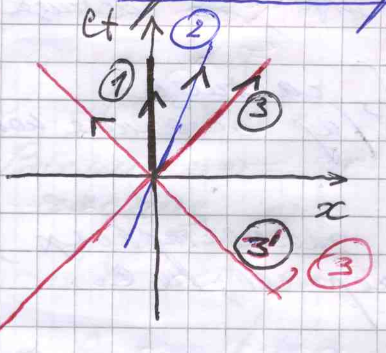
Лекция 16. Использование диаграмм Минковского. Динамика и энергетика вращательного движения твердых тел.

§1. Использование диаграмм Минковского для изображения мировых линий микрочастиц

При движении материальной точечной микрочастицы точка $x(\tau) = (ct(\tau), \vec{x}(\tau))$, изображающая события, происходящие с частицей, описывает так называемую мировую линию в пространстве-времени Минковского. Точечные события и мировые линии материальных частиц удобно показывать на диаграммах Минковского, в системах координат (ct, x), (ct, x, y), (ct, x, y, z) соответственно $(1+1)$-мерного, $(1+2)$-мерного и $(1+3)$-мерного пространств-времени. Особенно удобно и наглядно использование $(1+1)$-мерных диаграмм Минковского.

Приведем примеры мировых линий частиц

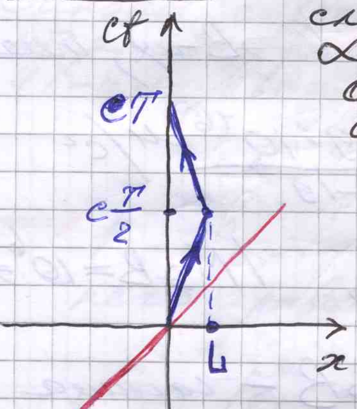


① $x=0$ – мировая линия покоящейся частицы – совпадает с осью ct.

② $x = Vt = \frac{V}{c}ct = \beta ct$, $\beta < 1$ – мировая линия частицы, движущейся с $V<c$.

③ $x = \pm ct$ – мировые линии фотонов, летящих со скоростью света $\pm c$ – образуют световой конус.

Задача Покажите мировую линию космонавта, слетавшего за время T к далёкой звезде α-Центавра, расположенной на расст. L от Солнечной системы. Сравните время T с собственным временем τ_0 космонавта.



Решение: Считаем, что космонавт перемещается с ракетой равномерно со скоростью $V<c$. Соответствующая мировая линия показана синим цветом. В момент времени $T/2$ скорость ракеты меняет направление на противоположное.

Имеем для 4^x-интервалов между событиями

$$\underbrace{(0,0) \text{ и } \left(c\frac{T}{2}, L\right)}_{\text{в системе Земли}} ; \quad \underbrace{(0,0) \text{ и } \left(c\frac{\tau_0}{2}, 0\right)}_{\text{в системе ракеты}}$$

$$\Delta s^2 = c^2\frac{T^2}{4} - L^2 = \Delta s'^2 = c^2\frac{\tau_0^2}{4}$$

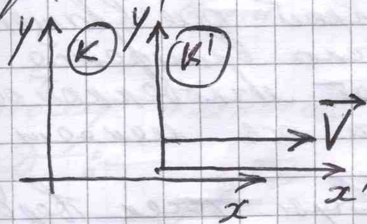
$$L = V\frac{T}{2}$$

$$\longrightarrow c^2\frac{T^2}{4}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) = \frac{c^2}{4}\tau_0^2 \Rightarrow \tau_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = T$$

$$T = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \text{ – известный результат!}$$

Почитайте в учебниках о парадоксе близнецов в СТО. Как этот парадокс разрешается?

Покажем, как изменяются оси (ct, x) пространства-времени Минковского, соответствующие использованию ИСО (K), при переходе к ИСО (K'), движущейся равномерно относит. (K).



Имеем согласно преобразованиям Лоренца:

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad \beta = \frac{V}{c}, \qquad (*)$$

$$x' = \gamma(x - \beta ct). \qquad (**)$$

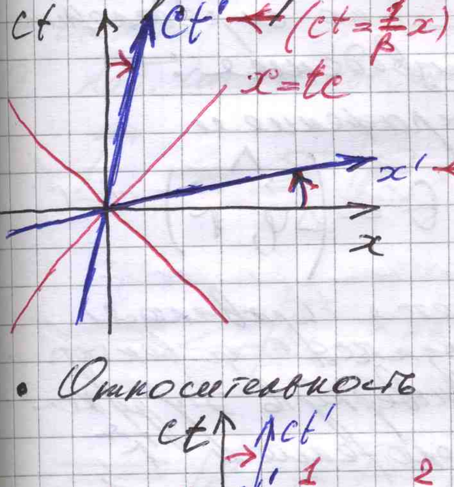
Уравнение оси x' в пр-ве-времени (ct', x') имеет вид $ct' = 0$, следовательно, в силу $(*)$, ось x' в (K) имеет уравнение

Ось x': $ct' = 0 = \gamma(ct - \beta x) \Rightarrow ct = \beta x$

Уравнение же оси ct' в пр-ве-времени (ct', x') имеет вид $x' = 0$, следовательно, в силу $(**)$, ось ct' в (K) имеет уравнение

Ось ct': $x' = 0 = \gamma(x - \beta ct) \Rightarrow x = \beta ct$

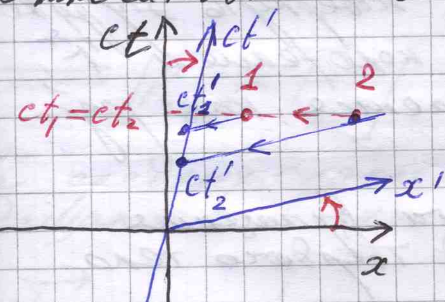
Сказанное иллюстрирует рисунок, показывающий переход от пр-ва-времени (ct, x) к пр-ву-времени (ct', x'):



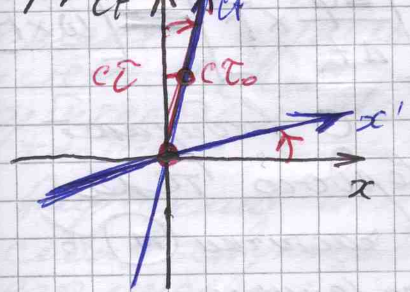
Оси ct' и x' как бы одинаково поджимаются к световому конусу $x = ct$

С использованием диаграмм Минковского в (ct, x) и в (ct', x') легко проиллюстрировать кинематические эффекты СТО

- Относительность одновременности: события (1) и (2), одновременные в (K), на диаграмме Минковского имеют $ct_1 = ct_2$, а на диаграмме Минковского (ct', x'), т. е. в (K') имеем $ct_1' > ct_2'$ — события не одновременны!



- Эффект замедления времени



Часы, покоящиеся в (K'), их мировая линия совп. с осью ct' (при $x'=0$).

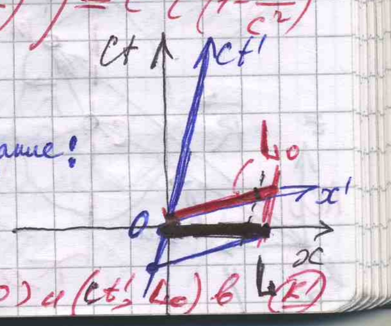
$$\Delta S^2 = c^2\tau_0^2 = c^2\tau^2 - x^2$$

$$\Rightarrow c^2\tau_0^2 = c^2\tau^2\left(1 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2\right) = c^2\tau^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

- Проследите, используя диаграммы с (ct, x) и (ct', x') эффект сокращения размеров движущихся предметов

Указание:

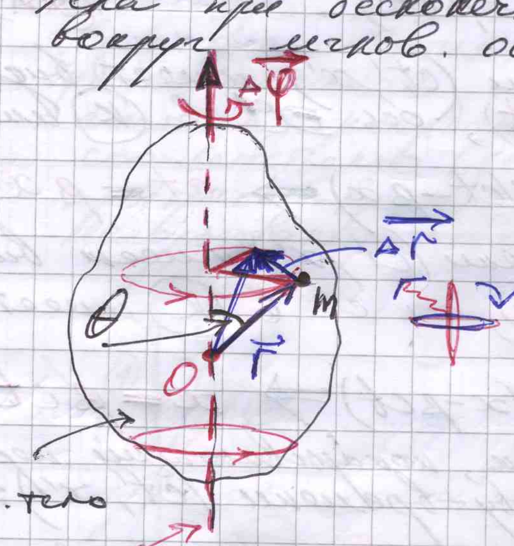


Рассмотрите события: $(0,0)$ и $(0, L)$ — в (K) $\Leftrightarrow$ $(0,0)$ и (ct_2', L_0) в (K')

§2. Момент импульса незакрепленного твердого тела.

Рассмотрим вопрос о вычислении момента импульса твердого тела, не имеющего фиксированной оси вращения. В каждый момент времени такое тело вращается вокруг некоторой оси, которую называют мгновенной осью вращения. С течением времени эта ось меняет свою ориентацию в пространстве.

Покажем, как изменяются радиус-векторы точек твердого тела при бесконечно малом повороте на угол $d\vec{\varphi} = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \Delta\vec{\varphi}$ вокруг мгнов. оси вращения:



Не трудно догадаться что приращение радиус вектора $\vec{r}$ ($\Delta\vec{r}$) некоторой точки тв. тела, относит. опорной точки O на оси вращения, даётся формулой

$$\Delta\vec{r} \simeq [\Delta\vec{\varphi} \times \vec{r}] \leftarrow \text{для малых } |\Delta\vec{\varphi}| = \Delta\varphi.$$

В самом деле, по определению векторного произведения:

- модуль $|\Delta\vec{r}|$ даётся выражением

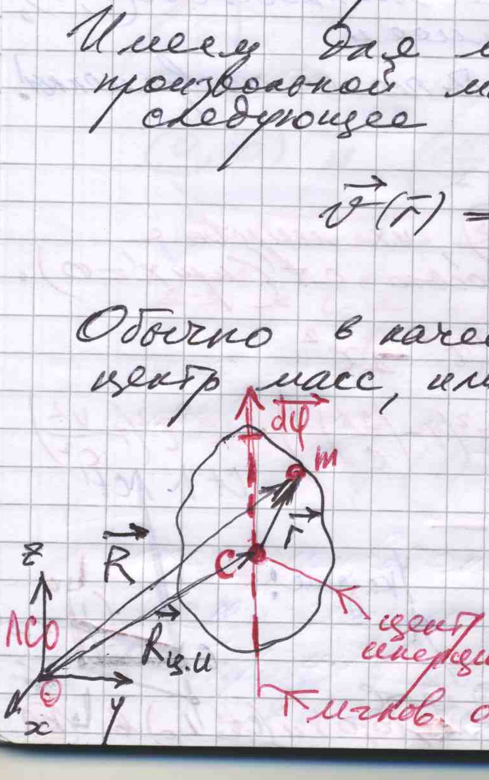
$$|\Delta\vec{r}| = |\Delta\vec{\varphi}||\vec{r}| \cdot \sin\theta, \quad \theta = (\widehat{\Delta\vec{\varphi}, \vec{r}})$$

- направление $\Delta\vec{r}$ определяется правилом правого винта: необходимо „взяться" за вектор $\Delta\vec{\varphi}$, как за рукоятку винта, „повернуть" эту рукоятку до совмещения с положением $\vec{r}$; очевидно, при этом получается, как раз, направление $\Delta\vec{r}$.

Имеем для мгновенной скорости вращения произвольной малой частицы (m) твердого тела следующее выражение:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} \times \vec{r}\right] \equiv [\vec{\omega} \times \vec{r}].$$

Обычно в качестве опорной точки O выбирают центр масс, или центр инерции, твердого тела.



Радиус-вектор $\vec{R}$ произв. частички (m) тв. тела даётся выражением

$$\vec{R}_{(m)} = \vec{R}_{ц.и} + \vec{r}_{(m)} \Longrightarrow \vec{R} = \vec{R}_{ц.и} + \vec{r}$$

(m) будем опускать для простоты обозначений.

Напомним, что радиус $\vec R_{ц.и}$ даётся выражением:

$$\vec R_{ц.и} = \frac{\sum_m m\vec R_m}{\sum m} = \frac{\sum m\vec R}{\sum m},$$

поэтому импульс твердого тела, вычисленный в ЛСО, имеет вид:

$$\vec P_{тв.т} = \sum_m m\dot{\vec R}_m = \frac{d}{dt}\left(\sum m\vec R\right) = M\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m\vec R}{\sum m}\right) = M\dot{\vec R}_{ц.и},$$

при этом импульс твердого тела, вычисленный относит. центра инерции

$$\vec P_{тв.т/ц.и} = \sum_m m\dot{\vec r} = \sum_m m\left(\dot{\vec R} - \dot{\vec R}_{ц.и}\right) = M\dot{\vec R}_{ц.и} - M\dot{\vec R}_{ц.и} = 0$$

и, очевидно, сумма

(*) $$\sum_m m\vec r = \sum m\left(\vec R - \vec R_{ц.и}\right) = M\vec R_{ц.и} - M\vec R_{ц.и} = 0$$

берутся относит. ц. инерции.

Вычислим момент импульса тв. тела относит. начала O лаб. системы отсчета (Лаб. система ИСО):

$$\vec L_O = \sum_m\left[\vec R\times m\dot{\vec R}\right] = \sum_m\left[\left(\vec R_{ц.и}+\vec r\right)\times m\left(\dot{\vec R}_{ц.и}+\dot{\vec r}\right)\right] =$$

$$= \sum_m\left[\vec R_{ц.и}\times m\dot{\vec R}_{ц.и}\right] + \underbrace{\cancel{\sum_m\left[\vec R_{ц.и}\times m\dot{\vec r}\right]}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\sum_m\left[m\vec r\times\dot{\vec R}_{ц.и}\right]}}_{=0} + \sum_m\left[\vec r\times m\dot{\vec r}\right]$$

$$= \left[\vec R_{ц.и}\times\vec P_{ц.и}\right] + \sum_m\left[\vec r\times m\dot{\vec r}\right]$$

Два средних слагаемых в силу (*), т.е. $\sum_m m\vec r = 0$, обращаются в нуль и поэтому

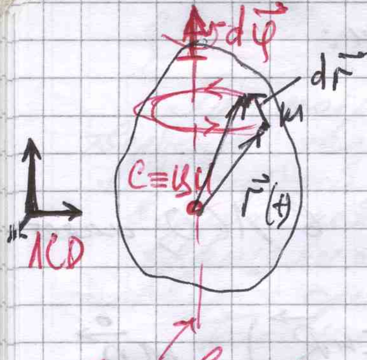
$$\vec L_{тв.т} = \vec L_{орбит} + \vec L_{внутр} = \left[\vec R_{ц.и}\times\vec P_{тв.т.}\right] + \sum_m\left[\vec r\times m\dot{\vec r}\right]$$

момент импульса тв. тела в произв. инерциальной системе (ЛСО) разбивается на две слагаемых:

1) орбитальный момент импульса тв. тела как мат. частицы с массой $M=\sum m$ и радиус-вектором $\vec R_{ц.и}$,
2) внутренний или собственный момент импульса тв. тела соответствующий вращению тв. тела относит. центра его инерции.

Замечание. Модель абсол. тв. тела соотв. идеализации, при которой $|\vec r_{ij}| = |\vec R_i - \vec R_j|$, относит. расстояния любых двух точек (i) и (j) тв. тела, не изменяются с теч. времени:

$$|\vec r_{ij}| = |\vec R_i(t) - \vec R_j(t)| = |\overrightarrow{const}_{ij}| = |\vec r_i(t) - \vec r_j(t)|$$



мгнов. ось вращения

$\forall\, m \in$ тв. телу: $\vec{r}(t) = \vec{R} - \vec{R}_{ц.м}$ — зависит от t,

но $|\vec{r}(t)| = const$,

т.е. $\vec{r}^{\,2} = \vec{r}\cdot\vec{r} = const$, поэтому

$$\frac{d\,\vec{r}^{\,2}}{dt} = 2\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \perp \vec{r},$$

что согласуется с ф-лой $\dot{\vec{r}} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$,

так как $\vec{r}\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}] = 0$,

в силу того, что $[\vec{\omega}\times\vec{r}] \perp \vec{\omega}, \vec{r}$.

Уже из факта $\vec{r}^{\,2}(t) = const$ следует, что

$$\frac{d\,\vec{r}^{\,2}(t)}{dt} = 2\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}} \perp \vec{r} \Rightarrow \dot{\vec{r}} = [\vec{\omega}\times\vec{r}],$$

как было показано выше в начале раздела.

Итак, ключевая формула данного раздела — это выражение для момента импульса тв. тела, вычисленное относит. произвольной инерциальной ЛСО-системы:

$$\vec{L}_{тв.т} = [\vec{R}_{ц.м}\times M\dot{\vec{R}}_{ц.м}] + \sum_m [\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}] =$$

$$= \vec{L}_{орбит} + \vec{L}_{собств}.$$ Здесь $\dot{\vec{r}} = [\vec{\omega}\times\vec{r}]$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \vec{\omega}(t)$$ — мгнов. угловая скорость вращения тв. тела, определяемая через элементарный угол поворота вокруг мгновенной оси вращ.

§3. Вычисление внутреннего или собственного момента импульса, углового момента твердого тела. Понятие о тензоре инерции твердого тела.

Займёмся вычислением собственного или внутреннего момента импульса твердого тела:

$$\vec{L}_{собств} = \vec{L}_{внутр} \overset{def}{=} \sum_m [\vec{r}\times m\dot{\vec{r}}] =$$

$$= \sum_m [\vec{r}\times m[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = \sum_m m[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$$

Здесь мы встречаемся с двойным векторным произведением трёх векторов

$$[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$$

Такое произведение вычисляют по формуле бац минус цаб, $\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, в соответств. с произношением английских букв в точной формуле

$$[\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

Имеем в рассматриваемом случае

$$[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{r}\cdot\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega}).$$

По определению векторов и их скалярных произведений:

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$$

$$\vec{r}\cdot\vec{\omega} = \sum_{k=1}^{3} x_k\cdot\omega_k, \quad \vec{r}\cdot\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i x_i = \sum_{i,k=1}^{3} x_i x_k \delta_{ik}$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i=k, \\ 0, & i\neq k. \end{cases}$$ — определение символа Кронекера

Получаем для $i^{\text{ой}}$ компоненты $[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]_i$ проекции $[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$ на i-ую ось системы координат:

$$[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]_i = \cancel{\omega_i}\cdot\sum_{k,l} x_l\cdot x_l \delta_{ik}\omega_k - x_i\cdot\sum_k x_k\omega_k =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{3} x_l x_l \omega_k \delta_{ik} - \sum_{k=1}^{3} x_i x_k \omega_k = \quad (A)$$

$$= \sum_k (r^2\delta_{ik} - x_i x_k)\,\omega_k$$

Здесь применён известный трюк преобразования ω_i в выражение

$$\omega_i = \sum_{k=1}^{3}\omega_k \delta_{ik}$$

с тем, чтобы у обоих слагаемых в (A) ω_k можно было вынести за скобку.

Для $i^{\text{ой}}$ компоненты $\vec{L}$, L_i — i-ой проекции $\vec{L}$ на i-ую коорд. ось, получаем, таким образом, следующее выражение:

$$L_i = \sum_m m[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]_i = \sum_{k=1}^{3} J_{ik}\omega_k,$$

где введён тензор инерции тв. тела

$$J_{ik} \overset{def}{=} \sum_m m(r^2\delta_{ik} - x_i x_k) =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_m m(x_2^2+x_3^2), & -\sum_m m x_1 x_2, & -\sum m x_1 x_3 \\ -\sum_m m x_2 x_1, & \sum_m m(x_1^2+x_3^2), & -\sum m x_2 x_3 \\ -\sum_m m x_3 x_1, & -\sum m x_3 x_2, & \sum_m m(x_1^2+x_2^2) \end{pmatrix}$$

задающийся в выбранной системе координат некоторой матрицей.

Можно показать что для шарообразного однородного твердого тела массы M и радиуса R приведённый выше тензор сводится к диагональной матрице

т.е. $J_{ik}^{(шара)} = I_ш\cdot\delta_{ik} \to \vec{L}_ш = I_ш\cdot\vec{\omega}$ $\quad J_{ik} = \begin{pmatrix} I_ш = \frac{2}{5}MR^2, & 0, & 0 \\ 0, & I_ш, & 0 \\ 0, & 0, & I_ш \end{pmatrix}$