удобно перейти к координатам центра инерции, а относительного расстояния, например, второй частицы относительно первой:

$$\vec R_{ц.и}=\frac{m_1\vec r_1+m_2\vec r_2}{m_1+m_2},\quad \vec r=\vec r_2-\vec r_1$$

Решая последнюю систему уравнений относительно $\vec r_1$ и $\vec r_2$, получим:

$$\vec r_1=\vec R_{ц.и}-\frac{m_2\vec r}{m_1+m_2},\quad \vec r_2=\vec R_{ц.и}+\frac{m_1\vec r}{m_1+m_2},$$

подставляя полученные формулы для $\vec r_1$ и $\vec r_2$ в выражение для полной энергии, находим

$$E=\frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec R}_{ц.и}-\frac{m_2\dot{\vec r}}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec R}_{ц.и}+\frac{m_1\dot{\vec r}}{m_1+m_2}\right)^2+U(|\vec r|)$$

$$=\frac{(m_1+m_2)\dot{\vec R}_{ц.и}^{\,2}}{2}+\frac{m_1m_2\dot{\vec r}^{\,2}}{2(m_1+m_2)}+U(r)=$$

$$=\frac{M\dot{\vec R}_{ц.и}^{\,2}}{2}+\frac{\mu\dot{\vec r}^{\,2}}{2}+U(r).$$

Получилось, что полная энергия распалась в сумму двух слагаемых, отвечающих за движение центра инерции и движение относительное

$$E_{ц.и}=\frac{M\dot{\vec R}_{ц.и}^{\,2}}{2},\quad E_{отн}=\frac{\mu\dot{\vec r}^{\,2}}{2}+U(r),$$

$M=m_1+m_2$ — полная масса,

$\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведённая масса.

Согласно второму закону Ньютона: (13)

$$\frac{d\vec P_{полн.сист.}}{dt} = M\ddot{\vec R}_{ц.и} = \vec F_{рез,внешн} = 0$$ внешних сил нет!

$\Rightarrow$ центр инерции движется с постоянной скоростью

$$\dot{\vec R}_{ц.и} = const, \quad E_{ц.и} = \frac{M\dot{\vec R}^2_{ц.и}}{2} = const$$

Так как $E_{полн} = E_{ц.и} + E_{отн.дв} = \frac{M\dot{\vec R}^2_{ц.и}}{2} + \frac{\mu\dot{\vec r}^2}{2} + U(r) = const$

то энергия относит. движения также сохраняется:

$$E'_{отн.дв} = \frac{\mu\dot{\vec r}^2}{2} + U(r) = const.$$

Полный момент импульса системы частиц имеет вид:

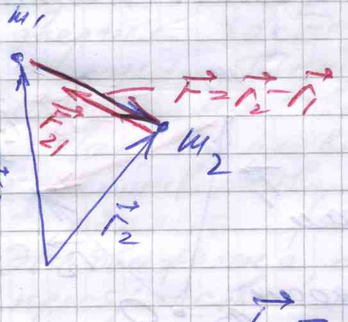
$$\vec L = [\vec r_1\times\vec p_1] + [\vec r_2\times\vec p_2]$$

и изменяется со скоростью

$$\frac{d\vec L}{dt} = [\vec r_1\times\dot{\vec p}_1] + [\vec r_2\times\dot{\vec p}_2] = [\vec r_1\times\vec F_{12}] + [\vec r_2\times\vec F_{21}] =$$

$$= [\vec r_2 - \vec r_1\times\vec F_{21}], \text{ т.к. } \vec F_{12} = -\vec F_{21}$$

$$= 0, \text{ т.к. } \vec r_2 - \vec r_1 \uparrow\downarrow \vec F_{21}$$



Полный момент импульса системы двух частиц, взаимодействующих посредством центральных сил, таким образом, сохраняется.

$$\vec L = [\vec r_1\times\vec p_1] + [\vec r_2\times\vec p_2] = const$$

Полный момент $\vec L$ можно переписать в терминах координат $\vec R_{ц.и}$ и $\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$:

$$\vec L = \left[\left(\vec R_{ц.и} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec r\right)\times\left(m_1\dot{\vec R}_{ц.и} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec r}\right)\right] +$$

$$+ \left[\left(\vec R_{ц.и} + \frac{m_1\vec r}{m_1+m_2}\right)\times\left(m_2\dot{\vec R}_{ц.и} + \frac{m_1\dot{\vec r}}{m_1+m_2}\right)\right],$$

раскрывая в последнем выражении скобки и приводя подобные члены, получим:

$$\vec L = [\vec R_{ц.и}\times M\dot{\vec R}_{ц.и}] + \left[\vec r\times\frac{m_1 m_2\dot{\vec r}}{m_1+m_2}\right] =$$

$$= \vec L_{орбит.дв} + \vec L_{собств} = const$$

$\vec L_{орбит.дв} = [\vec R_{ц.и}\times M\dot{\vec R}_{ц.и}] = const$, в силу $\dot{\vec R}_{ц.и} = const$

$\vec R_{ц.и} = \vec R_0 + \vec V_{ц.и} t$

Поэтому собственный момент импульса, или момент импульса относительного движения частиц также сохраняется:

$$\vec{L}_{собств.} = \vec{L}_{внутр.} = \vec{L}_{отн.дв} = [\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}] = \overrightarrow{const}.$$

С привлечением сохраняющихся величин $E_{отн.дв} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) = const$ и $\vec{L}_{отн.дв} = [\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}] = \overrightarrow{const}$ анализ движения двух частиц существенно упрощается:

- центр инерции движется с постоянной скоростью:

$$M\ddot{\vec{R}}_{ц.и} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{R}}_{ц.и} = \vec{V}_{ц.и} = \overrightarrow{const}, \Rightarrow \vec{R}_{ц.и} = \vec{V}_{ц.и} t + \vec{R}_0.$$

$$\vec{L}_{орбит.дв} = [\vec{R}_{ц.и} \times M\dot{\vec{R}}_{ц.и}] = \overrightarrow{const}, \quad E_{ц.и} = \frac{M\dot{R}^2_{ц.и}}{2} = const$$

- Остается проанализировать характер относительного движения двух частиц, взаимод. посредством центр. сил, при этом

$$\vec{L}_{отн.дв} = [\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}] = \overrightarrow{const}, \quad E_{отн.дв} = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) = const,$$

в данной части речь идёт об анализе движения частицы с приведенной массой $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ в потенциальном силовом поле с энергией $U(r)$.

Проблема, в конечном счёте, свелась к двум задачам: задаче движения частицы $M = m_1 + m_2$ с радиус-вектором $\vec{R}_{ц.и}$ и задаче движения частицы $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ в поле с энергией $U(r)$.

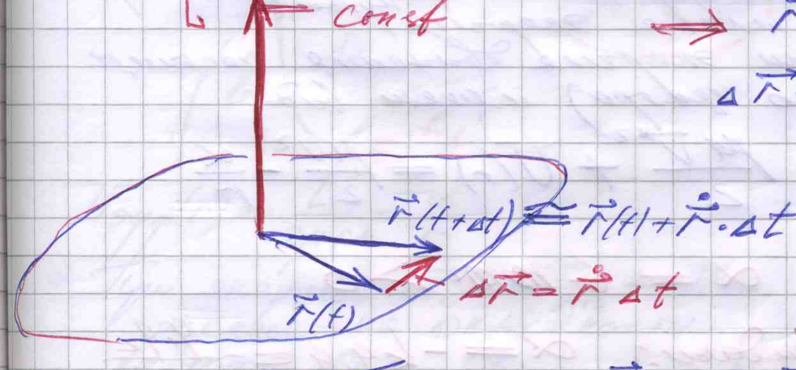
Обе задачи одночастичные и достаточно простые.

§ 3. Первые два закона Кеплера для задачи двух тел, взаимодействующих посредством центральных сил.

Получим следствия закона сохранения момента импульса относительного движения для двух частиц, взаимодействующих посредством центральных сил

$$\vec{L}_{отн.дв} = [\vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}] = \overrightarrow{const} \longrightarrow \vec{r}(t) \perp \vec{L}, \quad \dot{\vec{r}}(t) \perp \vec{L}$$

Далее $\vec{L}_{отн.дв} = \vec{L}$ — для простоты.



$\Longrightarrow \vec{r}(t) \perp \vec{L}$

$\Delta \vec{r} = \vec{V}(t) \Delta t \perp \vec{L}$

$\Rightarrow \vec{r}(t+\Delta t)$ — в той же плоскости, перпендикулярной $\vec{L}$, что и $\vec{r}(t)$, т.е. **орбита относит. движения частицы является плоской орбитой!**

Так как $\vec{r}_1(t) = \vec{R}_{ц.и} - \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}$, $\vec{r}_2(t) = \vec{R}_{ц.и} + \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2}$

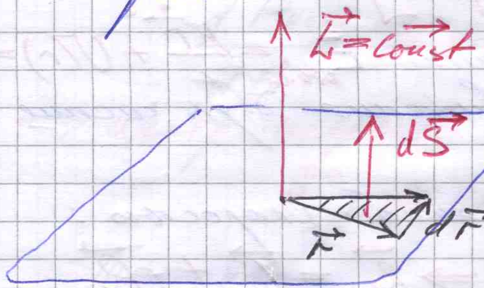
т.к. орбиты $\vec{r}(t)$ — плоские $\Longrightarrow$ Орбиты $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ в системе центра инерции двух частиц — плоские.

Получаем первый закон Кеплера:

1°. Орбиты планет, взаимодействующих посредством центральных сил, являются плоскими.

„Планетами" — могут быть и заряженные частицы в задаче Кулона.

Ещё один закон Кеплера также получается весьма просто:



Рассмотрим величину

$$\frac{1}{2}[\vec{r}\times d\vec{r}] \stackrel{def}{=} d\vec{S} \text{ — элемент площади.}$$

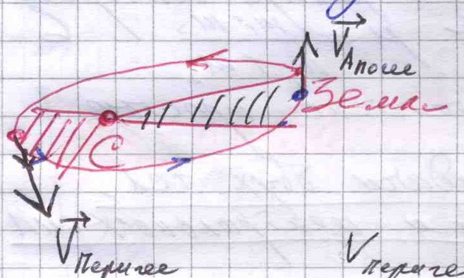
Очевидно, $|d\vec{S}| = \frac{1}{2}|\vec{r}||\Delta\vec{r}|\sin(\widehat{\vec{r},\Delta\vec{r}})$ — $d_\perp S$ — заштрихов. площадь на рисунке.

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] = \frac{1}{2m}[\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}] = \frac{\vec{L}}{2m} = const$$

$\frac{d\vec{S}}{dt}$ называется секториальной скоростью, и эта скорость постоянна!

Имеем второй закон Кеплера.

2°. Секториальная скорость планеты постоянна, т.е. за равные промежутки времени радиус-вектор планеты заметывает одинаковые площади



Когда планета пролетает вблизи Солнца, ее скорость по величине больше, т.к. заметываемая её радиус-вектором площадь та же, что и за то же время заметываемая в отдалении

$V_{перигее} > V_{апогее}$

§4. Качественный анализ орбит в задачах Кеплера и Кулона

Под задачами Кеплера и Кулона понимают задачи о движении частиц в потенциальных силовых полях: Кеплера — в поле тяготения с $|F_{тяж}| \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$; Кулона — в электростатическом поле точечного заряда с $|F_{кулона}| \propto q_1 q_2 / r^2$.

В обоих случаях полная энергия относит. движения (или энергия движения частицы в поле фиксированного силового центра) имеет вид:

$$E = E_{полн.\,мех} = \frac{\mu \vec{V}^2}{2} + U(r) = \frac{\mu V^2}{2} - \frac{\alpha}{r}$$

- Для гравитации: $\alpha = G m_1 m_2 > 0$
- Для кулоновской задачи: $\alpha = -k q_1 q_2 = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$
  в последнем случае м. быть
  $\alpha = -k q_1 q_2 > 0$ — противоположные по знаку заряды
  $\alpha = -k q_1 q_2 < 0$ — одинаковые по знаку заряды.

Момент импульса относит. движения

$$\vec{L} = [\vec{r}\times\mu\vec{v}] = [\vec{r}\times\mu\vec{v}_\perp], \quad \vec{v}_\perp \perp \vec{r}$$

Так что

$$|\vec{L}| = L = \mu v_\perp r \Rightarrow v_\perp = \frac{L}{\mu r}.$$

Кроме того квадрат скорости частицы

$$\vec{v}^{\,2} = \vec{v}_\perp^{\,2} + \vec{v}_\parallel^{\,2}, \quad \vec{v}_\perp \perp \vec{r}, \quad \vec{v}_\parallel \parallel \vec{r}$$

$$= \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \vec{v}_\parallel^{\,2} = \frac{L^2}{\mu^2 r^2} + \dot{r}^2$$

Поэтому

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha}{r} =$$

$$\stackrel{def}{=} \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U_{эфф}(r) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}}_{U_{эфф}(r)}$$

и задача об относительном движении сводится к чисто одномерной задаче с координатой $r(t) = |\vec{r}(t)| \geq 0$ и кинетической энергией радиального движения

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} = E - U_{эфф}(r) \geq 0,$$

NB В потенц. силовом поле с $U_{эфф} = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$

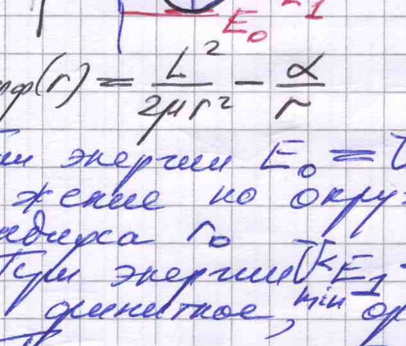
К качественному анализу возможных орбит можно применить метод, рассмотренный в первом разделе данной лекции.

Согласно этому методу, необходимо проанализировать графики эффективной потенциальной энергии

$$U_{эфф}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$$

и определить классически доступные области на оси r для радиального движения. Проведем этот анализ для случаев: притяжения с $\alpha > 0$, отталкивания с $\alpha < 0$.

$\alpha > 0$ — притяжение

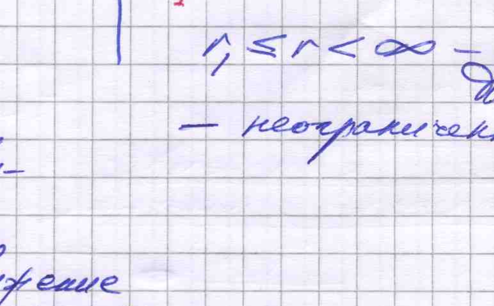


$0 \leq r < \infty$

$U_{эфф}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{\alpha}{r}$

- При энергии $E_0 = U_{min}$ — движение по окружности радиуса r_0
- При энергии $U_{min} < E_1 < 0$ — движение финитное, орбиты — эллипсы
- При энергии $E_2 > 0$ — движение инфинитное — неограниченные орбиты.

$\alpha < 0$ — отталкивание



$r_1 \leq r < \infty$ — инфинитное движение — неограниченные орбиты.