Лекция 19. Потенциалы для электромагнитного поля. Калибровочные преобразования потенциалов, калибровочная свобода и дополнительные условия на потенциалы. Уравнения магнитостатики. Формула Био-Савара-Лапласа и её применения к расчёту магнитостатических полей.

§1. Потенциалы для электромагнитного поля φ и $\vec{A}$. Калибровочные преобразования для потенциалов, условия калибровки.

Уравнения Максвелла для электромагнитных полей заряженных частиц в вакууме, как было показано в лекциях №1÷8 имеют вид:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\vec{j}}{\varepsilon_0 c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Из уравнения $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, используя соответствующие теоремы из матем. анализа заключаем, что существует векторное поле $\vec{A}(\vec{r},t)$, названное векторным потенциалом такое, что

$$\vec{B} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}].$$

Упражнение Убедитесь въявь, используя операции $\vec{\nabla}$ и $[\vec{\nabla}\times\vec{A}]$, что
$$\vec{\nabla}\cdot[\vec{\nabla}\times\vec{A}] = 0.$$

Подставляя выражение $\vec{B} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}]$ в уравнение $[\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ получим:

$$\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\right] = 0.$$

Опять же, используя соответствующие теоремы матем. анализа заключаем, что существует скалярный потенциал $\varphi(\vec{r},t)$ такой, что

$$\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \stackrel{def}{=} -\vec{\nabla}\varphi \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Итак поля $\vec{B}$ и $\vec{E}$, в силу уравнений Максвелла, могут быть выражены через скалярный $\varphi(\vec{r},t)$ и векторный $\vec{A}(\vec{r},t)$ потенциалы электромагнитного поля:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad \vec{B} = [\vec{\nabla}\times\vec{A}].$$

Так как $[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)] = 0$, то, очевидно, что векторный потенциал $\vec{A}(\vec{r},t)$ определяется неоднозначно, а именно, с точностью до градиента произвольной скалярной функции $\chi(\vec{r},t)$:

$$\vec{A}(\vec{r},t) \Rightarrow \vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) - \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t),$$

при этом

$$\vec{B}' = [\vec{\nabla}\times\vec{A}'] = [\vec{\nabla}\times \vec{A}-\vec{\nabla}\chi] = [\vec{\nabla}\times\vec{A}] = \vec{B}$$

магнитная индукция $\vec{B}'$, определяемая с помощью векторного потенциала $\vec{A}'$, совпадает с индукцией $\vec{B}=[\vec{\nabla}\times\vec{A}]$.

Очевидно также, что и скалярный потенциал $\varphi(\vec{r},t)$ также определён неоднозначно: при переходе от $\vec{A}$ к $\vec{A}'=\vec{A}-\vec{\nabla}\chi$ можно соответствующим образом изменить и скалярный потенциал $\varphi(\vec{r},t)$

$$\varphi(\vec{r},t) \Rightarrow \varphi'(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r},t) + \frac{\partial \chi(\vec{r},t)}{\partial t},$$

с помощью той же калибровочной функции $\chi(\vec{r},t)$, что и $\vec{A}$, при этом

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\varphi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\varphi - \cancel{\vec{\nabla}\frac{\partial \chi}{\partial t}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\chi} =$$

$$= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

поле $\vec{E}$ не изменяется!

Определение Преобразования потенциалов электромагнитного поля

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t), \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{\partial \chi(\vec{r},t)}{\partial t},$$

с произвольной, так называемой, калибровочной функцией $\chi(\vec{r},t)$ называются калибровочными преобразованиями. С такими преобразованиями связана калибровочная свобода в задании потенциалов $\varphi(\vec{r},t)$ и $\vec{A}(\vec{r},t)$.

Пользуясь калибровочной свободой, на потенциалы $\vec{A}$ и φ накладывают дополнительные условия, условия калибровки для потенциалов, например:

- Дополнительное условие Лоренца: $\nabla_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} =$
$$= \frac{\partial \varphi}{c^2 \partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0,$$
здесь введён 4х-вектор потенциала
$$A^\mu \stackrel{def}{=} \left(A^0 = \frac{\varphi}{c}, A^\alpha\right) = \left(\frac{\varphi}{c}, \vec{A}\right)$$
- Условие поперечной, так называемой кулоновской калибровки:
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0,$$ и т.д. — используются различные условия калибровки.

§2. Уравнения магнитостатики.

Уравнение Пуассона для векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r})$ и его решение для ограниченной в пространстве системы стационарных токов.

Полагая в общей системе уравнений Максвелла для полей $\vec{B}$ и $\vec{E}$ заряженных частиц в вакууме $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, получим две подсистемы уравнений, отдельно для стационарного поля $\vec{E}(\vec{r})$ и стационарного поля $\vec{B}(\vec{r})$:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \xrightarrow{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0} \quad \left\{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0\right.$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad \left\{\begin{array}{l}\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}\end{array}\right.$$

Здесь $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ — в системе СИ.

Вторая подсистема уравнений для поля $\vec{B}$ представляет собой уравнения магнитостатики и позволяет, при заданных токах, вычислять порождаемые этими токами стационарные магнитные поля:

Уравнения магнитостатики
$$\left\{\begin{array}{l}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}, \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0.\end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\oint\limits_{\Gamma=\partial(S)} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0\int\limits_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \mu_0 I \\ \oint \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0\end{array}}$$

Дифференц. форма — уравнения — Интегральная форма магнитостатики.

Вводя векторный потенциал $\vec\nabla\times\vec A=\vec B$, получаем уравнение для него следующего вида:

$$[\vec\nabla\times[\vec\nabla\times\vec A]] = \vec\nabla\cdot(\vec\nabla\cdot\vec A) - \vec\nabla^2\vec A = \mu_0\vec j,$$

последнее уравнение, пользуясь условием поперечной калибровки для $\vec A$,

$$\vec A \Rightarrow \vec A' = \vec A - \vec\nabla\chi,\quad \vec\nabla\cdot\vec A\neq 0 \Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec A' = -\vec\nabla^2\chi + \vec\nabla\vec A = 0$$

$$\Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec A' = 0$$ — всегда можно выполнить!

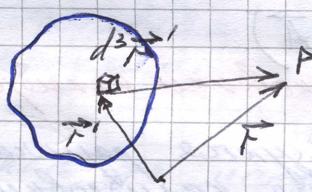
т.е. $\vec\nabla\cdot\vec A=0$, упрощается до уравнения Пуассона для векторного потенциала $\vec A$:

$$\Delta\vec A(\vec r) = -\mu_0\vec j(\vec r)$$ — Ур-е Пуассона для $\vec A$.

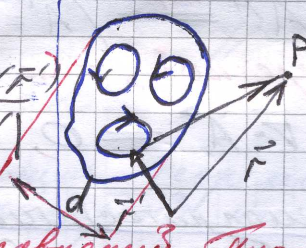
Из сравнения основных уравнений электростатики и магнитостатики, т.е.

Ур-е Пуассона электростатики $\boxed{\Delta\varphi(\vec r) = -\frac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0}}$, $\boxed{\Delta\vec A(\vec r) = -\mu_0\vec j(\vec r)}$ Ур-е Пуассона в магнитостатике

заключаем, что по аналогии с электростатическим случаем, уравнение Пуассона для системы стационарных токов, ограниченной в пространстве, имеет аналогичное частное решение:



$$\varphi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{d^3r'\,\rho(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$



$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{d^3r'\,\vec j(\vec r')}{|\vec r-\vec r'|}$$

Приведенные частные решения уравнений Пуассона при условиях

$$\varphi(\vec r)\Big|_{r\to\infty}\to 0,\qquad \vec A(\vec r)\Big|_{r\to\infty}\to 0,$$

т.е. граничных условиях с исчезающими на бесконечности потенциалами, задают физические поля $\vec E$ и $\vec B$ — стац. поля, ограниченных в пространстве распределений зарядов и токов.

§3. Мультипольное разложение для $\vec A(\vec r)$.

Для векторного потенциала $\vec A(\vec r)$ в магнитостатике в случае ограниченной в пространстве системы стационарных токов (как и в электростатике для $\varphi(\vec r)$) из выписанного решения уравнения Пуассона может быть получено так называемое мультипольное разложение.

Именно, разлагаем функцию $f(\vec r')\overset{def}{=}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}$ в ряд по степеням $\vec r'$:

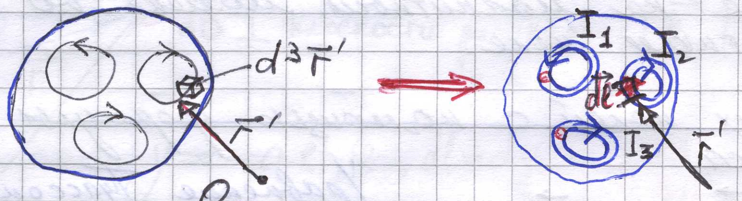
$$f(\vec r') = \frac{1}{|\vec r-\vec r'|} = f(0) + \frac{(\vec\nabla_{\vec r'}f(\vec r'))}{1!}\cdot\vec r' + \ldots = \frac1r + \left(\vec\nabla_{\vec r'}\frac{1}{|\vec r-\vec r'|}\right)\Big|_{\vec r'=0}\cdot\frac{\vec r'}{1!}+\ldots$$

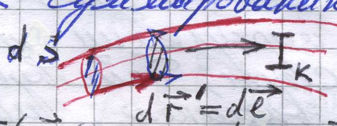
$$= \frac1r + \frac{\vec r\cdot\vec r'}{r^3}+\ldots,$$ здесь $r'\sim d\ll r$, d — размеры системы токов.

подставляя это разложение в решение ур-я Пуассона, находим:

$$\vec A(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int_V d^3r'\,\vec j(\vec r') + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int_V(\vec r'\cdot\vec r)\,d^3r'\,\vec j(\vec r')+\ldots$$

Далее, здесь и ниже, часто от объемного распределения токов будет осуществляться переход к суммированию по трубкам токов





$$d^3\vec r'\,\vec j(\vec r') = dS\,d\vec l\cdot \vec j = I_k\,d\vec r'$$

так что в мультипольном разложении для векторного потенциала

$$\vec A(\vec r) = \vec A_0(\vec r) + \vec A_1(\vec r) + \vec A_2(\vec r) + \dots \qquad \boxed{\left|A_{n+1}/A_n\right| \sim \frac{d}{r} \ll 1}$$

докажите!

получаем следующие выражение для $\vec A_0(\vec r)$ и $\vec A_1(\vec r)$, первых двух членов разложения $\vec A(\vec r)$:

$$\vec A_0(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi r}\int\limits_V d^3\vec r'\,\vec j(\vec r') = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{TT_k}\oint\limits_{\Gamma_k} I_k\,d\vec l_k = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_{TT_k} I_k \oint\limits_{\Gamma_k} d\vec l_k = 0,$$

$$\vec A_1 \stackrel{def}{=} \vec A_{дип}(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_{TT_k} I_k \oint\limits_{\Gamma_k}(\vec r\cdot\vec r')\,d\vec r' = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\int\limits_V \vec j(\vec r')(\vec r\cdot\vec r')\,d^3\vec r',$$

т.е. нулевой член разложения $\vec A_0(\vec r) \equiv 0$ тождественно равен нулю, а первый член разложения называемый дипольным, может быть преобразован следующим образом:

$$\vec A_{дип}(\vec r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_{TT_k} I_k\left(\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{1}{2}(\vec r'\cdot\vec r)\,d\vec r' - \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma_k}(d\vec r'\cdot\vec r)\,\vec r' + \underbrace{\oint\limits_{\Gamma_k}\left(\frac{1}{2}(\vec r'\cdot\vec r)\,d\vec r' + \frac{1}{2}(d\vec r'\cdot\vec r)\,\vec r'\right)}_{=\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma_k} d\left((\vec r'\cdot\vec r)\,\vec r'\right) = 0}\right) =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_{TT_k} I_k\,\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma_k}\left[\vec r\times[d\vec r'\times\vec r']\right] = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\sum_{TT_k} I_k\,\frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma_k}\left[[\vec r'\times d\vec r']\times\vec r\right]$$

$$\stackrel{def}{=} \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\vec p_m\times\vec r\right], \qquad \boxed{\vec p_m \stackrel{def}{=} \frac{1}{2}\sum_{TT_k} I_k\oint\limits_{\Gamma_k}[\vec r'\times d\vec r'] = \frac{1}{2}\int\limits_V[\vec r'\times\vec j(\vec r')]\,d^3\vec r'}$$

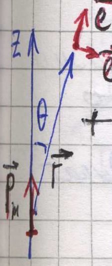
Магнитный дип. момент системы стац. токов.

Пример Магнитный момент петли с током:

$$\vec p_m = \frac{1}{2} I\oint[\vec r\times d\vec r] = IS\cdot\vec n$$

Задача Вычислите $\vec B_{дип} = [\vec\nabla\times\vec A_{дип}]$ магнитное поле дипольного момента

Решение:



$$\vec B_{дип} = [\vec\nabla\times\vec A_{дип}] = \vec\nabla\times\frac{[\vec p_m\times\vec r]}{4\pi r^3}\mu_0 = -\frac{3\mu_0}{4\pi r^5}\left[\vec r\times[\vec p_m\times\vec r]\right] +$$

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\vec\nabla\times[\vec p_m\times\vec r]\right] = -\frac{3\mu_0}{4\pi r^5}\left(\vec p_m r^2 - \vec r(\vec p_m\cdot\vec r)\right) + \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\vec p_m(\vec\nabla\cdot\vec r) - (\vec p_m\cdot\vec\nabla)\vec r\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\left(3\vec r(\vec p_m\cdot\vec r) - r^2\vec p_m\right)}{r^5}$$

Вычислите также $B_r = \frac{\vec r\cdot\vec B}{r}$, $B_\theta = \vec e_\theta\cdot\vec B$.