Лекция 18–19 **Динамика и энергетика вращательного движения твердого тела. Законы динамики в неинерциальных системах отсчёта; силы инерции — центробежные и Кориолиса.**
Гироскопы и их применение.

§1. Лемма о производной по времени постоянного по модулю вектора.

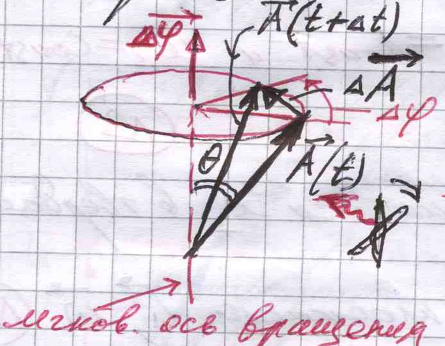
Рассмотрим абстрактно некоторую векторную величину $\vec{A}(t)$, которая зависит от времени, но модуль этой величины постоянен:

$$\vec{A}^2(t) = const \xrightarrow[\text{по времени}]{\text{дифференцируем}} \frac{d\vec{A}^2(t)}{dt} = 2\vec{A}(t)\cdot\dot{\vec{A}}(t) = 0$$

заключаем, что

$$\dot{\vec{A}} \perp \vec{A}.$$

Так как модуль $|\vec{A}(t)| = const$, то вектор $\vec{A}(t)$, оставаясь по модулю (длине) постоянным, может только вращаться. Рассмотрим поворот $\vec{A}(t)$ вокруг мгновенной оси вращения на элементарный угол $\Delta\varphi$:



Ясно, что

1) $$|\Delta\vec{A}| = |\vec{A}|\sin\theta\,\Delta\varphi \quad (*)$$

можно сообразить, что с учетом направления

2) $$\Delta\vec{A} = [\Delta\vec{\varphi}\times\vec{A}], \quad (**)$$

поворачивая правовой винт рукояткой вдоль $\Delta\vec{\varphi}$ к положению рукоятки вдоль $\vec{A}$, как раз и получаем требуемое направление:

$$\Delta\vec{A} \uparrow\uparrow [\Delta\vec{\varphi}\times\vec{A}],$$

кроме того, по определению модуля векторного произведения

$$|[\Delta\vec{\varphi}\times\vec{A}]| = |\Delta\vec{\varphi}||\vec{A}|\sin\theta \text{ —}$$

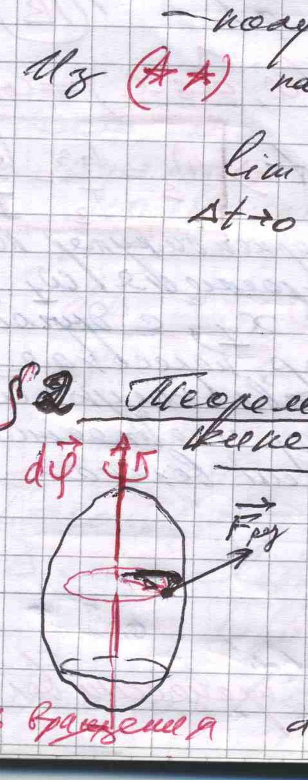
— получается в точности (*), требуемый результат.

Из (**) находим в пределе $\Delta t\to 0$:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}\times\vec{A}\right] = [\vec{\omega}\times\vec{A}]$$

$$\boxed{\frac{d\vec{A}}{dt} = [\vec{\omega}\times\vec{A}]}$$ — это и есть теорема о производной по времени векторной величины

§2. Теорема о приращении кинетической энергии вращающегося твердого тела.



При повороте тв. тела (для простоты, с фикс. осью вращения) на угол $d\vec{\varphi}$ силой $\vec{F}$ совершается элементарная работа:

$$dA = \vec{F}_{рез}\cdot d\vec{r} = \vec{F}_{рез}\cdot[d\vec{\varphi}\times\vec{r}] = d\vec{\varphi}\cdot[\vec{r}\times\vec{F}_{рез}]$$

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}\times\vec{r}]$ — согласно (*), см. выше

В последней формуле использовалось известное свойство смешанного произведения векторов

$$\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{b}\cdot[\vec{c}\times\vec{a}] \Rightarrow \vec{F}_{\text{ру}}\cdot d\vec{r} = \vec{F}_{\text{ру}}\cdot[d\vec{\varphi}\times\vec{r}] = d\vec{\varphi}\cdot[\vec{r}\times\vec{F}_{\text{ру}}]$$

Итак,

$$dA = d\vec{\varphi}\cdot[\vec{r}\times\vec{F}_{\text{ру}}] = d\vec{\varphi}\cdot\vec{M}_{\text{ру}} = I\,d\vec{\varphi}\cdot\vec{\varepsilon},$$

здесь использовался также закон динамики вращат. движения тв. тела:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{тв.т}}}{dt} \overset{\vec{L}=I\vec{\omega}}{=\!=\!=} I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\cdot\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{\text{ру}} = [\vec{r}\times\vec{F}_{\text{ру}}].$$

Имеем, таким образом,

$$dA = I\varepsilon\,d\varphi = I\frac{d\omega}{dt}\cdot\omega\,dt = I\omega\,d\omega,$$

откуда заключаем, что при раскрутке тв. тела от угловой скорости ω_1 до ω_2 совершается работа:

$$\Delta A_{\text{ру. момента силы}} = \Delta A^{(\text{ру. мом.})}_{\omega_1\to\omega_2} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\,d\omega = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$$

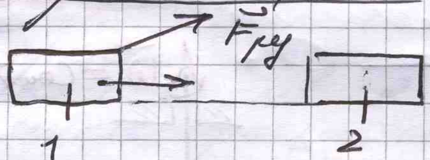
Это и есть теорема о изменен. кинетич.

$$\boxed{\Delta A^{\text{ру. мом. сил}}_{\omega_1\to\omega_2} = K_2 - K_1 = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}}$$

энергии вращат. дв. тв. тела (с фиксиров. осью вращения).

Имеет место замечат. аналогия соотв. теорем для поступат. и вращат. движений:

Поступат. движение | Вращат. движение



$$\Delta A^{\text{ру. силы}}_{1\to 2} = K_2^{\text{поступ.}} - K_1^{\text{поступ.}} \qquad \Delta A^{\text{ру. мом.}}_{\omega_1\to\omega_2} = K_2^{\text{вр. дв}} - K_1^{\text{вр. дв}}$$

$$= \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad = \frac{I\omega_2^2}{2} - \frac{I\omega_1^2}{2}$$

$$K_{\text{поступ}} = \frac{m\vec{V}^2}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad K_{\text{вр. дв}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

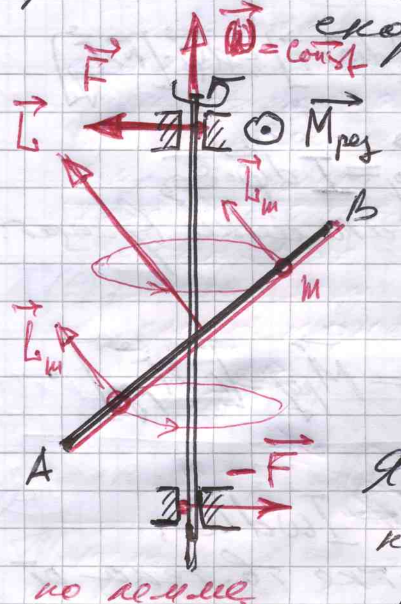
m — мера инертности $\Longleftrightarrow$ I — мера инертности к вращат. движению

$$\vec{V} \quad\Longleftrightarrow\quad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

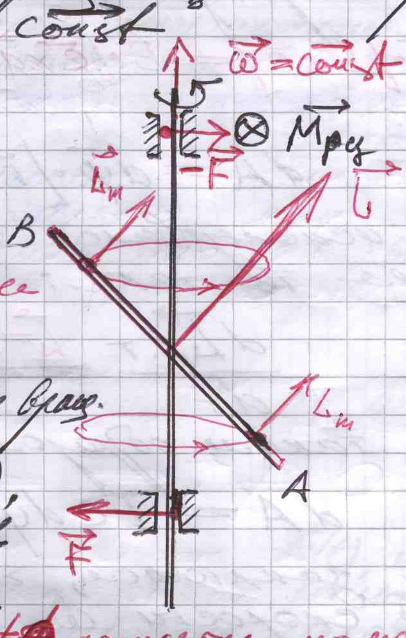
§3. Понятие о своб. осях вращения твердого тела.

Рассмотрим несколько простых примеров, которые приведут нас к определению свободных осей вращения твердого тела. Такие оси, как раз совпадают с главными осями для твердого тела, в системе которых тензор инерции диагонален $I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

Пример 1 Стержень, закреплённый на фиксированной оси вращения, вращающийся с угловой скоростью $\vec\omega = const$



$\vec L_{тв.т.} = \sum \vec L_m$ — момент импульса стержня AB, несимметрично закрепл. на оси вращ.



Ясно, что $\vec L = \vec L(t)$,

но $\vec L^2(t) = const$

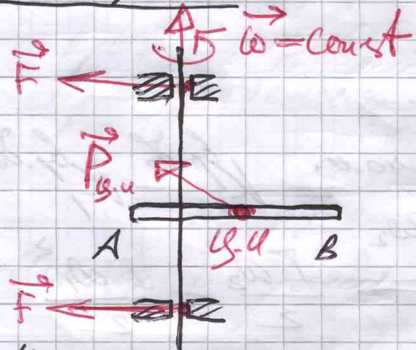
по лемме

$\dot{\vec A} = [\vec\omega \times \vec A]$

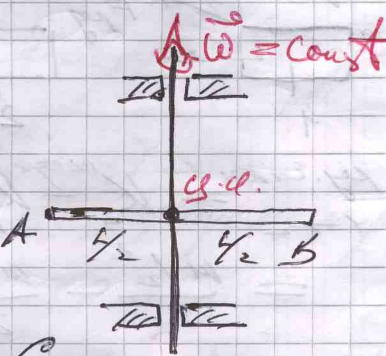
$$\frac{d\vec L}{dt} = [\vec\omega \times \vec L] = \vec M_{рез}$$ — результ. момент сил, действующих на ось со стороны подшипников. (NB)

В рассмотренном примере со стороны подшипников на ось вращения действует пара сил $\vec F$, ось вращения из-за несимметричного закрепления стержня AB, не является свободной, на неё действует момент пары сил $\vec F$ и $-\vec F$, причём направление этого момента сил с течением времени изменяется, см. внимательно на приведённые рисунки, левый и правый, вверху на странице.

Пример 2



Согласно лемме:
$\dot{\vec A} = [\vec\omega \times \vec A]$



Несимметричное закрепление AB-стержня

$$\frac{d\vec P_{ц.и}}{dt} = [\vec\omega \times \vec P_{ц.и}] = \vec F$$

Симметричное закрепление стержня AB,

$$\frac{d\vec P_{ц.и}}{dt} = [\vec\omega \times \vec 0] = \vec F_{рез} = 0$$

Из приведённых четырёх рисунков лишь рисунок в нижнем правом углу соответствует свободной оси вращения тв. тела

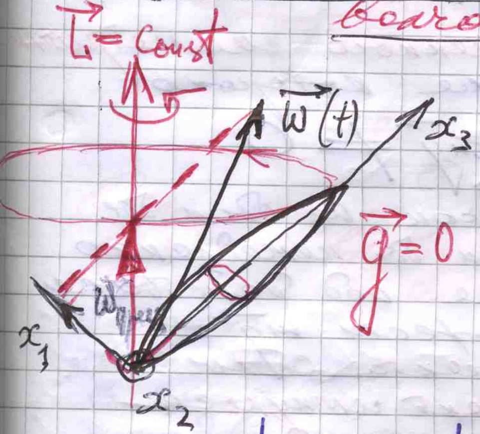
Определение Ось, относительно которой вращение тв. тела с $\vec\omega = const$ происходит без действия сил (не сопровождается действием сил со стороны подшипников), $\vec\omega = const$, поддерживается без принуждения, называется свободной осью вращения тв. тела.

На поддержание вращения с $\vec\omega = const$ не требуется сил (NB)

§4. Понятие о приближенной теории тяжелого симметричного волчка.

Покажем, как приближенно описывается движение уже не свободного, а так называемого тяжелого симметричного волчка, т. е. волчка, находящегося, например, в поле тяжести Земли. Для сравнения приведём две картинки, соответствующие свободному и тяжелому симметричным волчкам:

Свободный симметричный волчок

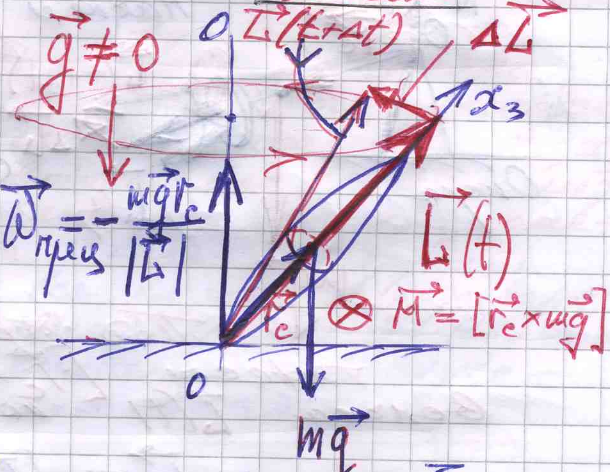


$$\omega_{прец.} = \frac{L}{I_1} = const$$

$$\omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_3} = const$$

Результаты теории свободного симметричного волчка

Тяжелый симметричный волчок



В поле тяжести Земли одним своим концом симметричный волчок опирается на горизонтальную поверхность. Волчок сильно закручен вокруг оси симметрии Ox_3 и имеет момент импульса $\vec{L}(t)$ относительно этой оси.

Приближенная теория тяжелого симметричного волчка состоит в следующем. Согласно закону динамики вращательного движения твердого тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{тяж} = [\vec{r}_c \times m\vec{g}]$$ — момент силы тяжести, стремящейся опрокинуть волчок

$$\rightarrow \Delta\vec{L} = [\vec{r}_c \times m\vec{g}]\cdot\Delta t = \vec{L}(t+\Delta t) - \vec{L}(t)$$ — направлен по касательной к окружности на рисунке справа,

вектор $\vec{L}(t)$, получая приращение $\Delta\vec{L}$, как бы поворачивается вокруг вертикальной оси OO.

Считаем далее, что $|\vec{L}(t)| \simeq const$ — по модулю $\vec{L}(t)$ не изменяется (волчок сильно закручен), меняет лишь свое направление. Далее записываем:

$$\vec{r}_c = \frac{\vec{L}(t)}{L}\cdot r_c, \quad [\vec{r}_c \times m\vec{g}] = \left[-\frac{m\vec{g}r_c}{|\vec{L}|} \times \vec{L}\right],$$

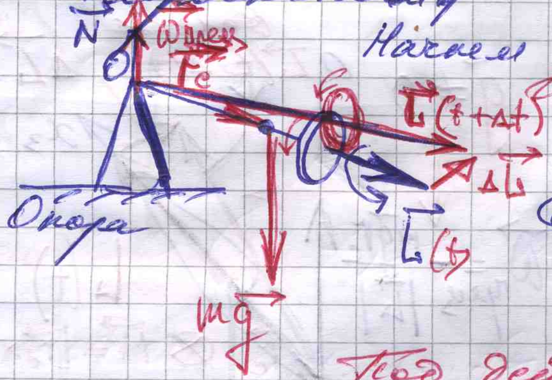
поэтому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \simeq \left[-\frac{m r_c \vec{g}}{|\vec{L}|} \times \vec{L}\right] \xrightarrow[\dot{\vec{A}} = [\vec{\omega} \times \vec{A}]]{\text{по лемме}} \vec{\omega}_{прец.} \simeq -\frac{m\vec{g}r_c}{|\vec{L}|}$$

§5. Понятие о гироскопах.

Приведённая выше теория (приближенная) тяжелого симметричного волчка подводит нас к интересным приложениям таких волчков, реализуемым в виде гироскопов.

Определение: Осесимметричное твердое тело (симметричный волчок), сильно закрученное вокруг своей оси симметрии, так что ось вращения сохраняет направление в пространстве, называется гироскопом.



Начнем с неуравновешенного симметричного волчка, для которого

$$\vec F_{рез} = \vec N + m\vec g \neq 0$$

Если бы волчок не был бы закручен он бы немедленно опрокинулся под действием силы тяжести $m\vec g$.

Под действием момента силы тяжести $[\vec r_c \times m\vec g]$ момент импульса волчка $\vec L(t)$ получает приращение

$$\Delta\vec L = [\vec r_c \times m\vec g]\cdot\Delta t \simeq \left[-\frac{r_c m\vec g}{|\vec L|} \times \vec L\right]$$

— волчок не опрокидывается! Он прецессирует вокруг вертик оси с $\vec\omega_{прец} = -r_c m\vec g/|\vec L|$.

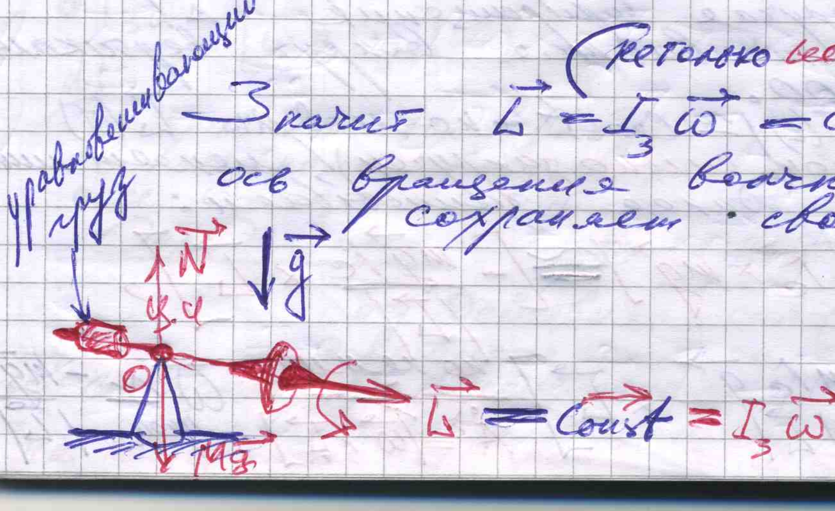
Неуравновешенный симметричный волчок можно уравновесить, продлив его ось за точку опоры O, и закрепив на этой оси уравновешивающий груз так, чтобы опрокидывание волчка не было и $\vec F_{рез} = 0$. Для такого уравновешенного волчка

$$\frac{d\vec L}{dt} = \vec M_{рез} = 0 = [\vec r_c \times \vec F_{рез}] = [\vec 0 \times \vec 0] =$$

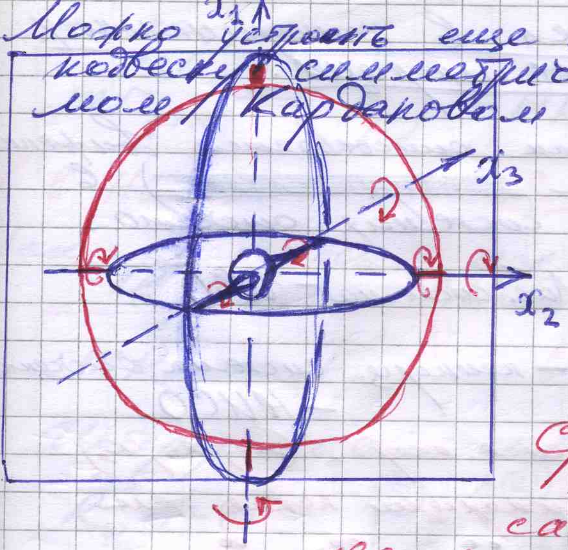
Центр инерции попадает в точку опоры, кроме того $\vec F_{рез} = 0$

$\Rightarrow \vec L = Const \to$ в таком случае момент импульса волчка будет сохранять постоянное (не только по модулю) значение!

Значит $\vec L = I_3\vec\omega = Const$ и ось вращения волчка (уравновешенного) сохраняет свое направление в пр-ве!



Можно устроить еще более изощренную и остроумную подвеску симметричного волчка — в так называемом Кардановом подвесе, состоящем из трёх вложенных последовательно, начиная с внутреннего колец.



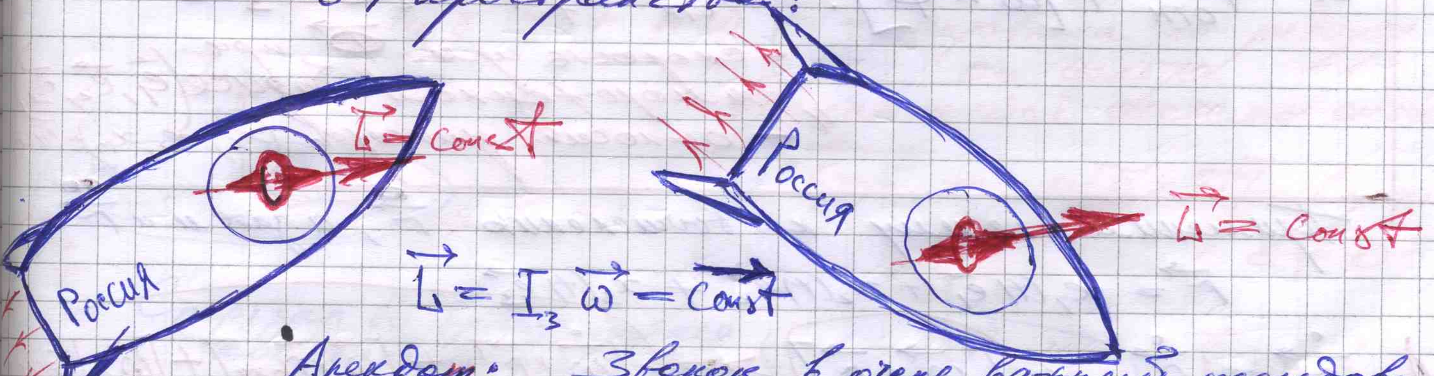
Гироскоп (симметричный) волчок вращается вокруг оси X_3 в кольце минимального радиуса. Это кольцо, в свою очередь, может вращаться вокруг оси X_2 в среднем кольце. Среднее кольцо может вращаться вокруг оси x_1 в кольце самого большого диаметра. Центр инерции системы точно попадает в точку пересечения осей x_1, x_2, x_3. Оси x_1, x_2, x_3 являются свободными (главными) осями вращения симметричного волчка, помещенного в центр устройства. Вся конструкция собирается в некое ящике, все вместе и называют одним словом — гироскоп. Симметричный волчок в центральном кольце минимального радиуса — ядро гироскопа, для этого волчка

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 = \vec{M}_{ру} \longrightarrow \vec{L} = const.$$

Как бы не перемещался контейнер-ящик гироскопа в пр-ве, благодаря особой подвеске, всегда

$$\vec{L} = const.$$

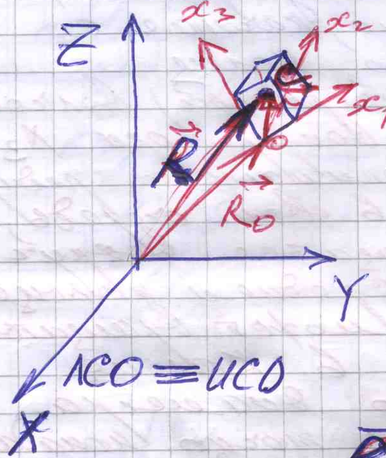
Ось гироскопа сохраняет своё направление в пространстве! NB NB и может, следовательно, использоваться для ориентации самолётов, спутников, ракет, крылатых ракет, космических кораблей, подводных лодок и т.д. в пространстве:



О важности прикладных исследований, по гироскопам, в частности.

Анекдот: Звонок в очень важный исследовательский институт (очень секретный)
— Это институт по ориентации космических кораблей в пр-ве?
— Да! — Позовите Машу уборщицу к телефону.
→ Начальник первого отдела уволен. Институт из Подмосковья перевели в тундру. Снова звонок
— Это институт по ориентации космических кораблей в пр-ве? — Да! — Позовите к тел. Машу уборщицу!
— Нового начальника первого отдела снова уволили. Институт перевели в Заполярье поближе к Северному полюсу.
→ Снова звонок — Это институт ... и т.д.

§ 6. Об описании движений тел в неинерциальных системах отсчёта. Силы инерции.



Покажем, как описывается движение мат. тела ~~.......~~ в неинерц. системах отсчёта.

(X, Y, Z) — лаб. система — ИСО

(x_1, x_2, x_3) — неинерц. система отсчёта — НИСО.

(·) O — начало сист. коорд. (x_1, x_2, x_3)

(·) C — центр инерции некот. тела

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} \Longrightarrow \ddot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}}_0 + \ddot{\vec{r}}$$

в ИСО (X, Y, Z): $\quad m\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{рез}$

в НИСО (x_1, x_2, x_3): (A) $m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{R}} - m\ddot{\vec{R}}_0 = \vec{F}_{рез} - m\ddot{\vec{R}}_0$

Вопрос заключается в вычислении $\ddot{\vec{r}}$, $\vec{r}$ — рад. вектор ц.и. отн. (x_1, x_2, x_3)

Лемма Пусть задана векторная величина $\vec{\Phi}(t) = \Phi_1(t)\vec{e}_1 + \Phi_2(t)\vec{e}_2 + \Phi_3(t)\vec{e}_3$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ системы НИСО (x_1, x_2, x_3)

Тогда

$$\dot{\vec{\Phi}} = \dot{\Phi}_1(t)\vec{e}_1 + \dot{\Phi}_2(t)\vec{e}_2 + \dot{\Phi}_3(t)\vec{e}_3 + \Phi_1 \cdot \dot{\vec{e}}_1 + \Phi_2\dot{\vec{e}}_2 + \Phi_3\dot{\vec{e}}_3 =$$

$$= \dot{\vec{\Phi}}_{отн} + \Phi_1[\vec{\omega}\times\vec{e}_1] + \Phi_2[\vec{\omega}\times\vec{e}_2] + \Phi_3[\vec{\omega}\times\vec{e}_3] =$$

$$= \dot{\vec{\Phi}}_{отн} + [\vec{\omega}\times\vec{\Phi}].$$

$\dot{\vec{\Phi}}_{отн} = \dot{\Phi}_1\vec{e}_1 + \dot{\Phi}_2\vec{e}_2 + \dot{\Phi}_3\vec{e}_3$ — скорость изм. $\vec{\Phi}$ при „замороженном" базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — относит. „динамиков" (x_1, x_2, x_3)-сист.

Применим лемму к вычислению $\dot{\vec{r}}$, а затем и $\ddot{\vec{r}}$.

$$\vec{r} = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + x_3(t)\vec{e}_3$$

1) $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_{отн} + [\vec{\omega}\times\vec{r}] \longrightarrow [\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}] + [\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$

2) $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{отн} + [\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}] + \cancel{[[\vec{\omega}\times\vec{r}]\times\vec{r}]}$

$$+ [\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$$

$$\Longrightarrow \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{отн} + 2[\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}] + [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$$

Подставляя последнюю формулу в закон Ньютона (A) получаем:

$$\boxed{m\ddot{\vec r}_{отн}} = \vec F_{ру} \underbrace{- m\ddot{\vec R}_0 - m[\dot{\vec\omega}\times\vec r] - 2m[\vec\omega\times\dot{\vec r}_{отн}] - m[\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]]}_{\text{NB Силы инерции NB}}$$

в НИСО

Так изменилась форма исходного закона Ньютона в ИСО ≡ ЛИСО – лабораторной инерциальной системе отсчета.

$$\boxed{m\ddot{\vec R} = \vec F_{ру}} \text{ – в ЛИСО}$$

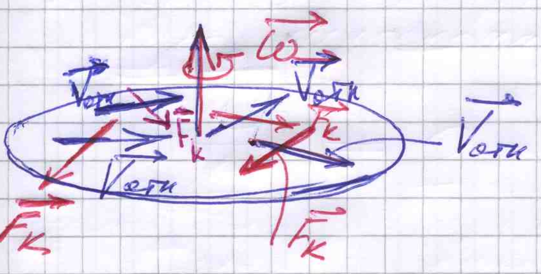
Интерпретация сил инерции.

1°. $\ddot{\vec R}_0 \neq 0$

$\vec F_{ин} = -m\ddot{\vec R}_0$

в K', движущейся с $\ddot{\vec R}_0$ относит. K появляется сила инерции $-m\ddot{\vec R}_0$

2°. Силы Кориолиса



$\vec F_K = -2m[\vec\omega\times\vec V_{отн}]$

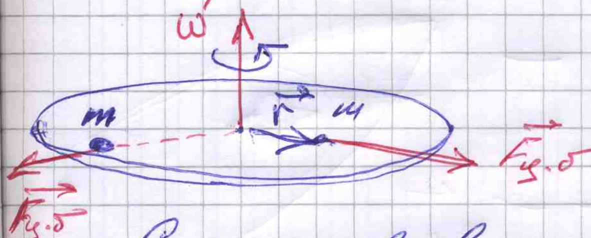
$\vec F_K \perp \vec\omega, \vec V_{отн}$

3°. Центробежные силы

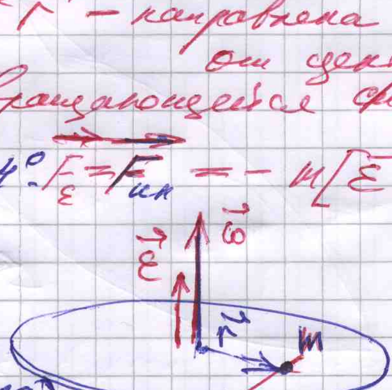
$$\vec F_{ц.б} = -m[\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]] = -m(\vec\omega(\vec\omega\cdot\vec r) - \vec r\,\omega^2)$$

Пусть, например, $\vec\omega\perp\vec r \Rightarrow \vec\omega\cdot\vec r = 0$

$\Rightarrow \vec F_{ц.б} = +m\omega^2\vec r$ – направлена по радиусу от центра вращающейся системы отсчёта

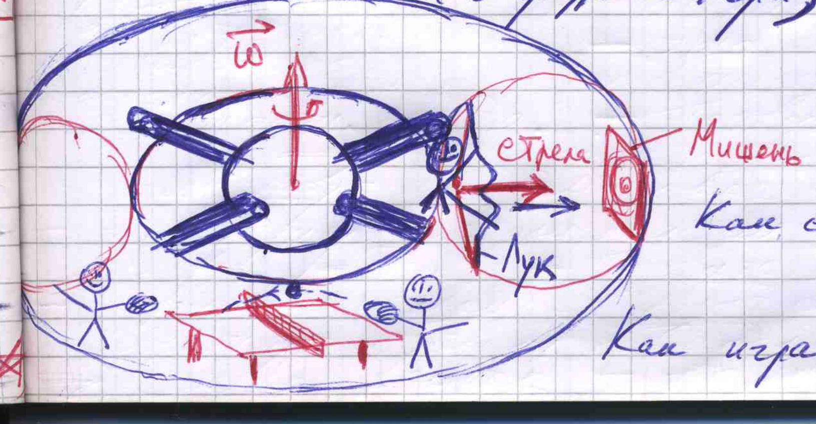


4°. $\vec F_\varepsilon = \vec F_{ин} = -m[\vec\varepsilon\times\vec r]$ – связана с $\vec\varepsilon\neq 0$



$\vec F_\varepsilon \perp \vec\varepsilon, \vec r$

Спортзал во вращающемся космическом корабле! (в форме тора)



Как стрелять по мишени?

Как играть в теннис?