Лекция 17. Законы постоянного электрического тока.

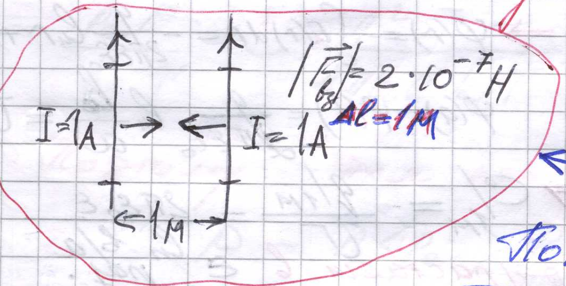
§1. Сила тока. Плотность тока. Закон Ома в дифференциальной форме.

Электрический ток — это направленное движение заряженных частиц. Условия существования электрического тока: наличие носителей заряда и приложенного электрического поля. Ток возможен в различных средах:
проводниках, полупроводниках, в плазме, электролитах, ток возможен и в вакууме.

Определение Сила тока

$$I = \frac{dq}{dt}$$

— это заряд, протекающий через поперечное сечение за 1 секунду.
Ток в системе СИ измеряется в Амперах:

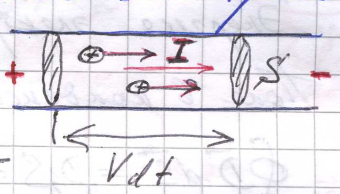


1А — это основная единица СИ, вводится посредством эталона.

← Эталон 1А.

Помимо силы тока I используют также плотность электрич. тока:

$$|\vec j| = \frac{I}{dS} = \frac{dq}{dS\,dt} = \frac{n q\, dS\, V dt}{dS\, dt} = nqV$$

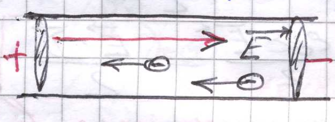


$I = nqVS$, $|\vec j| = \frac{dI}{dS} = nqV$ — в случае одного типа носит. зарядов

$I = S\sum_i n_i q_i V_i$, $|\vec j| = \sum n_i q_i V_i$ — в случае нескольких типов носит. зарядов

За направление силы тока принимается направление движения положительных электрических зарядов.

Между приложенным электрическим полем и эл. током имеется простое соотношение, известное как закон Ома. Получим закон Ома в некоторых простых предположениях. Примем закон движения эл. зарядов под действием приложенного электрического поля $\vec E$ в следующей форме:



$$m\dot{\vec V} = q\vec E - \alpha\vec V$$ — предполагаем, что на носит. заряды действует сила трения, пропорциональная скорости

В условиях установившегося стационарного движения носителей зарядов $\dot{\vec V} = 0$

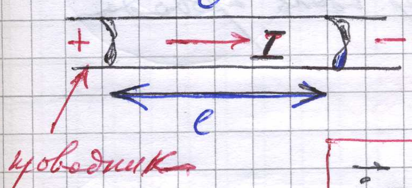
$\Rightarrow \vec V = \frac{q}{m\gamma}\vec E$, $\gamma = \frac{\alpha}{m}$, $[\gamma] = \frac{1}{T}$, $\gamma = \frac{1}{\tau} = \nu_{столкн.}$

$\Rightarrow \vec V = \frac{q\tau}{m}\vec E \Rightarrow \vec j = \frac{nq^2\tau}{m}\vec E = \sigma\vec E$

Итак, в принятой модели пост. тока, для сред, в которых на носители зарядов действуют тормозящие силы, пропорциональные скорости зарядов, плотность электрического тока даётся законом Ома в локальной дифференциальной форме:

$$\vec j = \frac{nq^2\tau}{m}\vec E = \sigma \vec E, \quad \sigma = \frac{nq^2\tau}{m} \text{ — проводимост.}$$

Из закона Ома в дифференциальной форме следует Закон Ома для участка цепи — школьная форма Закона Ома.



$$\sigma E = j = \frac{I}{S} = \sigma\frac{U}{l} \Rightarrow I = \frac{U\sigma S}{l} = \frac{U}{R}$$

$$\boxed{\vec j = \sigma\vec E} \longleftrightarrow \boxed{I = \frac{U}{R}} \qquad \rho = \frac{1}{\sigma} \text{ — удельное сопротивление}$$

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S} = \frac{\rho l}{S}}$$ — формула для подсчета сопротивления проводника.

Для проводника с одним типом носителей зарядов проводимость имеет вид:

$$\sigma = \frac{nq^2\tau}{m} = \frac{q^2 n}{m\nu_{столкн}},$$

здесь n — концентрация носит. заряда, $\nu_{столкн} = \frac{1}{\tau}$ — частота столкновений носит. зарядов,

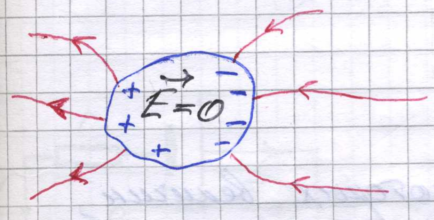
τ — время своб. пробега носит. зарядов.

§2. Сравнение электростатических полей и стационарных электрических полей в цепях постоянного тока.

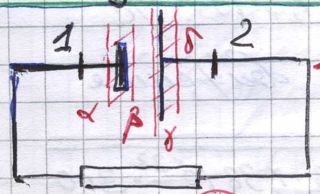
Полезно сравнить природу электрических полей в электростатике и в явлениях, связанных с протеканием постоянного тока.

Электростатика.

$$\vec\nabla\times\vec E = 0, \Rightarrow \vec E = -\vec\nabla\varphi$$



Электростатические поля потенциальны, т.е. $\oint \vec E\cdot d\vec l = 0$



$\vec E = -\vec\nabla\varphi + \vec E_з$ — поле сторонних сил, разделяющих заряды

$$\mathcal{E}_{12} \stackrel{def}{=} \int_{(1)}^{(2)} \vec E_з\cdot d\vec l = \int_\alpha^\beta \vec E_з\cdot d\vec l + \int_\gamma^\delta \vec E_з\, d\vec l$$

Постоянный ток

$$\vec\nabla\cdot\vec j + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

для пост. эл. токов $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \vec\nabla\cdot\vec j = 0 \longleftrightarrow \oint \vec j\cdot d\vec S = 0$$

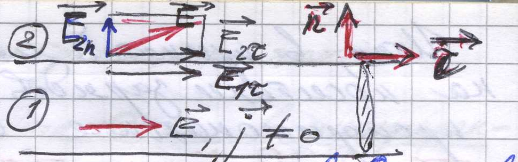
токовые линии замкнуты, совершенно аналогично тому как в силу $\oint \vec B\cdot d\vec S = 0$ замкнутыми являются линии индукции магн. поля в магнитостатике.

В то же время, для пост. токов $\Rightarrow \oint \vec E\cdot d\vec l \neq 0 \Rightarrow \vec E_{рез} = -\vec\nabla\varphi + \vec E_з$

$E_з$ — непотенц. поле сторонних сил.

Поле сторонних сил $E_з$ действует на участках (α,β) и (γ,δ), прилегающих к электродам ист. постоянного тока.

Поля в проводе с током и вне провода в режиме установившегося постоянного тока:



При установлении режима постоянного тока вдоль провода с током со скоростью света устанавливается стационарное распределение заряда вдоль провода, так что снаружи проводника пол $\vec{E}$ направлено под углом.
Точнее, в силу граничных условий:

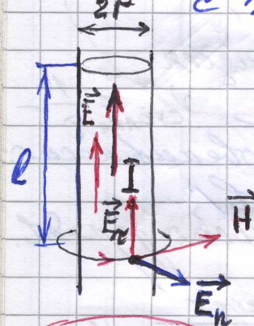
Внутри провода → $E_{1n} = 0$, т.к. $\vec{j} \parallel \vec{E}$, $\vec{j}$ — напр. вдоль провода

Снаружи провода → $D_{2n} - \underbrace{\cancel{D_{1n}}}_{=0} = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_{своб}$,

$E_{2\tau} = E_{1\tau} = E_{внутри\ пров}$.

Задача: Обсудите возможные направления потоков энергии
(А) вокруг провода с током в однопроводной линии
(Б) вокруг проводов с током двухпроводной линии

(А) Однопроводная линия с пост. током



$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}$

$\vec{S}_n = [\vec{E}_\tau \times \vec{H}]$ — существует поток эл. эл.-м. поля внутрь провода на длине провода l:

$$E_\tau \cdot H\, l \cdot 2\pi r = \frac{U}{l}\frac{I}{2\pi r} l\, 2\pi r = UI = E \cdot j\, \pi r^2 \cdot l = I^2 R = \sigma E^2 \pi r^2 l$$

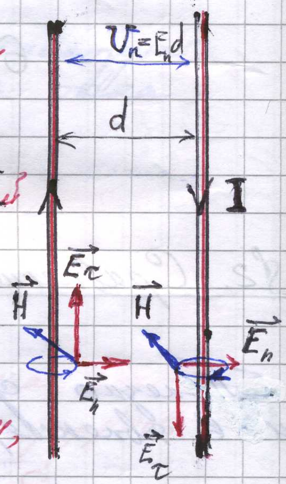
Поток энергии поля внутрь провода в точности равен потерям эл. в рассматриваемом куске провода l.
Есть также поток энергии поля вдоль провода:

$\vec{S}_\tau = [\vec{E}_n \times \vec{H}] \parallel$ проводу.

(В) Двухпроводная линия с пост. током.

$\vec{S}_n = [\vec{E}_\tau \times \vec{H}]$ — существует поток энергии электромагн. поля внутрь провода, в точности компенсирующий тепловые потери.

$\vec{S}_\tau = [\vec{E}_n \times \vec{H}]$ — есть также поток энергии электромагнитного поля вдоль линии, направленный снизу вверх



Полезно представлять себе порядки некоторых величин, характеризующих протекание электрического тока:

Ток в медном проводнике: $j = 1\,\frac{А}{мм^2} = 10^6\,\frac{А}{м^2} = nqV_{др}$

концентрация носит. зар. $n_{Cu} = 8{,}4 \cdot 10^{22}\,\frac{1}{см^3} = 8{,}4 \cdot 10^{28}\,\frac{1}{м^3}$

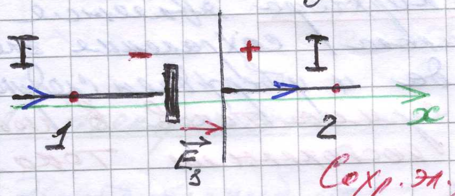
Скорость дрейфа носит. заряда → $V_{др} = \frac{j}{nq} = \frac{10^6}{8{,}4 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}\,\frac{м}{с} \simeq 7{,}5 \cdot 10^{-5}\,м/с$

С другой стороны, скорость теплового движения электронов при $T = 300\,K$:

$$V_{ср.кв.\ тепл} = \sqrt{\langle \vec{V}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_Б T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \simeq 10^5\,м/с$$

Так что скорость дрейфа носит. заряда чрезвычайно мала по сравнению со ср. кв. скоростью теплового движения.

§3. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС; закон Ома для полной цепи.



Как уже отмечалось, в цепях постоянного тока, в условиях стационарного режима

Сохр. эл. заряда: $\nabla\cdot\vec j + \cancel{\frac{\partial\rho}{\partial t}} = 0 \Leftrightarrow \oint \vec j\cdot d\vec S = 0$ — токовые линии замкнуты,

но $\oint \vec E\cdot d\vec l \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ существуют помимо потенц. силовых полей $\vec E$ поля сторонних сил $\vec E_s$, поэтому закон Ома в диф. форме имеет вид:

$$\vec j = \sigma\left(\vec E + \vec E_s\right)$$

Рассмотрим участок цепи с постоянным током I, содержащий ЭДС. В источнике тока, характеризуемом некоторым значением электродвижущей силы $\mathcal{E}_{12}$

$$\mathcal{E}_{12} \overset{def}{=} \frac{A_{стор.сил\,1\,2}}{q} = \frac{\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \vec E_s \cancel{q}\, d\vec l}{\cancel{q}}$$

Общее опр-е ЭДС, как работы поля сторонних сил на участке 1–2

происходит разделение электрических зарядов (благодаря работе сторонних сил, например, электрохимического происхождения). Имеем, интегрируя закон Ома в дифференциальной форме, на участке цепи, содержащей ЭДС $\mathcal{E}_{12}$:

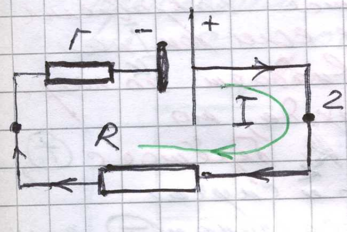
$$\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} \frac{\vec j\, d\vec l}{\sigma} = I\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\frac{dl}{\sigma S} = I\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\frac{dx}{\sigma(x)\,S(x)} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\vec E_{потенц}\cdot d\vec l + \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\vec E_s\cdot d\vec l,$$

$$= -\int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2} d\varphi + \mathcal{E}_{12}$$

т.е. Закон Ома для участка цепи с ЭДС $\rightarrow$ $\boxed{IR_{12} = \varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}_{12}}$,

здесь $R_{12} \overset{def}{=} \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\frac{dx}{\sigma(x)S(x)} = \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\frac{dl}{\sigma S}$ — сопротивление участка цепи,

$$\mathcal{E}_{12} \overset{def}{=} \int_{(\cdot)1}^{(\cdot)2}\vec E_s\cdot d\vec l$$ — ЭДС на участке цепи 1–2.



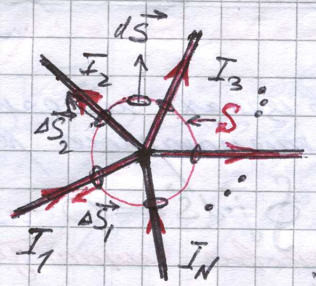
Из полученного закона Ома для участка цепи с ЭДС легко выводится известный из школы закон Ома для полной цепи. Имеем, выписывая закон Ома для участков цепи 1-2 в верхней и нижней ветвях схемы, содержащей внутреннее сопротивление r, ЭДС $\mathcal{E}$ и внешнее сопротивление R:

$$I\cdot r = \varphi_1-\varphi_2+\mathcal{E}$$
$$+\quad I\cdot R = \varphi_2-\varphi_1$$
$$I(R+r) = \cancel{\varphi_1}-\cancel{\varphi_2}+\cancel{\varphi_2}-\cancel{\varphi_1}+\mathcal{E}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

Ток в замкнутой, т.е. полной цепи, пропорционален ЭДС $\mathcal{E}$ и обратно пропорционален полному сопротивлению

§4. Законы Кирхгофа для цепей постоянного тока.



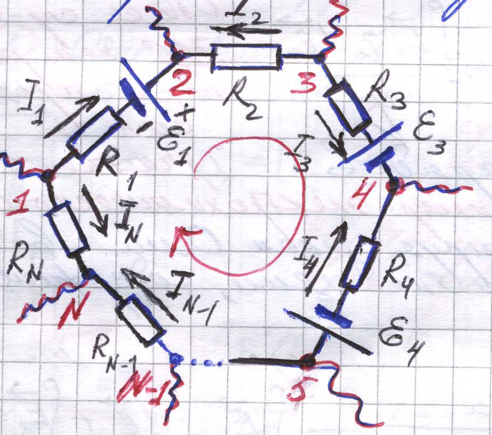
Первый закон Кирхгофа является следствием закона сохранения электрического заряда и утверждает следующее: Алгебраическая сумма токов в любом узле цепи с постоянными токами равна нулю:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^{N}(\pm I_k) = -I_1 + I_2 + I_3 + \ldots - I_N = 0$$

знаки указаны для рисунка справа

$+I_k$ – вытекающий из узла ток, $\vec{j} \uparrow\uparrow \Delta S_k$; $-I_n$ – втекающий в узел ток. $\vec{j} \uparrow\downarrow \Delta S_n$

Второй закон Кирхгофа является утверждением об алгебраической сумме падений напряжений вдоль любого замкнутого контура электрической цепи с постоянными токами. Доказывается справедливость этого закона очень просто – применением закона Ома для участков цепи с ЭДС и без ЭДС при обходе вдоль замкнутого контура в любом заданном направлении:



В электрической схеме любой сложности выбирается произвольный замкнутый контур, например, показанный на рисунке слева, с N узлами, к которым как-то притекают (или оттекают) электрические токи. На каждом участке цепи задано направление тока, сопротивление участка и ЭДС (если она на участке присутствует). Выписывается закон Ома для всех участков цепи (с ЭДС, без ЭДС):

2-ой закон Кирхгофа:

$$\sum_{k=1}^{N}(\pm I_k R_k) = \sum_{k=1}^{N}(\pm \mathcal{E}_k)$$

Алгебраич. сумма падений напряжений вдоль замкн. контура равна алгебр. сумме ЭДС

$$\begin{aligned}
&(+)\quad I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1,\\
&(+)\quad -I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3,\\
&(+)\quad I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 - \mathcal{E}_3,\\
&(+)\quad -I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_5 + \mathcal{E}_4,\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(+)\quad I_{N-1} R_{N-1} = \varphi_{N-1} - \varphi_N\\
&(+)\quad -I_N R_N = \varphi_N - \varphi_1
\end{aligned}$$

В замкнутом контуре выбирается направление обхода: если ток I_k на участке совпадает по напр. с напр. обхода, то соотв. $(+) I_k R_k$ берётся с $(+)$, в противном случае $(-) I_n R_n$ – со знаком $(-)$, если I_n напр. против направ. обхода.

ЭДС берётся со знаком $(+)$, если её проходим от $(-)$ полюса к $(+)$ полюсу, и наоборот.

Все уравнения складываются:

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 - I_4 R_4 + \ldots + I_{N-1} R_{N-1} - I_N R_N = \sum_{k=1}^{N}(\pm I_k R_k) = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4 = \sum_k \ldots$$

$$+ \cancel{\varphi_1} - \cancel{\varphi_2} + \cancel{\varphi_2} - \cancel{\varphi_3} + \ldots + \cancel{\varphi_{N-1}} - \cancel{\varphi_N} + \cancel{\varphi_N} - \cancel{\varphi_1}$$