Лекция 1. Предмет теоретической физики.
Обобщенные координаты. Связи и их классификация.
Возможные и виртуальные перемещения. Число степеней свободы.
Принцип Д'Аламбера и уравнения Лагранжа.

§1. Предмет теоретической физики.

Теоретическая физика тесно связана с экспериментальной физикой, но отличается от неё по методу и характеру результатов. Эксперимент устанавливает отдельные факты (наблюдение физических явлений, измерения физических величин), часто очень значимые. Теория же не просто объясняет эти отдельные факты, а формулирует общие принципы. На основе небольшого числа принципов и осн. законов может быть объяснено всё многообразие явлений окружающего нас мира.

Замечательный французский математик и физик А. Пуанкаре приводил такое сравнение: множество добытых экспериментальных фактов — прекрасная библиотека; теоретическая же физика — это каталог, путеводитель по данной библиотеке. Создание теоретической физики является крупнейшим достижением человеческого разума. Без преувеличения можно сказать, что теоретическая физика является основой современного естественно-научного мировоззрения.

Теоретическая физика образует необходимый фундамент для изучения специальных инженерных дисциплин: микроэлектроники, квантовой электроники и оптоэлектроники, фотоники и схемотехники и т. д. Математика является языком и инструментом теоретической физики. Успешное изучение и применение теоретической физики немыслимо без достаточного владения математикой.

В нескольких семестрах вы будете знакомиться с различными разделами теоретической физики:

- элементы аналитической механики,
- теория электромагнитного поля,
- математические методы теоретич. физики,
  (или математическое моделирование физических явлений)
- квантовая механика,
- статистическая физика.

Мы начинаем с изучения аналитической механики, лежащей в основе всех разделов теоретической физики: электродинамики, квантовой механики и статистической физики. Та форма, которую придали механике Ньютона Лагранж и Гамильтон, оказалась решающей при создании квантовой механики и статистической физики. Наша ближайшая цель — знакомство с механикой Лагранжа и механикой Гамильтона.

§2. Связи, их классификация. Обобщенные координаты.

Из общего курса физики мы будем предполагать известными следующее: понятия материальной точки, системы отсчёта, механического движения и т. д. При малых ($V \ll c$) и больших ($V \lesssim c$) скоростях справедливы механика Ньютона и, соответственно, механика Эйнштейна, СТО.

$V \ll c$	$V \lesssim c$
Механика Ньютона:	**Механика Эйнштейна:**
• абсолютные пространство и время,	• пространство-время Минковс
• Законы Ньютона,	• Законы СТО(спец-теории отн
• Принцип относит. Галилея	• принцип относит. Эйнштейн

Удобной идеализацией является представление всяко материального тела в виде системы из N материальн точек. Описание движения мат. тела сводится тогда описанию движения $N \gg 1$ материальных точек с помощью уравнений движения Ньютона:

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k , \quad k=1,\dots,N$$

Часто ставится и решается следующая **Основная задача механики:** даны начальные значения к нат и скоростей

$$\vec{r}_k(t=0)=\vec{r}_{k0}, \quad \vec{V}_k(t=0)=\vec{V}_{k0}=\dot{\vec{r}}_k(t=0),$$

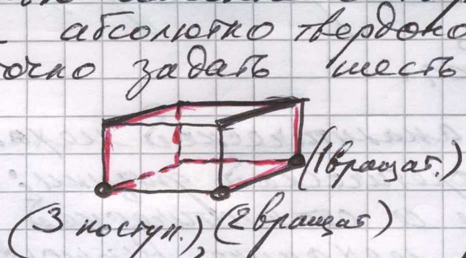
требуется, решая уравнения Ньютона, определить зак движения системы точек в более позднее время:

$$\vec{r}_k(t) = ? \quad \text{при } t > t_0 = 0, \quad (k=1,\dots,N).$$

В случае большого числа частиц, $N \gg 1$, решать систе уравнений Ньютона не просто. Описание движения систем частиц становится проще, если, например, расстояния между любыми двумя точками системы не меняются при движении системы, т. е.

$$|\vec{r}_{ij}| = |\vec{r}_i(t)-\vec{r}_j(t)| = r_{ij} = const, \quad \forall i,j.$$

В данном случае на систему наложены, как говорят, связи, и сформулированная модель системы частиц являе моделью абсолютно твердого тела. Для фиксации п жения абсолютно твердоко тела в пространстве, очевидно, достаточно задать шесть координат, соответствующих шести степеням свободы тв. трём поступательным и трём вращательным, число которых легко подсчитывается закреплением трёх точек твердого тела, не леж щих на одной прямой.



Определение Минимальное число координат, соответствующ независимым перемещениям системы и фиксирующих положение системы в пространстве, называется набором обобщенных координат, которые абстрактно обозначают как $q=(q_1,\dots,q_f)$, где f — число степеней свободы системы.

(№) строгое опр. f-сти ниже.

Для абсолютно твердого тела таким набором являются три координаты центра масс (инерции) и три угла Эйлера, определяющие ориентацию тела в пр-ве:

Для тв. тела: $$(q_1) q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \equiv (\vec{R}_{ц.и.}; \theta, \varphi, \psi).$$

Аналитически связи задаются соотношениями типа:

$$f_\alpha(\vec r, \vec r\,', \vec r\,'', \dots, \vec r^{\,(m)}, t) = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, d)$$

где $\vec r \overset{def}{\equiv} (\vec r_1, \dots, \vec r_N)$, $\vec r^{\,(m)} = (\vec r_1^{\,(m)}, \dots, \vec r_N^{\,(m)}) = \left(\frac{d^m \vec r_1}{dt^m}, \dots, \frac{d^m \vec r_N}{dt^m}\right)$ — означают краткие обозначения для радиус-векторов и их производных по времени сразу для всех частиц системы. (Индекс α нумерует различные связи).

В механике в громадном числе случаев ограничиваются рассмотрением более простых связей

$$f_\alpha(\vec r, \vec r\,', t) = f_\alpha(\vec r, \dot{\vec r}, t) = 0$$

или в дифференц. форме

$$\sum \vec a_k^{(\alpha)}(\vec r, t)\,\dot{\vec r}_k + b^{(\alpha)}(\vec r, t) = 0$$

($\alpha = 1, \dots, d$ — число связей)

Связи подразделяются на различные типы:

- склерономные — по типу временной зависимости: $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial \vec a_k^{(\alpha)}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial b^{(\alpha)}}{\partial t} = 0$;
- реономные — зависящие от времени;
- по типу интегрируемости:

голономные, если $\int f_\alpha(\vec r, \dot{\vec r}, t) \Rightarrow F_\alpha(\vec r, t) = 0$

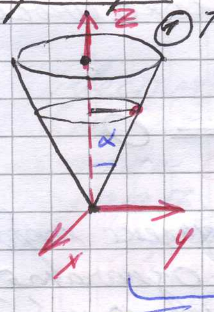
или интегрируемые связи, т.е. ур-я которых можно $\int\left(\vec a_k^{(\alpha)} \cdot \dot{\vec r}_k + b^{(\alpha)}(\vec r, t)\right) \Rightarrow F_\alpha(\vec r, t) = 0$

проинтегрировать по времени и получить более простые выр-я для связей без $\dot{\vec r}_k$

неголономные, т.е. не интегрируемые, из выражений для которых нельзя интегрированием избавиться от $\dot{\vec r}_k$.

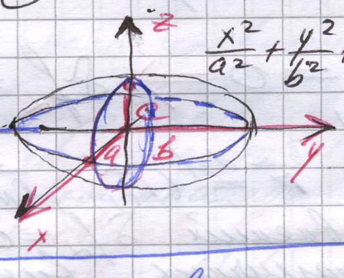
Примеры

① Точка на конусе



$$\sqrt{x^2 + y^2} = z\,tg\,\alpha$$

② Точка на эллипсоиде



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Голономные, склерономные связи.

③ Точка на эллипсоиде с зав. от времени полуосью

$$\frac{x^2}{a^2 f^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

голономная, реономная связь

§3. Возможные и виртуальные перемещения. Число степеней свободы. Идеальные связи.

В механике широко используются следующие определения возможных (действительных) и виртуальных перемещений.

Определение. Возможные перемещения — это действительные перемещения $d\vec r_k = \vec V_k dt$ частиц системы с определенными скоростями, совместные со связями:

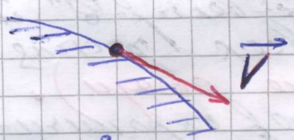
$$\underbrace{f(\vec r, t) = 0}_{\text{ур-е связи}} \Longrightarrow df = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec r_k} \vec V_k dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

Определение Виртуальные перемещения $\delta \vec r_k$ — это перемещения, допускаемые связями в фиксированный момент времени, т. е. при $dt = 0$, и, следоват.,

$f(\vec r, t) = 0$, $t=\mathrm{const}$, $\Rightarrow \delta f = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial \vec r_k}\delta \vec r_k = 0.$

Уравнение связи

Пример 1 Точка на неподвижной поверхности (с $\vec r_k$):



$d\vec r_k = \vec V_k dt$, $d\vec r_k' = \vec V_k' dt$ — возможные перемещение

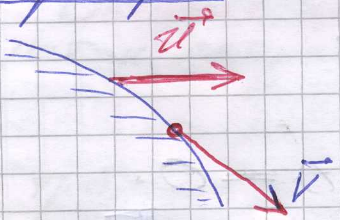
$\delta \vec r_k = d\vec r_k - d\vec r_k' = (\vec V_k - \vec V_k')dt$ — виртуальное пер

Действительно:

$$\begin{aligned}&\sum_k \frac{\partial f}{\partial r_k}\vec V_k dt + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\\ \ominus\ & \qquad\qquad\qquad \Longrightarrow \sum_k \frac{\partial f}{\partial r_k}\underbrace{(\vec V_k - \vec V_k')dt}_{\delta \vec r_k = (\vec V_k - \vec V_k')dt} = 0\\ &\sum_k \frac{\partial f}{\partial \vec r_k}\vec V_k' dt + \frac{\partial f}{\partial t} = 0\end{aligned}$$

— вирт. переме

Пример 2 Точка на движущейся поверхности:



$$\begin{cases} d\vec r = (\vec u + \vec V)dt, \\ d\vec r' = (\vec u + \vec V')dt. \end{cases} \text{— возможные перемещ.} \Longrightarrow \underbrace{\delta \vec r = (\vec V - \vec V')}_{\text{вирт. перем}}$$

— док-во, как и в пример

В обоих рассмотренных примерах $\delta \vec r \perp \vec\nabla f$, т.

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial \vec r}\cdot \delta \vec r = \delta \vec r \cdot \vec \nabla f = 0,$$

виртуальные перемещения направлены по касательно к пов-ти, т.к. $\nabla f \perp$ поверхности, задаваемой ур-е

Рассмотрим систему N частиц с d голономны связями:

$$f_\alpha(\vec r, t) = 0 \Longrightarrow \delta f_\alpha = \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial f_\alpha}{\partial r_k}\cdot\delta \vec r_k = 0$$

$1 \le \alpha \le d$

$\vec r \overset{\text{def}}{=} (\vec r_1, \ldots, \vec r_N)$ — сразу весь комплекс коорд

Последние d-уравнений $\delta f_\alpha = 0$ для $\delta \vec r_k$ означаю что из $3N$ различных виртуальных перемещений выбрать $3N - d = f$ независимых, т.к. из указа ной системы уравнений можно выразить d вирт. перемещения через остальные $3N - d$.

В связи с рассмотренным вводят следующее определение числа степ. свободы системы.

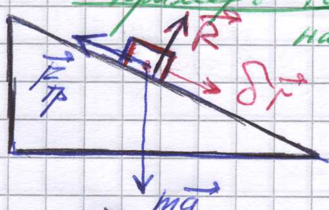
Определение Число степ. свободы — это максималь число независимых виртуальных перемещений.

Введём теперь понятие идеальных связей. Рассмотрим для этого систему N частиц с d связями:

$$f_\alpha(\vec r, t) = 0,\ 1 \le \alpha \le d.$$

Так как на систему наложены связи, то существую реакции $\vec R_i$ (силы реакции) этих связей, а уравн $2^{\text{го}}$ закона Ньютона имеют вид:

$$m_k\ddot{\vec{r}}_k = \underbrace{\vec{F}_k}_{\text{активные силы}} + \underbrace{\vec{R}_k}_{\text{силы реакции связей}}, \quad 1\leq k\leq N.$$



Пример: тело на накл. пл-ти.

Образуем сумму:

$$\sum\left(-m_k\ddot{\vec{r}}_k + \vec{F}_k\right)\cdot\delta\vec{r}_k = -\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\cdot\delta\vec{r}_k \qquad \vec{R}_{ид.св}\cdot\delta\vec{r} = 0.$$

Определение. Связи называются идеальными, если при любых виртуальных перемещениях работа сил реакций равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\cdot\delta\vec{r}_k = 0.$$

Так как виртуальные перемещения параллельные поверхностям, то силы реакции $\vec{R}_k$ связей, обусловленных этими поверхностями, перпендикулярны поверхностям (ограничивающими движение частиц).

§4. Принцип Д'Аламбера.

Опираясь на введенные в предыдущих разделах понятия, можно показать, что уравнения Ньютона для системы со связями эквивалентны некоторому принципу, получившему имя своего открывателя Д'Аламбера. Имеем для системы N частиц со связями:

$$\begin{cases} m_k\ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k + \vec{R}_k & \text{— 3N уравнений Ньютона} \quad (1)\\ f_\alpha(\vec{r},t) = 0, & \text{— d ур. связей} \quad (2)\\ \vec{r} \overset{def}{\equiv} (\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N),\ 1\leq\alpha\leq d. \end{cases}$$

Всего $3N+d$ уравнений для $6N$ неизвестных величин: $(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)$ и сил реакц. $(\vec{R}_1,\dots,\vec{R}_N)$

Неизвестных $\textcircled{6N}$ больше числа уравнений $\textcircled{3N+d}$.

Замечательно, что система сформулированных уравнений Ньютона + связей, имеет решения, причем, можно показать, эти решения определяются неоднозначно, т.к. система ур-ний не доопределена.

В случае идеальных связей выражение

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_k - m_k\ddot{\vec{r}}_k\right)\delta\vec{r}_k = -\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\cdot\delta\vec{r}_k = 0 \qquad (3)$$

В силу уравнений связей (2), d координат из $3N$ $(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_N)$ могут быть выражены через $3N-d$ остальных коорд. и подставлены в систему (3), после чего система (3) даёт еще $3N-d$ уравнений (по числу незав. вирт. перемещ.). Всего получается, таким образом

$$3N+d+3N-d = 6N$$

уравнений. Число ур-ний т.о., в случае налож. на сист. d ид. связей, совпадает с числом неизвестных. Получается, что ур-е Ньютона для системы N частиц с ид. связями эквивалентны соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\vec{F}_k - m\ddot{\vec{r}}_k\right)\delta\vec{r}_k = -\sum_{k=1}^{N}\vec{R}_k\cdot\delta\vec{r}_k = 0 \Rightarrow 3N-d \text{ ур.}$$

$$f_\alpha(\vec{r},t) = 0 \quad \alpha = 1,\dots,d \Rightarrow d\text{-уравнений.}$$

На основе провед. рассмотрения можно сформул. принцип Д'Аламбера