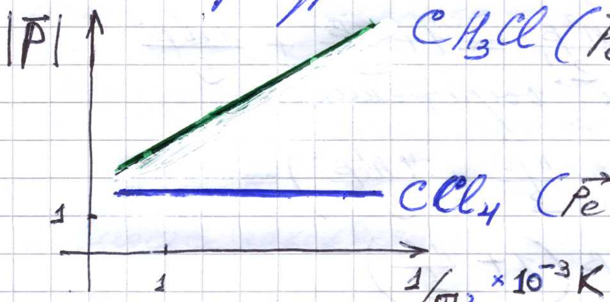
Лекция 16 Зависимость поляризации от температуры. Различные задачи электростатики диэлектриков

§1. Температурные зависимости поляризации полярных и неполярных диэлектриков.

Приведем экспериментальные данные для зависимости поляризации $|\vec{P}|$ полярных и неполярных диэлектриков от температуры:

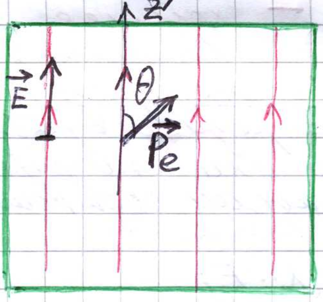


CH_3Cl ($\vec{P_e} \neq 0$ при $\vec{E} = 0$) — полярный диэлектрик

CCl_4 ($\vec{P_e} = 0$ при $\vec{E} = 0$) — неполярный диэлектрик.

Для неполярных диэлектриков поляризация не зависит от температуры, так как индуцированные полем $\vec{E} \neq 0$ дипольные моменты $\vec{P}_{e(ind)} \neq 0$, возникающие при наложении поля, независимо от величины T, направлены по полю $\vec{E}$.

Температурную зависимость поляризации P для полярных диэлектриков можно рассчитать, используя соответствующее распределение Больцмана $dW(\vec{r})$ по координатам диполей $\vec{p}_e$ полярных атомов:



$$W_{в} = -\vec{P_e}\cdot\vec{E} = -p_e \cdot E\cos\theta$$ — энергия взаим. диполя с полем.

$$\Rightarrow \boxed{dW(\vec{r}) = dW(r,\theta,\varphi) = A e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}$$

Трёхмерное распределение Больцмана по r, θ и φ — координатам диполей.

Поскольку нас интересует ориентационная поляризуемость, то следует использовать одномерное распределение Больцмана, получаемое интегрированием трёхмерного распределения по несущественным для рассматриваемой физики координатам:

$$dW(\theta) = A\int_0^{2\pi} d\varphi \int^{V} r^2 dr\, e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \tilde{A} e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} \sin\theta\, d\theta$$

Постоянную $\tilde{A}$ определим из условия нормировки вер-ти:

$$\int_0^{\pi} dW(\theta) = \tilde{A}\int_0^{\pi} e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} \sin\theta\, d\theta = 1 \Rightarrow \tilde{A} = \frac{1}{\int_0^{\pi} e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} \sin\theta\, d\theta}$$

$$\Rightarrow dW(\theta) = \frac{e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} \sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}} \sin\theta\, d\theta}$$ — требуемое одномерное распределение Больцмана.

Далее, используя $dW(\theta)$, вычисляем среднее значение электрического дипольного момента отдельного атома и поляризуемость $P_z = P$:

$$P = n\langle p_{ez}\rangle = n\int_0^{\pi} p_e\cos\theta\, dW(\theta) =$$

$$= n\frac{\int_0^{\pi} p_e\cos\theta\, e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}}\sin\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi} e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}}\sin\theta\, d\theta} = n\frac{\partial}{\partial\left(\frac{E}{k_Б T}\right)}\ln\left(\int_0^{\pi} e^{\frac{p_e E\cos\theta}{k_Б T}}\sin\theta\, d\theta\right)$$

$$= n\frac{\partial}{\partial\left(\frac{E}{k_Б T}\right)}\ln\left(\frac{e^{\frac{p_e E}{k_Б T}} - e^{-\frac{p_e E}{k_Б T}}}{p_e E/k_Б T}\right) = n p_e\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\left(e^{x} - e^{-x}\right) - \ln x\right) =$$

$$= n p_e\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right) = n p_e\left(\operatorname{cth}\frac{p_e E}{k_Б T} - \frac{k_Б T}{p_e E}\right) = n p_e \mathcal{L}\left(\frac{p_e E}{k_Б T}\right),$$

здесь введена функция Ланжевена:

$$\mathcal{L}(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x} = \frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} - \frac{1}{x}.$$

В честь франц. учёного Ланжевена, изучавшего температ. зав-ть восприимчивости пол. веществ.

Изучим поведение $\mathcal{L}(x)$ при различных значениях её аргумента. Очевидно, при малых x, имеем:

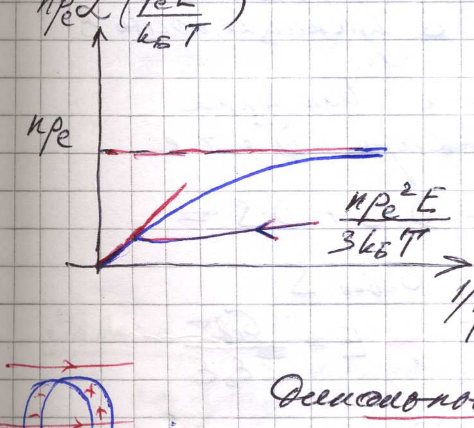
$$\mathcal{L}(x) = \left.\left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{x}-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\right|_{x\ll 1} \simeq \frac{1+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+1-\cancel{x}+\frac{x^2}{2}}{\cancel{1}+x+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\cancel{1}+x-\cancel{\frac{x^2}{2}}+2\frac{x^3}{6}} - \frac{1}{x} \cong$$

$$\cong \frac{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}{2x\left(1+\frac{x^2}{6}\right)} - \frac{1}{x} \simeq \frac{1}{x}\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{6}\right) - \frac{1}{x} \sim \left.\frac{x}{3}\right|_{x\ll 1}$$

При больших $x \gg 1$ $\mathcal{L}(x) \simeq 1$.

Учитывая индуцированную внешним полем часть поляризации, получаем:

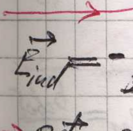
$$P = n p_e \mathcal{L}\left(\frac{p_e E}{k_Б T}\right) + \underbrace{\varepsilon_0 n \beta E}_{\text{индуц. часть поляризации}}$$



Приведём некоторые численные оценки:

Эл. дип. момент полярного атома $|p_e| \simeq q d \simeq$
$= 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-10}$ Кл·м
$= 1{,}6\cdot10^{-29}$ Кл·м.

Индуцированный эл. дипольный момент неполярного атома:



$\vec{E}_{ind} = -\frac{\rho\vec{d}}{3\varepsilon_0} = -\vec{E}$

$\Rightarrow \rho\vec{d} = 3\varepsilon_0\vec{E}$

$$p_{e(ind)} = \frac{4}{3}\pi a^3\cdot 3\varepsilon_0|E| = \varepsilon_0 4\pi a^3 E = \frac{qa}{E_{ат}}E$$

Атомное поле:

$$E_{ат} = k\frac{q}{a^2} \sim 9\cdot10^{9}\frac{1.6\cdot10^{-19}}{10^{-20}} \sim 1{,}44\cdot10^{11}\frac{В}{м} \Rightarrow 4\pi a^2\varepsilon_0 = \left(\frac{E_{ат}}{q}\right)^{-1}$$

Далее, при комнатных температурах:

$$k_Б T\Big|_{T=300K} \simeq 1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 300 = 4{,}14\cdot 10^{-21}\ Дж$$

$$p_e\cdot E = qaE_{ат}\cdot\frac{E}{E_{ат}} = qa\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{E}{E_{ат}} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{E}{E_{ат}}$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = 9\cdot 10^9\,\frac{1{,}6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-38}}{10^{-10}} \sim 25\cdot 10^{-19} \sim 2{,}5\cdot 10^{-18}$$

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\Big/k_Б T \sim \frac{2{,}5\cdot 10^{-18}}{4{,}14\cdot 10^{-21}} \sim 10^3,\ \text{но}\ \frac{E}{E_{ат}} \ll 1.$$

Окончательно:

$$\frac{p_e E}{k_Б T} \sim \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\, k_Б T}\,\frac{E}{E_{ат}} \sim 10^3\frac{E}{E_{ат}} \ll 1.$$

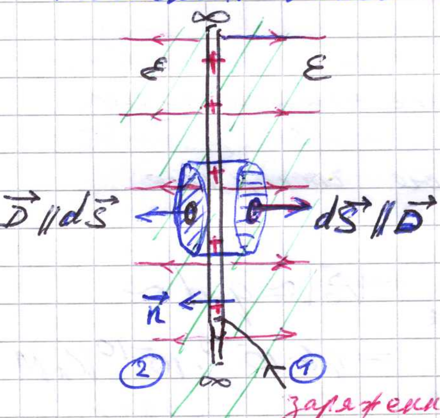
Поэтому для неплотных диэлектриков:

$$P = n\langle p_{ez}\rangle + P_{ind} = \underbrace{\varepsilon_0 n\frac{p_e^2 E}{3k_Б T\varepsilon_0}}_{\text{ориентац. часть поляризации}} + \underbrace{\varepsilon_0 n\beta E}_{\text{индуциров. часть поляризации}}$$

$$\Rightarrow \chi \simeq n\beta + \frac{n p_e^2}{3k_Б T\varepsilon_0}$$ – находится в приличном согласии с эксперим-тальными данным

§2. Различные задачи электростатики диэлектриков.

Покажем, как решаются задачи на вычисление электроста-тических полей в присутствии диэлектриков.



Задача Вычислить поле бесконечной заряж. плоскости, погруженной в диэлектрик с проницаемостью ε

Решение: применяем ур-е Максвелла о потоке вектора $\vec D$, т.е.

$$\oint \vec D\, d\vec S = D\cdot S + D\cdot S = \sigma_{своб}\cdot S$$

$$\Rightarrow |\vec D| = D = \frac{\sigma_{своб}}{2} \Rightarrow E = \frac{\sigma_{своб}}{2\varepsilon_0\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = -\frac{\sigma_{своб}}{2\varepsilon_0\varepsilon}|x|$$

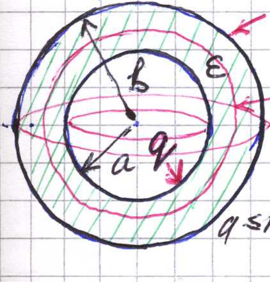
Определим также $\sigma_{связ}$ из гр. условия $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{связ}$

$P_{1n} = -P_{2n}$, $P_{2n} - P_{1n} = 2\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_n$ – в диэлектрике $\Rightarrow \sigma_{эфф} = \sigma_{своб} + \sigma_{связ} =$

$$\Rightarrow \sigma_{связ} = -2\varepsilon_0(\varepsilon-1)E_n = -2\varepsilon_0(\varepsilon-1)\frac{\sigma_{своб}}{2\varepsilon_0\varepsilon} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\sigma_{своб}$$

Задача Вычислить электроемкости сферического и цилиндрического конденсаторов, между обкладками которых находится диэлектрик.

А Сферический конденсатор



Гауссова поверхность S

$a \le r \le b$: $\oint_S \vec{D}\,d\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot D(r) = q$

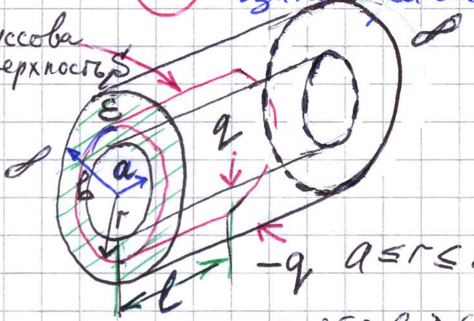
$$\Rightarrow D(r) = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$$

$$\Rightarrow \varphi(r) = -\int E(r)\,dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} + C_1$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\, b\cdot a}{b-a}$$

Б Цилиндрический конденсатор



q Кл/м — на ед. длины

$a \le r \le b$: $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\pi r \cdot l\, D(r) = q \cdot l$

$$\Rightarrow D(r) = \frac{q}{2\pi r} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi r\varepsilon\varepsilon_0}$$

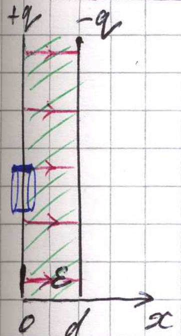
$$\Rightarrow \varphi(r) = -\int E(r)\,dr = -\frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln r + C_1$$

$$\varphi(a) - \varphi(b) = \frac{q}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} = U$$

$$\Rightarrow C/_{1м} = \frac{q/1м}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\ln b/a}$$

Из-за диэлектрика электроемкость возрастает в ε раз.

Задача Энергия электростатического поля в диэлектрич. средах



Поле в конденсаторе с диэлектриком:

$$\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\Delta S = \frac{q}{S}\Delta S \Rightarrow D = \frac{q}{S} \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}$$

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad \varphi(x) = -\int E\,dx = -\frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}x + C_1$$

$$U = \varphi(0) - \varphi(d) = \frac{q}{\varepsilon_0\varepsilon S}d \rightarrow \boxed{\frac{q}{U} = C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{2}}$$

электроемкость

Пластины расположены дост. близко, краевыми эффектами пренебрегаем

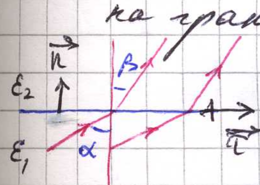
Энергия поля в присутствии диэлектрика:

$$dW = U\,dq \Rightarrow W = \int_0^Q U\,dq = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{2d}\cdot E^2 d^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2}E^2\cdot S d = \stackrel{def}{=} w_e \cdot S d \Rightarrow \boxed{w_e = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2} = \frac{\vec{E}\cdot\vec{D}}{2}}$$

плотность энергии поля в диэл. средах

Задача Получите закон преломл. силовых линий $\vec{E}$ на границе раздела диэлектриков



$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \Rightarrow E_1 \sin\alpha = E_2 \sin\beta$$

$$D_{1n} = D_{2n} \Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \cos\alpha = \varepsilon_2 E_2 \cos\beta$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cdot\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

Задача Покажите, что поле $\vec{E}$ и поле $\vec{D}$ в твердом диэлектрике можно измерить с помощью указанных на рис полостей в форме тонкого цилиндра и тонкого диска