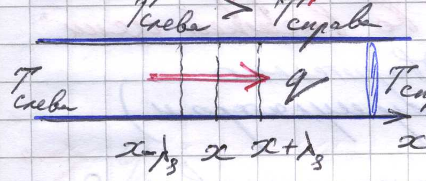
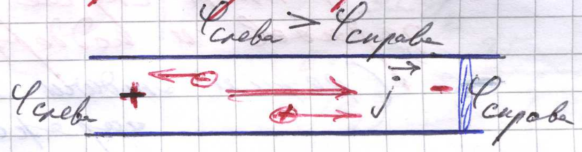
Лекция 18 Электрический ток, как явление переноса. Энергетические превращения в цепи постоянного тока. Токи в протяжённых средах. Моделирование электростатических полей. Сопротивление заземления

§1. Электрический ток, как явление переноса.

Электрический ток, как и теплопроводность, является явлением переноса. Между соответствующими величинами, потоком тепла, при наличие градиента температуры, и плотностью электрического тока, при наличии градиента потенциала, существует тесная связь, так, что коэффициент теплопроводности $\varkappa$ выражается через электропроводность σ — электрическую проводимость.





$$q = -c_{уд}\cdot m\frac{1}{6}n\bar{v}\cdot 2\lambda_з\frac{dT}{dx} = -\varkappa\frac{dT}{dx}$$

$$\varkappa = c_{уд}\cdot m\frac{1}{3}n\bar{v}\lambda_з = \frac{C_{V мол}}{N_A\cdot \cancel{m}}\cdot\cancel{m}\cdot n\bar{v}\frac{\lambda_з}{3} = \frac{\cancel{\frac{3}{2}}\cancel{N_A}k_Б}{\cancel{N_A}}\cdot\frac{n m\bar{v}^2}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}\lambda_з}{m\bar{v}\cdot \cancel{3}} = nk_Б\cdot\frac{m\bar{v}^2}{2}\cdot\frac{\tau_з}{m} = \frac{3}{2}nk_Б^2\frac{\tau_з}{m}T$$

$\lambda_з$ — длина своб. пробега,

$\tau_з$ — время своб. пробега

$$j = \sigma E = -\frac{nq^2\tau}{m}\frac{d\varphi}{dx} = -\sigma\frac{d\varphi}{dx}$$

$$\sigma = \frac{nq^2\tau_з}{m}$$

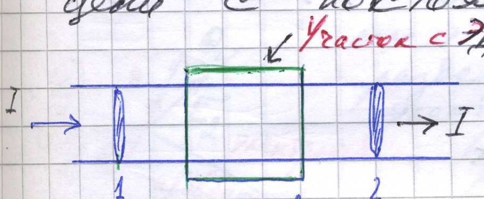
$$\Rightarrow \boxed{\frac{\varkappa}{\sigma} = \frac{3}{2}\left(\frac{k_Б}{q}\right)^2 T}$$

Закон Видемана–Франца.

$\lambda_з/\bar{v} = \tau_з$, $\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3k_БT}{2}$

§2. Энергетические превращения в цепи постоянного тока

Проследим за энергетическими превращениями на участке цепи с постоянным током. Согласно закону Ома для участка цепи, содержащего ЭДС:



$$I\cdot R_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = IR_{12} - \mathcal{E}_{12}$$

Работа электрического тока на участке цепи равна, по определению, работе сил поля по перемещению заряда $q = It$:

$$A_{\substack{эл.тока\\ за\ время\ t}} = I\cdot t(\varphi_1-\varphi_2) = I^2R_{12}t - \mathcal{E}_{12}I\cdot t$$

Вышенаписанная формула как раз и отражает энергетические превращения на участке цепи. Рассмотрим частные случаи полученного соотношения.

$$A_{эл.тока} = It(\varphi_1-\varphi_2) = I^2R_{12}t - \mathcal{E}_{12}It$$

(А) $\mathcal{E}_{12}=0 \Rightarrow A_{эл.тока} = I^2R_{12}t = \Delta Q$ — Закон Джоуля-Ленца

Работа эл. тока в данном случае идёт на тепловые потери в рассматриваемом участке.

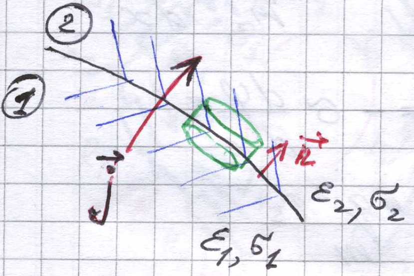
(Б) $R_{12}=0,\ \varphi_1>\varphi_2 \Rightarrow It(\varphi_1-\varphi_2) = -\mathcal{E}_{12}It>0 \Rightarrow \mathcal{E}_{12}<0$

ЭДС в данном случае работает в режиме подзарядки. (в таком режиме заряжают аккумуляторы)

(В) $R_{12}=0,\ \varphi_1<\varphi_2 \Rightarrow It(\varphi_1-\varphi_2) = -\mathcal{E}_{12}It<0 \Rightarrow \mathcal{E}_{12}>0$

ЭДС в данном случае работает в режиме разделения зарядов и поддерживает ток во внешней цепи (режим отдачи энергии предварительно заряженным аккумулятором).

§3. Токи в протяженных средах. Граничные условия для полей при наличии постоянных токов.



При наличии постоянных электрических токов в протяженных средах с различными, соприкасающимися друг с другом материалами, с различными диэлектрическими проницаемостями и проводимостями в дополнение к граничным условиям

$$D_{2n}-D_{1n}=\sigma_{своб},\quad E_{2\tau}=E_{1\tau}$$

появляется новое, дополнительное, граничное условие на нормальную составляющую электрического поля. Это условие легко получить из уравнения $\nabla\cdot\vec j=0$

$$\nabla\cdot\vec j=0 \Leftrightarrow \oint\vec j\,d\vec S\Big|_{h\to 0} = (j_{2n}-j_{1n})\Delta S = \Delta S(\sigma_2E_{2n}-\sigma_1E_{1n}) = 0$$

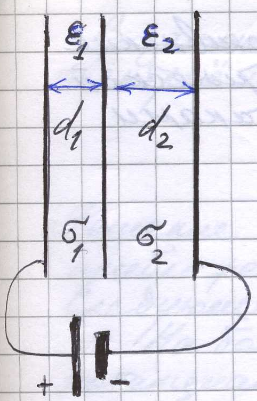
$$\vec j=\sigma\vec E$$

На границе раздела двух сред имеем, таким образом, следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \sigma_1E_{1n}=\sigma_2E_{2n}, \\ \varepsilon_0\varepsilon_2E_{2n}-\varepsilon_0\varepsilon_1E_{1n}=\sigma_{своб}. \end{cases}$$

Выполнение этих условий возможно как раз при $\sigma_{своб}\neq 0$, т.е. при протекании через границу раздела двух материалов электрического тока, в стационарном режиме на границу раздела натекает заряд $\sigma_{своб}$ и сохраняется на этой границе.

Для иллюстрации применения выписанных граничных условий рассмотрим протекание электрического постоянного тока через плоский конденсатор, заполненный двумя слоями диэлектриков с $(\varepsilon_1;\sigma_1)$ и (ε_2,σ_2).



Пусть к плоскому конденсатору с двумя слоями диэлектриков, обладающих (некоторыми) проводимостями σ_1 и σ_2, приложено напряжение U. Определим поля E_1 и E_2 в слоях диэлектриков и заряд $q = \sigma S$, который натекает на границу раздела диэлектриков, в режиме постоянного тока.

Исходим из системы уравнений:

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = U, \Leftarrow \int \vec{E}\, d\vec{l} = -\int \vec{\nabla}\varphi\, d\vec{l}$$

$$\sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2.$$

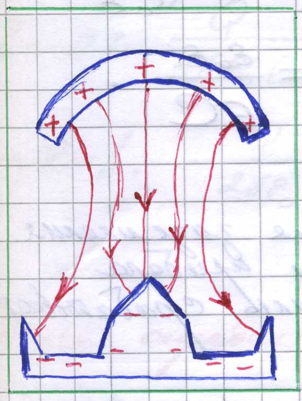
$$\Rightarrow E_1 d_1 + \frac{\sigma_1 E_1}{\sigma_2} d_2 = U \Rightarrow \begin{cases} E_1 = \dfrac{U}{d_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} d_2}, \\ E_2 = \dfrac{E_1}{(\sigma_2/\sigma_1)} = \dfrac{U}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} d_1 + d_2}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_{\text{между диэл}} = \sigma S = (\varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1) S =$$

$$= S\left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 U}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} d_1 + d_2} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 U}{d_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} d_2}\right) = S\frac{\varepsilon_0 U(\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1)}{\sigma_2 d_1 + d_2 \sigma_1} \neq 0$$

Лишь при специальном условии $\sigma_1 \varepsilon_2 = \sigma_2 \varepsilon_1$ заряд на границу раздела диэлектриков не натекает.

§4 Моделирование электростатических полей с помощью токовых линий электролитической ванны.



При создании физических установок со сложным рельефом электростатических полей между различными частями этих установок оказывается проще промоделировать такие поля, нежели реально их рассчитать, решая уравнение Лапласа с граничными условиями.

Принцип моделирования электростатических полей заключается в следующем. Установку погружают в электролитическую ванну, между электродами подают напряжение, которое приводит к стационарным постоянным токам. На границе раздела проводящей части прибора с σ_1 и электролита с $\sigma_2 \ll \sigma_1$ должны выполняться граничные условия:

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}, \text{ т.е.}$$

$$\sigma_1 E_1 \cos\theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos\theta_2, \quad E_1 \sin\theta_1 = E_2 \sin\theta_2$$

Силовые линии поля $\vec{E}$ в электролите параллельны токовым линиям, т.к. $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$\sigma_1 \operatorname{ctg}\theta_1 = \sigma_2 \operatorname{ctg}\theta_2, \quad \text{при } \sigma_1 \gg \sigma_2$$

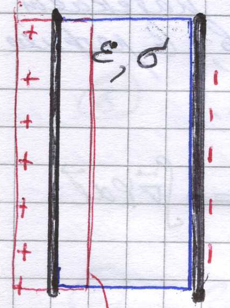
$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\theta_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \operatorname{ctg}\theta_2 \xrightarrow[\sigma_2 \ll \sigma_1]{} 0, \quad \theta_1 \to \frac{\pi}{2}$$

Более того, силовые линии $\vec{E}$ подходят к проводящим частям перпендикулярно!

$$\theta_1 \sim \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 \ll \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 \sim 0^\circ$$

Токовые линии с хорошей точностью моделируют электростатическое поле.

В заключение данного раздела вычислим сопротивление диэлектрика с проводимостью σ и диэлектрической проницаемостью ε, заключенного между пластинами конденсатора:



S - Гауссова поверхность

$$I = jS = \sigma E S = \sigma \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} S = \sigma \frac{\oint \vec{D}\cdot d\vec{S}}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{U}{I} = \frac{Q}{CI} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma C}}$$

Поучительно также получить закон, по которому изменяется заряд $Q(t)$ на обкладке конденсатора при его разрядке через проводящий диэлектрик. Имеем согласно закону сохранения электрического заряда:

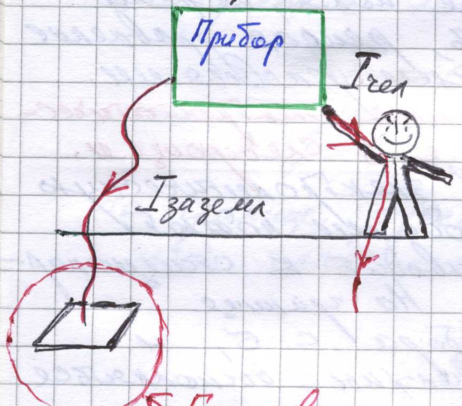
$$dQ = -jS\,dt = -\sigma E S\,dt = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} D S\,dt = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} Q\,dt \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q(0)\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} t}, \quad I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0 \sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} t} = -\frac{Q(t)\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = -\frac{U \sigma C}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{Q\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

тот же результат, что и выше $\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma C}$.

§5. Сопротивление заземления.



Гауссова поверхность - S

Поясним принцип действия заземления. При коротком замыкании прибора через человека на Землю срабатывает и заземление, при этом

$$I_{зазем} R_{зазем} = I_{чел} R_{чел}$$

$$\Rightarrow I_{чел} = I_{зазем} \frac{R_{зазем}}{R_{чел}}.$$

Ясно, что $R_{зазем}$ должно быть достаточно мало, чтобы $I_{чел} \ll I_{зазем}$.

Обычно заземление устраивают, закапывая в Землю, на достаточную глубину, металлическую пластину. Сопротивление заземления может быть выражено через электроёмкость пластины следующим образом. Вычислим электрич. ток через заземление, используя замкнутую Гауссову поверхность, показанную на рисунке:

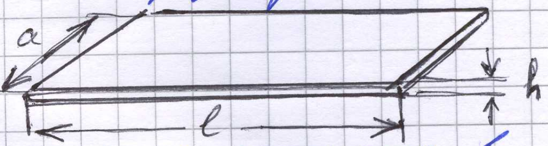
$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = I_{зазем} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma Q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \Rightarrow R_{зазем} = \frac{U}{I} = \frac{\cancel{Q}\varepsilon_0 \varepsilon}{C \sigma \cancel{Q}}$$

$$\left(\vec{j} = \sigma \vec{E} = \sigma \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_{зазем} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma C}}$$

В заключение этого раздела рассчитаем, т.е. оценим, электроёмкость проводящей плиты с размерами

$$l \gg a \gg h$$



Решение задачи будет носить приближенный, т.е. оценочный характер, и заключается в следующем.

На больших расстояниях от плиты, т.е. при $r \gg l$, потенциал плиты с зарядом Q, есть потенциал точечного заряда:

$$r \gg l: \quad \varphi(r) \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

На расстояниях от плиты $l \gg r \gg a$ плиту можно представить себе как тонкую нить, потенциал которой имеет вид ($\varkappa = \frac{Q}{l}$ — линейная плотность заряда нити):

$$a \ll r \ll l: \quad \varphi(r) = -\frac{Q}{l\,2\pi\varepsilon_0}\ln r + C_1, \quad C_1 \text{ — некот. константа.}$$

Наконец, при $r \ll a$, плиту можно заменить на бесконечную плоскость с плотностью заряда $\sigma = \frac{Q}{al}$ и с потенциалом:

$$r \ll a: \quad \varphi(r) = -\frac{Qr}{al\,2\varepsilon_0} + C_2, \quad C_2 \text{ — также некот. константа}$$

Потенциалы $\varphi(r)$ на границах областей, т.е. при $r\sim l\sim a$ и $r\sim a\sim h$ необходимо сшить, что приводит к уравнениям для определения констант C_1 и C_2:

$$r\sim l\sim a: \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} \simeq -\frac{Q}{l\,2\pi\varepsilon_0}\ln l + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{Q}{l\,2\pi\varepsilon_0}\ln l$$

$$r\sim a\sim h: \quad -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln a + C_1 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln a + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln l + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} =$$

$$= -\frac{Q}{2\varepsilon_0 l} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{Q}{l\,2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{l}{a} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{Q}{2\varepsilon_0 l}$$

Далее определяем потенциал самой пластины, т.е. $\varphi(r=0)$:

$$\varphi_{\text{пласт.}} = \varphi(0) = C_2 = Q\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{1}{2\varepsilon_0 l}\right),$$

а затем находим и электроёмкость пластины, как уединенного проводника:

$$C \cong \frac{Q}{\varphi(0)} \cong \frac{1}{\frac{1}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l}{a} + \frac{1}{2\varepsilon_0 l}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{l}{a} + \pi}$$

и сопротивление заземления, устроенного с помощью данной металлической плиты:

$$\boxed{R_{\text{заземл}} \simeq \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma C} = \frac{\varepsilon\left(\ln\frac{l}{a} + \pi\right)}{2\pi l\cdot\sigma}}$$

$l \gg a$ — размеры плиты, σ — проводимость и ε — диэл. проницаемость грунта, куда закапывается плита.