Лекция 17. Тензор моментов инерции тв. тела и его свойства. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела. Свободный симметричный волчок.

§ 1. Тензор моментов инерции твердого тела и его свойства.

В предыдущей лекции было показано, что момент импульса незакреплённого твердого тела, без фиксированной оси вращения, имеет вид:

$$L_i = \sum_{k=1}^{3} J_{ik}\,\omega_k ,$$

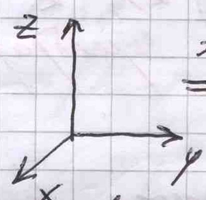
где J_{ik} – тензор инерции тв. тела, задаётся формулой:

$J_{ik} = J_{ki}$ симметричный

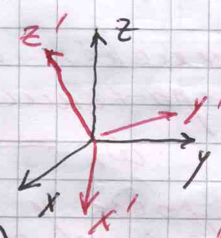
$$J_{ik} = \sum m\left(r^2\delta_{ik} - x_i x_k\right). \text{ – тензор второго ранга.}$$

В математике доказывается важная теорема о симметричных тензорах второго ранга.

Теорема Подходящим преобразованием системы декартовых координат, т.е. поворотом, симметричный тензор может быть приведен к диагональному виду:



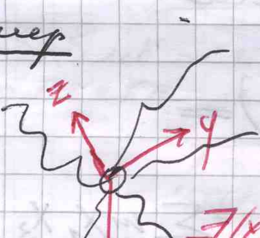
$$x_k \xrightarrow{} x_i' = R_{ik}x_k$$



$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} = J_{ik} = \begin{pmatrix} \sum m(y^2+z^2), & -\sum mxy, & -\sum mxz \\ -\sum myx, & \sum m(x^2+z^2), & -\sum myz \\ -\sum mzx, & -\sum mzy, & \sum m(x^2+y^2) \end{pmatrix} \longrightarrow J'_{ik} = \begin{pmatrix} J'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & J'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & J'_{33} \end{pmatrix}$$

Определение Система координат в которой тензор инерции диагонален, называется системой главных осей твердого тела, а моменты инерции $J'_{11} = I_1$, $J'_{22} = I_2$, $J'_{33} = I_3$ главными моментами инерции тв. тела.

Пример Замороженный осьминог, т.е. превращенный в абсолютно твердое тело, имеет систему главных осей, в которой его тензор инерции диагонален, т.е.



$\exists(x,y,z)$ система в которой $\longrightarrow$ $J_{ik} = J_i\delta_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

Замечание Тензорные величины определяются посредством закона преобразования их компонент при поворотах системы координат.

- $3^х$-векторы есть тензоры $1^{го}$ ранга: $x_i' = \sum R_{ik}x_k$
- произведение $x_i x_k$ – тензор $2^{го}$ ранга: $x_i' x_k' = \sum_{pq} R_{ip}R_{kl}\,x_k x_l$

Определение T_{ikl} – тензор $3^{го}$ ранга, если при поворотах сист. координат $x_l \to x_i' = \sum R_{ik}x_l$ его компоненты преобразуются как $x_i x_k x_l$:

$T'_{ikl} = R_{ip}R_{kq}R_{lr}T_{pqr}$ $\xleftarrow{\text{преобр. как}}$ $x_i' x_k' x_l' = R_{ip}R_{kq}R_{lr}\,x_p x_q x_r$

Аналогично может быть определён тензор $N^{\text{го}}$ ранга: совокупность величин $\underbrace{T_{ik\ldots l}}_{N}$ $(i,k,\ldots,l=1,2,3)$ называются тензором $N^{\text{го}}$ ранга, если при поворотах системы координат $x_i \to x'_i = \sum_k R_{ik}x_k$ его компоненты преобразуются как произведение $\underbrace{x_i x_k \ldots x_l}_{N}$

$$\underbrace{T'_{ik\ldots l}}_{N} \stackrel{def}{=} \underbrace{R_{ip}R_{kq}\ldots R_{lr}}_{N\ \text{матриц поворот}} \underbrace{T_{pq\ldots r}}_{N} \quad \underset{\text{как}}{\overset{\text{преобразуется}}{\sim}} \quad x'_i x'_k \ldots x'_l = R_{ip}R_{kq}\ldots R_{lr}x_p x_q \ldots x_r$$

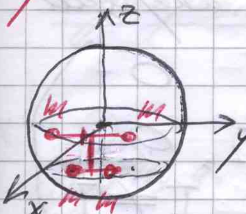
В последней формуле принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, например:

$$L_i = \sum_{k=1}^{3} J_{ik}\omega_k = J_{ik}\omega_k \longleftarrow$$

значок суммы $\sum_{k=1}^{3}$ не пишется, но по k производится суммирование!

Для симметричных твердых тел система главных осей совпадает обычно с осями симметрии, поэтому для симметричных тел вычисление тензора инерции J_{ik} особенно просто. Рассмотрим примеры.

Шаровой волчок — твердое тело в форме сплошного шара радиуса R.



Для него любая декартова система координат с началом в центре шара, очевидно, является системой главных осей. Действительно, вычисление любой недиагональной компоненты J_{ik}, например $J_{12} = -\sum mxy$, дает:

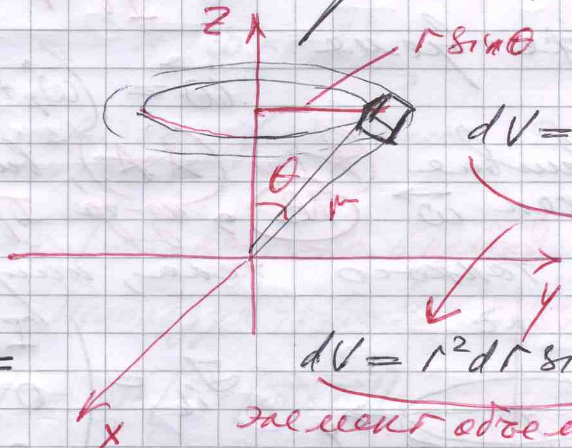
$$J_{12} = -\sum_m mxy = -\sum m x(y_0 - y_0) = 0$$

Сумма по парам m, имеющих при фиксированном x противоположные по знаку координаты y_0 и $-y_0$

Для шарового волчка:

$$J_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 = I_ш & 0 & 0 \\ 0 & I_2 = I_ш & 0 \\ 0 & 0 & I_3 = I_ш \end{pmatrix}$$

В свою очередь $I_ш$ очень просто подсчитывается в сферической системе координат:



$$dV = dr\, r\sin\theta\, d\varphi \times r\, d\theta$$

$$dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

элемент объема в сферич. системе координат

$$\Rightarrow dm = \rho\, dV$$

$$I_ш = \iiint\limits_{\theta\ r\ \varphi} dm\, r^2 \sin^2\theta =$$

$$= \rho \int_0^R dr \int_0^{\pi} d\theta \sin^2\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, r^4 =$$

$$= \rho \cdot \frac{2\pi R^5}{5} \int_0^{\pi} d\theta \sin^3\theta,$$

$$= \frac{2\pi\rho R^5}{5} \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)(1-\cos^2\theta) = \frac{2\pi\rho R^5}{5}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2\pi\rho R^5}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{5}MR^2$$

Здесь $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$, $\int_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5}$, $\rho\cdot\frac{4\pi R^3}{3} = M$ — масса шара.

Итак, для шарового волчка:

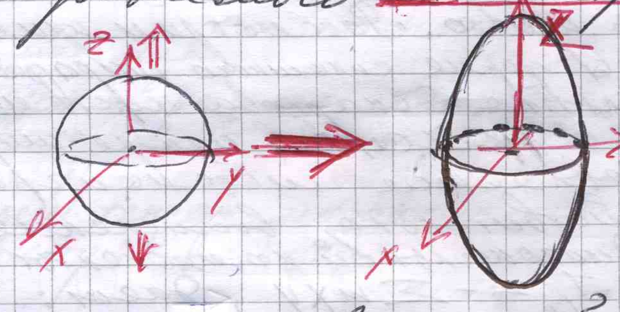
$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_Ш & 0 & 0 \\ 0 & I_Ш & 0 \\ 0 & 0 & I_Ш \end{pmatrix}, \quad I_Ш = \frac{2}{5}MR^2.$$

$$\vec{L}_{\text{шарового волчка}} = I_Ш \vec{\omega} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = I_Ш \omega_1 \vec{e}_1 + I_Ш \omega_2 \vec{e}_2 + I_Ш \omega_3 \vec{e}_3 =$$

$$= I_Ш(\omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3) = I_Ш \vec{\omega},$$

т.е. для шарового волчка $\vec{L}_Ш \uparrow\uparrow \vec{\omega}$ NB

Нарушая симметрию шарового волчка путём вытягивания его по одной из осей и превращения шара в эллипсоид вращения, получаем так называемый симметричный волчок:



Для симметричного волчка тензор инерции имеет вид:

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 = I_1, & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \neq I_1 \end{pmatrix}$$

Система главных осей остается прежней, но вращения вокруг осей x и z (или y и z) уже не эквивалентны.

Симметричный волчок — это тв. тело с главными моментами инерции $I_1 = I_2$ и $I_3 \neq I_1$. Для симметричного волчка:

$$\vec{L}_{\text{сим. волчка}} = I_1 \omega_1 \vec{e}_1 + I_1 \omega_2 \vec{e}_2 + I_3 \omega_3 \vec{e}_3 =$$

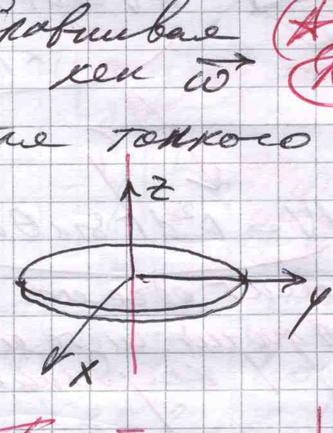
$$= I_1(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) + I_3 \vec{\omega}_3 \qquad (\ast)$$

В то же время

$$\vec{\omega} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) + \vec{\omega}_3 \qquad (\ast\ast)$$

Сравнивая $(\ast)$ и $(\ast\ast)$, видим, что $\vec{L}_{\text{сим. волчка}}$ не параллелен $\vec{\omega}$ NB, из-за $I_1 \neq I_3$!

Для тонкого тела, например диска:



$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \neq I_1 \end{pmatrix}$$

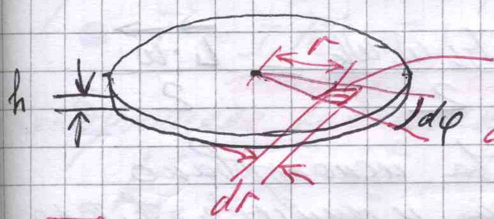
Пренебрегая толщиной диска:

$$I_1 = \sum_m m(y^2 + z^2)\Big|_{z=0} = \sum_m m y^2$$

$$I_2 = \sum_m m(x^2 + z^2)\Big|_{z=0} = \sum_m m x^2$$

$$I_{\text{диска}/\text{отн } z} = I_3 = \sum_m m(x^2 + y^2) = I_1 + I_2 = 2I_1$$

Подсчитаем $I_{диска}$, используя полярную систему координат



$dS = r\,d\varphi\,dr$

$dm = \rho\, dS \cdot h$

$$\longrightarrow I_{диска} = \int_0^{2\pi}\int_0^{r} dm\, r^2 = \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\rho \cdot \frac{R^4}{4} h = \frac{MR^2}{2}$$

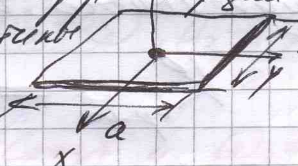
Так как

$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_{диска}$, то

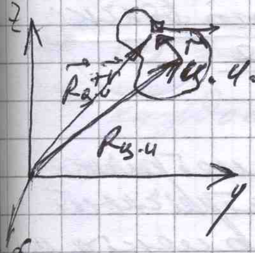
$$I_{ik}^{(диска)} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}$$

— диск, очевидно, также является симметричным волчком! NB

Задача Вычислить тензор инерции тонкой прямоуг. пластины массы M.



§2. Кинетич. энергия незакрепленного твердого тела.



$$K = \sum_m \frac{m\vec{V}^2}{2} = \sum_m \frac{m(\dot{\vec{R}}_{ц.и} + \dot{\vec{r}})^2}{2} =$$

$$= \dot{\vec{R}}_{ц.и}^2 \frac{1}{2}\sum_m m + \dot{\vec{R}}_{ц.и} \cdot \sum_m m\dot{\vec{r}} + \sum_m \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}$$

$\sum m\dot{\vec{r}} = 0$, т.к. $\vec{r}$ отсчитываются от ц.и.

$$\Rightarrow K = K_{поступ.дв} + K_{вр.дв} =$$

$$= \frac{M\dot{\vec{R}}_{ц.и}^2}{2} + \sum_m \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2}, \quad \dot{\vec{r}} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$$

$$K_{вр.дв} \stackrel{def}{=} \sum_m \frac{m\dot{\vec{r}}^2}{2} = \sum_m \frac{m[\vec{\omega}\times\vec{r}]^2}{2},$$

в последней формуле подставлено выражение для мгнов. скорости $\vec{v}$ частицы тв. тела m:

$$\vec{v}(\vec{r}) = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$$ — получено в предыд. лекции.

Преобразуем квадрат скорости, используя тождество $\boxed{\vec{a}\cdot[\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{b}\cdot[\vec{c}\times\vec{a}]}$

$$\vec{v}^2 = \underbrace{[\vec{\omega}\times\vec{r}]}\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \vec{\omega}\cdot\underbrace{[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]} =$$

раскроем по „бац" минус „цаб"

$$= \vec{\omega}\cdot[\vec{\omega}r^2 - \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})] = \vec{\omega}^2 r^2 - (\vec{\omega}\cdot\vec{r})(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) =$$

$$= \sum_{i,k}(\omega_i\omega_k\delta_{ik}r^2 - \omega_i x_i \omega_k x_k) =$$

$$= \sum_{i,k}\omega_i\omega_k(\delta_{ik}r^2 - x_i x_k)$$

Подставляя получ. выражение для $\vec{v}^2$ в $K_{вр.дв}$, находим —

окончательное выражение для кинетической энергии вращательного движения твердого тела:

$$K_{вр.дв} = \sum_{m} \frac{m[\vec{\omega}\times\vec{r}]^2}{2} = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{I_{ik}\,\omega_i\omega_k}{2} = \frac{\vec{L}\cdot\vec{\omega}}{2},$$

при получении последнего равенства использовано выр-е $L_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik}\,\omega_k$ для момента импульса тв. тела.

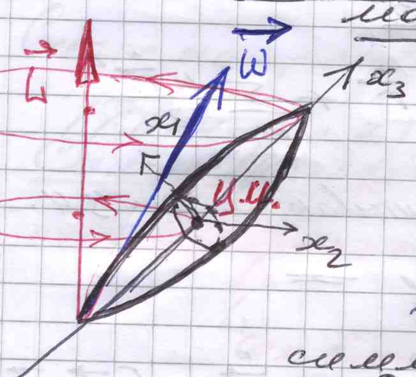
Особенно просто $K_{вр.дв}$ выглядит в системе главных осей твердого тела:

$$\left\{\begin{array}{l} I_{ik} = I_i\,\delta_{ik} \\ L_i = I_i\,\omega_i \end{array}\right. \Longrightarrow K_{вр.дв} = \sum_{i,k} \frac{I_i\,\delta_{ik}\,\omega_i\omega_k}{2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{I_k\,\omega_k^2}{2} = \sum \frac{L_k^2}{2I_k}$$

в такой системе полная кин. энергия вращат. движения тв. тела складывается из энергий вращательного движения вокруг всех главных осей:

$$K_{вр.дв} = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2}{2}\omega_2^2 + \frac{I_3}{2}\omega_3^2 = \frac{L_1^2}{2I_1} + \frac{L_2^2}{2I_2} + \frac{L_3^2}{2I_3}.$$

§3. Анализ движений свободного симметричного волчка с использованием законов сохранения момента импульса и энергии



На рисунке показано осесимметричное тв. тело, очевидно, это симметричный волчок с главными моментами инерции

$$I_1 = I_2 \neq I_3.$$

Проанализируем движение свободного симметричного волчка, на который не действуют никакие силы ($g = 0$, $F_{тр} = 0$ и т.д.)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\dot{\vec{V}}_{ц.и} = \vec{F}_{рез} = 0 \Longrightarrow \vec{V}_{ц.и} = \vec{V}_0 = const = \dot{\vec{R}}_{ц.и}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{R}_{ц.и} = \vec{V}_{ц.и}\cdot t + \vec{R}_{ц.и\,0}}$$ — центр инерции движется равномерно и прямолинейно.

Есть еще вращение вокруг центра инерции волчка; анализ такого вращения особенно интересен, его можно провести на основе законов сохранения момента импульса и энергии.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{рез} \overset{(\vec{F}=0)}{=\!=} 0 \to \vec{L} = \overrightarrow{const},\quad K_{вр.дв} = \sum_{k=1}^{3} \frac{I_k\omega_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{3} \frac{L_k^2}{2I_k} = const.$$

Имеем законы сохранения момента импульса и кинетической энергии вращательного движения:

$\vec{L} = \overrightarrow{const}$ — означает сохранение направления $\vec{L}$ и постоянство его модуля $|\vec{L}| = const$.

В сист. главных осей волчка (x_1, x_2, x_3):

$$\vec{L} = I_1(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) + I_3\,\vec{\omega}_3,\qquad \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$$

$\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ выражаются через одни и те же векторы,

$\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ поэтому в каждый момент времени векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ лежат в одной плоскости, т.е.

- $\vec{L}=I_1(\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2)+I_3\vec{\omega}_3$, $\vec{\omega}=(\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2)+\vec{\omega}_3 \Rightarrow \vec{L}$ и $\vec{\omega}$ – в одной плоскости NB

Имеют место следующие наблюдения:

$$K_{вр.дв}=\frac{L_1^2}{2I_1}+\frac{L_2^2}{2I_2}+\frac{L_3^2}{2I_3}=\frac{L_1^2+L_2^2+L_3^2}{2I_1}+L_3^2\left(\frac{1}{2I_3}-\frac{1}{2I_1}\right)=const$$

$\Rightarrow L_3=I_3\omega_3=const$, т.к. $\vec{L}^2=const$ и $K_{вр.дв}=const$.

$\Rightarrow \omega_3=\frac{L_3}{I_3}=const$.

Жирными кружочками помечены важные моменты наблюдений по поводу движения волчка.

- $\omega_3=\frac{L_3}{I_3}=const$, т.к. $L_3=const$. NB

Далее:

$$K_{вр.дв.}=\frac{I_1(\omega_1^2+\omega_2^2)}{2}+\frac{I_3\omega_3^2}{2}=\frac{I_1(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)}{2}+\frac{(I_3-I_1)\omega_3^2}{2}=const$$

$\Rightarrow \omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=const$, т.к. $K_{вр.дв}=const$ и $\omega_3=const$.

- $\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=const$ NB

В каждый момент времени точки на оси x_3 в твердом теле имеют скорости

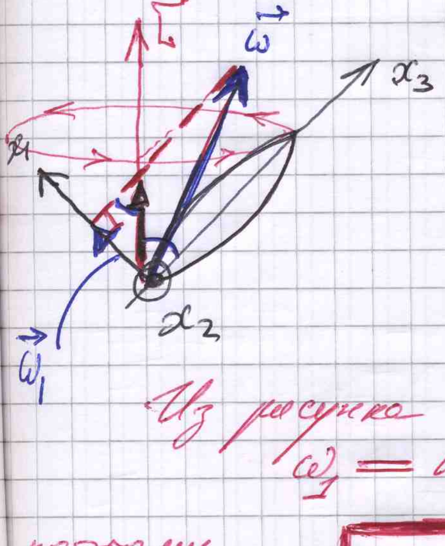
$$\vec{V}=[\vec{\omega}\times\vec{r}]\perp \text{ плоскости } \vec{L},\vec{\omega}$$ NB

- Симметричный волчок вращается, прецессирует вокруг направления $\vec{L}$.

$K_{вр.дв}=\frac{\vec{L}\cdot\vec{\omega}}{2}=\frac{|\vec{L}||\vec{\omega}|\cos(\widehat{\vec{\omega},\vec{L}})}{2}=const$, и, следовательно в силу $|\vec{L}|=const$, $|\vec{\omega}|=const \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{\omega},\vec{L}})=const$.

- Взаимное расположение $\vec{L}$, $\vec{\omega}$ и оси x_3 фиксировано, в каждый момент времени одно и то же. NB

$const=\omega_3=|\vec{\omega}|\cos(\widehat{\vec{\omega}, \text{ось } x_3})=const \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{\omega}, \text{ось } x_3})=const$.



Пусть $(\widehat{\vec{L},x_3})\overset{def}{=}\theta=const \Rightarrow \boxed{\omega_3=\frac{L_3}{I_3}=\frac{L\cos\theta}{I_3}}$

- Если из конца $\vec{\omega}$ опустить перпендикуляр на ось x_1, то получится проекция ω_1 угловой скорости на ось x_1, с другой стороны этот перпендикуляр, пересекая направление $\vec{L}$, даёт составляющую $\vec{\omega}_{пр}$ вдоль $\vec{L}$, которая как раз и является угловой скоростью прецессии волчка

Из рисунка очевидно, что

$$\omega_1=\omega_{пр}\sin\theta=\frac{L_1}{I_1}=\frac{L\sin\theta}{I_1}$$

поэтому

- $\boxed{\omega_{пр}=\frac{L}{I_1}}$ – угловая скорость прецессии волчка.