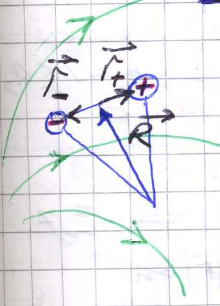
Лекция 15. Примеры граничных задач электростатики диэлектриков. Простые модели поляризации диэлектрических сред.

§1. Силы, действующие на жидкий диэлектрик в неоднородном электрическом поле. Втягивание конденсаторного масла в пространство между пластинами плоского конденсатора.



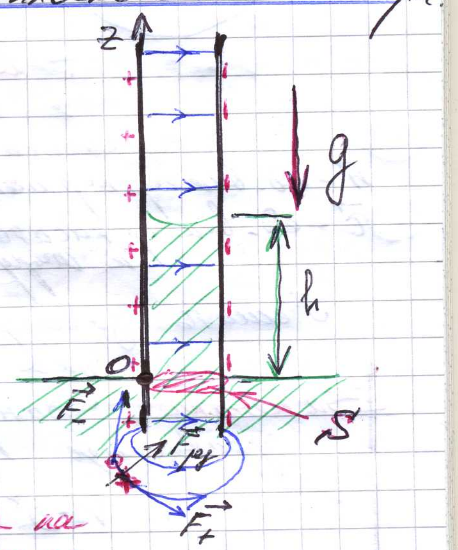
На электрический диполь в неоднородном электрическом поле $\vec E(\vec r)$ действует сила

$$\vec F = q\vec E(\vec R+\vec r_+) - q\vec E(\vec R+\vec r_-)$$

$$\cong q\frac{\partial \vec E}{\partial X_\alpha}x_{+\alpha} - q\frac{\partial \vec E}{\partial X_\alpha}x_{-\alpha} =$$

$$= q(\vec d\cdot\vec\nabla_R)\vec E(\vec R) = (\vec p_e\cdot\vec\nabla_R)\vec E(\vec R)$$

$$= \vec\nabla_R(\vec p_e\cdot\vec E(\vec R))$$ — сила, действующая на одиночный электрический диполь.



Легко вычислить и объемную силу, действующую на 1м³ жидкого диэлектрика, такая сила даётся выражением:

$$\vec F = n(\vec p_e\cdot\vec\nabla)\vec E = (\vec P\cdot\vec\nabla_R)\vec E(\vec R),$$ $\vec P = n\vec p_e$ — поляризация диэлектрика, n — концентрация диполей

С др. стороны

$$\vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P \Rightarrow \vec P = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec E \Rightarrow \vec F = \varepsilon_0(\varepsilon-1)(\vec E\cdot\vec\nabla_R)\vec E$$

Из тождества $[\vec E\times[\vec\nabla\times\vec E]] = \frac{1}{2}\vec\nabla\vec E^2 - (\vec E\cdot\vec\nabla)\vec E = 0$ получаем

$$(\vec E\cdot\vec\nabla_R)\vec E = \frac{1}{2}\vec\nabla_R\vec E^2 \Rightarrow \vec F = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2}\vec\nabla_R\vec E^2.$$

Как показывает опыт, жидкий диэлектрик втягивается в пространство между пластинами конденсатора (см. рис. справа).

Высота h, на которую поднимается жидкий диэлектрик легко вычисляется с использованием соотношения:

$$\int_{-\infty}^{0} F_z\,\Delta S\,dz = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2}\int_{-\infty}^{0}\frac{d(\vec E^2)}{dz}S\,dz = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2}E^2 S = \rho g h S$$

$-\infty$ ← координата дна ванны; $-\infty$ ← координата дна ванны

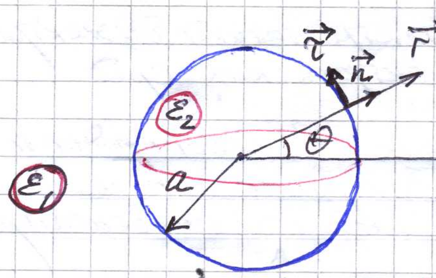
$$\Rightarrow \rho g h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{2}\vec E^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2}{2d^2},$$ U — напряжение на конденсаторе, d — расст. между обкладками.

Слои диэлектрика от дна ванны ($z=-\infty$) до уровня $z=0$ "подпирают" столб диэлектрика высотой h.

Полученная формула для h может быть использована в лабораторной работе, в которой определяется диэлектрическая проницаемость конденсаторного масла.

§2. Диэлектрический шар во внешнем однородном электростатическом поле.

В качестве примера использования граничных условий для полей $\vec E$ и $\vec D$ решим задачу о диэлектрическом шаре радиуса a в однородном электрич. поле $E_0 = (0, 0, E_0)$.



$\vec{n}^2=1$

$\vec{\tau}^2=1$

В однородном электрическом поле $\vec{E}_0=(0,0,E_0)$ в диэлектрике с проницаемостью ε_1 находится диэлектрический шар радиуса a и проницаемостью ε_2.

Требуется определить электрическое поле во всем пространстве, т.е. в шаре, при $r\le a$ и вне шара, при $r\ge a$, если задано граничное условие:

$\vec{n}$ – ед. вектор нормали

$\vec{\tau}$ – ед. вектор касательной к шару.

$$\vec{E}\Big|_{|\vec{r}|\gg a}=(0,0,E_0),\ \text{т.е. } \varphi(\vec{r})\Big|_{|\vec{r}|\gg a}=-E_0 z$$

Решать задачу будем, опираясь на принцип суперпозиции для полей и физическую интуицию.

Замечание. Данную задачу можно решать также, используя уравнения Лапласа или Пуассона (если шар заряжен):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{своб},\ \Rightarrow\ \Delta\varphi=-\frac{\rho_{своб}}{\varepsilon_0\varepsilon}\ \Rightarrow\ \boxed{\Delta\varphi=-\frac{\rho_{своб}}{\varepsilon_0\varepsilon}}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0\ \Longrightarrow\ \vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi$$

ур-е Пуассона электростатики диэлектриков.

В различных областях поле $\vec{E}(\vec{r})$ ищем в след. форме:

$r\le a$: $\vec{E}=\vec{E}_0+\alpha\vec{P}$, где $\vec{P}$ – эл. дипольный момент шара

α – некоторая константа.

$r\ge a$: $\vec{E}=\vec{E}_0+\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-\vec{p}r^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 r^5}$.

Внутри шара поле представляем в виде суперпозиции $\vec{E}_0$ внешнего поля и некоторого поля $\alpha\vec{P}$, связанного с поляризацией шара.

Снаружи поле ищем в виде суперпозиции внешнего поля $\vec{E}_0$ и электрического поля диполя $\vec{P}$.

Подлежат определению константа α и эл. дипольный момент $\vec{P}$ шара. Должны быть удовлетворены граничные условия для полей при $r=a$:

$$E_{1\tau}=E_{2\tau},\quad D_{1n}=D_{2n}$$

Из граничных условий получаем уравнение:

$$\cancel{\vec{E}_0\cdot\vec{\tau}}+\alpha\vec{\tau}\cdot\vec{P}=\cancel{\vec{E}_0\cdot\vec{\tau}}-(\vec{\tau}\cdot\vec{P})\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a^5}$$

$$\Rightarrow\quad \alpha=-k\frac{1}{\varepsilon_1 a^3}=-\frac{k}{\varepsilon_1 a^3}.$$

$$\varepsilon_2(\vec{E}_0\cdot\vec{n})+\alpha(\vec{p}\cdot\vec{n})\varepsilon_2=\varepsilon_1\vec{E}_0\cdot\vec{n}+\frac{2(\vec{p}\cdot\vec{n})}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$$

$$\Rightarrow\quad(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\vec{E}_0\cdot\vec{n})=\frac{\varepsilon_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a^3}(\vec{p}\cdot\vec{n})+\frac{2(\vec{p}\cdot\vec{n})}{4\pi\varepsilon_0 a^3}=$$

$$=\frac{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}{\varepsilon_1}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\cdot(\vec{p}\cdot\vec{n}),$$

откуда определяем $|\vec P| = |P_z|$, $P_z = P$ (проекция $\vec P$ на ось z):

$$P = \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0$$ — знак P может быть и >0, и <0.

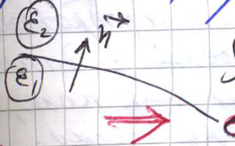
Используя полученные величины, определяем электрич. поле при $r \le a$:

$$\vec E = \vec E_0 - \frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\cancel{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}\cancel{4\pi\varepsilon_0 a^3}\vec E_0\cdot\frac{1}{\cancel{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a^3}} = \vec E_0\frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1},$$

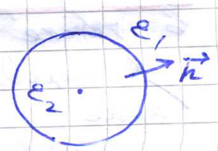
в частности, при $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$:

$$\vec E\Big|_{r\le a} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\vec E_0 = \vec E_{int}$$ — поле внутри шаровой полости.

Легко может быть определена и поверхностная плотность связанных зарядов на поверхности шара. Исходим из граничных условий для $\vec P$:



$$\rho_{связ} = -\vec\nabla\cdot\vec P \longrightarrow \sigma_{связ} = P_{2n} - P_{1n} = \longleftarrow$$



$$\Longrightarrow \sigma_{связ} = P_{1n} - P_{2n}$$

(см. лекцию 14)

$$= \varepsilon_0(\varepsilon_2-1)E_{2n} - \varepsilon_0(\varepsilon_1-1)E_{1n} =$$
$$= \varepsilon_0(E_{1n} - E_{2n})$$

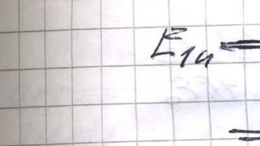
$$E_{2n} = \vec E_0\cdot\vec n + \alpha(\vec P\cdot\vec n) = E_0\cos\theta - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a^3}(\vec n\cdot\vec P) =$$
$$= E_0\cos\theta - \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}E_0\cos\theta = \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}E_0\cos\theta,$$
$$E_{1n} = \vec E_0\cdot\vec n + \frac{2\vec p\cdot\vec n}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 a^3} = E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}\right)$$
$$= E_0\cos\theta\,\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}$$

$$\Longrightarrow \sigma_{связ} = \varepsilon_0(E_{1n} - E_{2n}) = \varepsilon_0 E_0\cos\theta\,\frac{3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}.$$

В качестве проверки полученного решения вычислим электрич. дипольный момент шара:

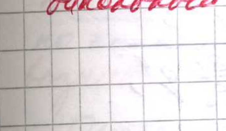
$$P \overset{def}{=} \int\sigma_{связ}\, z\, dS = \varepsilon_0 E_0\frac{3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}a^3\int\cos^2\theta\, d\Omega$$
$$= \varepsilon_0 E\,\frac{3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}a^3 4\pi\cdot\frac{1}{3} =$$
$$= 4\pi a^3\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}\varepsilon_0 E$$ — совпадает с получ. выше выр-ем!

Интересен частный случай $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$:



$$P\Big|_{\varepsilon_2=\varepsilon,\,\varepsilon_1=1} = 4\pi a^3\varepsilon_0 E_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}$$ — дип. момент диэл. шара с $\varepsilon>1$ во внешнем поле

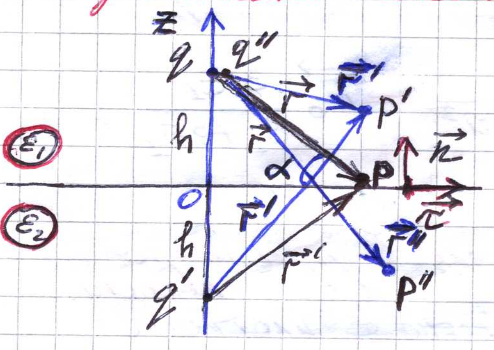
Также интересен частный случай $\varepsilon_1 = \varepsilon$ и $\varepsilon_2 = 1$ — полости радиуса a



$$\vec E\Big|_{r\le a} = \frac{3\varepsilon}{1+2\varepsilon}\vec E_0$$ — поле внутри полости

§3. Заряд q на расстоянии h от границы раздела двух диэлектриков с ε_1 и ε_2.

В качестве еще одной задачи электростатики диэлектриков рассмотрим, как вычисляется электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q, находящимся в диэлектрике с проницаемостью ε_1 на расстоянии h от границы раздела диэлектрика с ε_1 и диэлектрика с ε_2. Оба диэлектрика полностью заполняют соответствующие полупространства.



$\vec{n}, \vec{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к границе раздела.

Имеем для полей $\vec{E}$ при $z \geq 0$ и $z \leq 0$

$$z \geq 0: \quad \vec{E}_{P'} = k\frac{q\vec{r}}{\varepsilon_1 r^3} + k\frac{q'\vec{r}\,'}{\varepsilon_1 r'^3},$$

$$z \leq 0: \quad \vec{E}_{P''} = k\frac{q''\vec{r}\,''}{\varepsilon_2 r''^3}.$$

Задачу решаем методом изображений: поле при $z \geq 0$ в точке наблюдения P' создают заряды q и его изображение q', находящееся на расстоянии h от границы раздела в диэл. поле при $z \leq 0$ в точке наблюдения P'' ищем как поле, создаваемое зарядом q'', помещенным в ту же точку, что и исходный заряд q. Синим цветом показаны $\vec{r}, \vec{r}\,'$ и $\vec{r}\,''$, проведенные соответственно в точки P' и P''; черным показаны радиус-векторы, отложенные от зарядов к точке P на границе раздела диэлектриков.

Для определения неизвестных зарядов q' и q'' удовлетворим граничным условиям $D_{1n} = D_{2n}$ и $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ на границе раздела при $|\vec{r}\,'| = |\vec{r}| = |\vec{r}\,''| = r$.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}: \quad k\frac{q\cos\alpha}{\varepsilon_1 r^2} + k\frac{q'\cos\alpha}{\varepsilon_1 r^2} = k\frac{q''\cos\alpha}{\varepsilon_2 r^2}, \qquad k \overset{def}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad q + q' = q''\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2};$$

$$D_{1n} = D_{2n}: \quad -k\frac{\varepsilon_1 q\sin\alpha}{\varepsilon_1 r^2} + k\frac{\varepsilon_1 q'\sin\alpha}{\varepsilon_1 r^2} = -\frac{\varepsilon_2 q''\sin\alpha}{\varepsilon_2 r^2}k,$$

$$\Rightarrow \quad q - q' = q''.$$

Решая полученную систему уравнений определяем заряды q' и q'':

$$\begin{cases} q - q' = q'', \\ q + q' = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}q'', \end{cases}$$

$$q' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}q, \quad q'' = \frac{2\varepsilon_2 q}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

ε_2 $\vec{n}$ ε_1

$$\rho_{связ} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \rightarrow P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{связ}$$

Из граничного условия для векторов поляризации определяем плотность связанных зарядов на границе диэлектриков:

В нашем случае $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$ $\Rightarrow$

$$\sigma_{связ} = P_{2n} - P_{1n} = \varepsilon_0(E_{1n} - E_{2n}) =$$

$$= \varepsilon_0 k q\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{\varepsilon_1 r^3} + \varepsilon_0 k q'\frac{\vec{r}\,'\cdot\vec{n}}{\varepsilon_1 r^3} - k\varepsilon_0\frac{q''\vec{r}\,''\vec{n}}{\varepsilon_2 r^3} =$$

$$= -\frac{q\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_1 r^2} + \frac{q'\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_1 r^2} + \frac{q''\sin\alpha}{4\pi\varepsilon_2 r^2} =$$

$$= -q\frac{h}{4\pi r^3\varepsilon_1}\left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} - \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\right] = -\frac{qh}{4\pi\varepsilon_1 r^3}\,\frac{2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Полный связанный заряд на границе раздела получается интегрированием по плоскости $z=0$:

$$q_{\text{связ}} = \int\limits_0^\infty \sigma_{\text{связ}}\, 2\pi\rho\, d\rho = -\frac{q\, h}{4\pi\varepsilon_1}\, \frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\, 2\pi \int\limits_0^\infty \frac{\rho\, d\rho}{(h^2+\rho^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{q\, h\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)\cdot 2}\cdot(-2)\,(h^2+\rho^2)^{-1/2}\Big|_{\rho=0}^{\infty} =$$

$$= -\frac{q\, h\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)\, h} = -\frac{q\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}$$

Проверим полученный результат на частном случае $\varepsilon_1=1$ и $\varepsilon_2=\infty$ (полупространство с $z\le 0$ – проводник):

$$q_{\text{связ}}\Big|_{\substack{\varepsilon_2=\infty\\ \varepsilon_1=1}} = -q\,,$$ как и д. быть.

Итак, имеем следующие заряды, определяющие электростатическое поле во всем пространстве:

$$q\,,\quad q' = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\, q\;;\quad q'' = \frac{2\varepsilon_2 q}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\;;$$

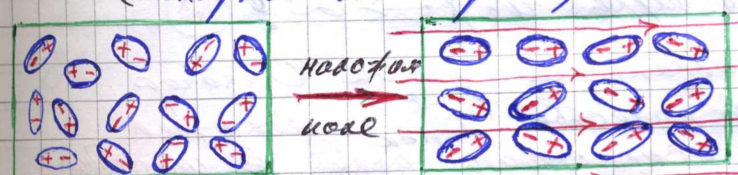
$$q_{\text{связ}} = -\frac{q(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)} = \frac{q'}{\varepsilon_1}.$$

§4. Оценки порядков величин дипольных моментов молекул (атомов) полярных и неполярных диэлектриков.

Напомним, что в отсутствие внешнего электрического поля атомы (молекулы) неполярных диэлектриков имеют нулевые электрические дипольные моменты. Атомы (молекулы) же полярных диэлектриков обладают ненулевыми дипольными моментами и при нулевых внешних полях.

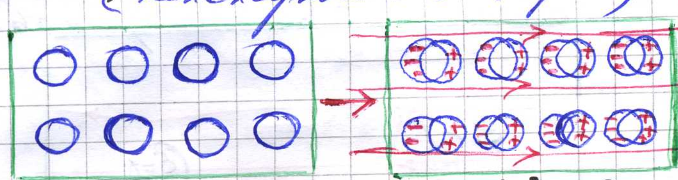
При наложении внешнего электрического поля в случае полярных диэлектриков возникает так называемая ориентационная поляризуемость (дипольные моменты выстраиваются по полю). В случае же неполярных диэлектриков возникает индуцированная поляризуемость.

Ориентационная поляризация. (полярные диэлектрики)



$\vec{E}=0,\ \vec{p_e}\ne 0$

Индуцированная поляризация (неполярные диэлектрики)



$\vec{E}=0,\ \vec{p_e}=0$

$\vec{E}\ne 0$
$p_{e(ind)}\ne 0$

$\vec{p_e}=q\vec{d}$, $|\vec{p}_{\text{ат}}|\sim|q|\cdot d\sim$
$\sim 1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{Кл}\cdot 10^{-10}\,\text{м}$
$\sim 1{,}6\cdot 10^{-29}\,\text{Кл}\cdot\text{м}$

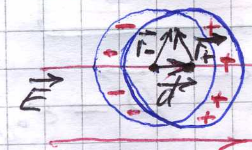
Оценка эл. дип. момента атома (молекулы) неполярных диэлектриков

$|\vec{E}_{\text{ат}}|\sim k\dfrac{q}{d^2}=9\cdot 10^9\,\dfrac{1{,}6\cdot 10^{-19}}{10^{-20}}\sim 10^{11}\,\dfrac{\text{В}}{\text{м}}$

оценка атомного поля.

$V=V_{\text{ат}}=\frac{4\pi}{3}a^3$

$\beta \overset{def}{=} \dfrac{|\vec{p}_{\text{ат(ind)}}|}{\varepsilon_0|\vec{E}|} = 4\pi a^3$ – поляризуемость атома.



$\vec{E}+\vec{E}_{ind}=0$

$\vec{E}_{ind}=\dfrac{\rho(\vec{r}_+-\vec{r}_-)}{3\varepsilon_0}=-\vec{E}$

$\vec{p}_{\text{ат(ind)}}=\int\rho\,\vec{d}=\rho(\vec{r}_--\vec{r}_+)V=\rho\vec{d}\,V_{\text{ат}}$
$=3\varepsilon_0\vec{E}\,V_{\text{ат}}=3\varepsilon_0\,\frac{4\pi}{3}a^3\vec{E}$

$\Rightarrow \vec{p}_{\text{ат(ind)}}=4\pi\varepsilon_0 a^3\vec{E}\overset{def}{=}\varepsilon_0\beta\vec{E}$

§5. Простые модели диэлектрической восприимчивости.

А. Случай неплотных диэлектриков.

При вычислении поляризации $\vec P$ диэлектрика следует иметь в виду определение поляризации через поле $\vec E$ в диэлектрике

$$\vec P \overset{def}{=} \varepsilon_0 \chi \vec E,$$

— Феноменологическое определение поляризации для однор. и изотр. линейных диэлектриков

С другой стороны, вычисляя $\vec P$ исходя из поляризации отдельных атомов, следует иметь в виду, что физически поляризация отдельных атомов возникает под действием так называемого локального поля

$$\vec E_{лок} \overset{def}{=} \vec E - \vec E_{поляризации},$$

в месте нахождения атома за вычетом из поля $\vec E$ поля $\vec E_{поляризации} = \vec E_{ind}$ отдельного атома

$$\vec E_{поляриз.} = \vec E_{ind} = \frac{\rho(\vec r_+ - \vec r_-)}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho \vec d}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec P_{ат(ind)}}{3\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec E_{лок} = \vec E - \vec E_{поляриз} = \vec E + \frac{\vec P}{3\varepsilon_0}$$

Задача: вычислить $\vec E_{ind} = \frac{\rho(\vec r_+ - \vec r_-)}{3\varepsilon_0}$ $\Leftarrow$ получите эту формулу.

Учитывая сделанные замечания, получаем в случае неплотных диэлектриков:

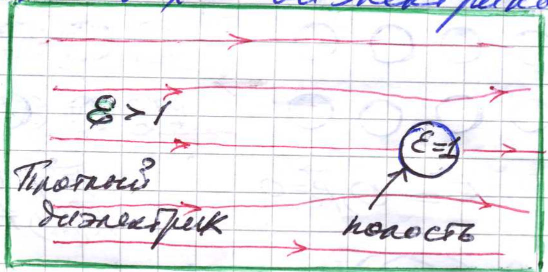
$$\underbrace{\vec P \overset{def}{=} \varepsilon_0\chi\vec E}_{\text{по определению } \chi} = \underbrace{\varepsilon_0 n\beta \vec E_{лок}}_{\text{исходя из физич. механизма поляризации}} = \varepsilon_0 n\beta\left(\vec E + \frac{\vec P}{3\varepsilon_0}\right) =$$

$$= \varepsilon_0 n\beta\left(\vec E + \frac{\varepsilon_0\chi\vec E}{3\varepsilon_0}\right) \Rightarrow \chi\left(1-\frac{n\beta}{3}\right) = n\beta$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{n\beta}{1-\frac{n\beta}{3}},$$ здесь n — концентрация атомов.

Б. Случай плотных диэлектриков (Онзагер).

Полученная формула имеет неприятную особенность: при достаточно больших n может случиться, что $1 = \frac{n\beta}{3}$, т.е. знаменатель обращается для достаточно плотных диэлектриков в нуль и $\chi \to \infty$! NB.



Голландский физик Онзагер в качестве $\vec E_{лок}$ предложил использовать поле в шарообразной полости, см. §2 лекции.

$$\vec E_{лок} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\vec E$$ NB

В таком случае

$$\vec P = \varepsilon_0\chi\vec E = \varepsilon_0 n\beta \vec E_{лок} = \varepsilon_0 n\beta\frac{3\varepsilon}{2\varepsilon+1}\vec E = \varepsilon_0 n\beta\frac{3\chi+3}{2\chi+3}\vec E$$

$$\Rightarrow \chi(2\chi+3) = 3n\beta\chi + 3n\beta \Rightarrow$$

$$\chi^2 - \frac{3n\beta-3}{2}\chi - \frac{3n\beta}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi = \frac{3n\beta-3}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{(n\beta-1)^2 + \frac{8n\beta}{3}}$$

Разложим функцию $f(n\beta)=\sqrt{(n\beta-1)^2+\frac{8n\beta}{3}}=\sqrt{n^2\beta^2+\frac{2n\beta}{3}+1}$ по степеням $n\beta$:

$$f(0)=1,\ f'(n\beta)=\frac{n\beta+\frac{1}{3}}{\sqrt{n^2\beta^2+\frac{2n\beta}{3}+1}}\rightarrow f'(0)=\frac{1}{3}$$

$$f''(n\beta)=\frac{1}{\sqrt{n^2\beta^2+\frac{2n\beta}{3}+1}}-\frac{\left(n\beta+\frac{1}{3}\right)^2}{\left(n^2\beta^2+\frac{2n\beta}{3}+1\right)^{3/2}}\Rightarrow f''(0)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

поэтому

$$f(n\beta)\cong 1+\frac{n\beta}{3}+\frac{8}{9}\frac{n^2\beta^2}{2!}=1+\frac{n\beta}{3}+\frac{4n^2\beta^2}{9}$$

Следовательно, для χ получаем выражение

$$\chi\cong\frac{3n\beta}{4}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\left(1+\frac{n\beta}{3}+\frac{4n^2\beta^2}{9}\right)=$$

$$=n\beta+\frac{n^2\beta^2}{3}=n\beta\left(1+\frac{n\beta}{3}\right)$$

И это выражение не имеет неприятных особенностей при $\frac{n\beta}{3}=1$

Отметим также, что оба полученные выражения

$$\chi_{\text{неплотн. диэл}}\simeq\frac{n\beta}{1-\frac{n\beta}{3}}\quad \text{и}\quad \chi_{\text{плотн. диэл}}\simeq n\beta\left(1+\frac{n\beta}{3}\right)$$

при $\frac{n\beta}{3}<1$ хорошо согласуются друг с другом.

Приведем числ. пример для одного из диэлектриков:

$$\chi_{\text{эксп}}=2{,}64\ ;\quad \chi_{\text{теор}}\simeq 2{,}72$$ — довольно хорошее согласие! NB

§6. Понятие о нелинейных изотропных диэлектриках.

NB Почитайте более подробно о явлении гистерезиса в учебниках.

Помимо простых линейных изотропных или анизотропных диэлектриков со следующими материальными соотношениями:

$$\vec{D}=\varepsilon_0(1+\chi)\vec{E},\ \vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}\qquad P_i=\varepsilon_0\chi_{ij}E_j$$

Лин. изотр. однор. диэл-ки. $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}$

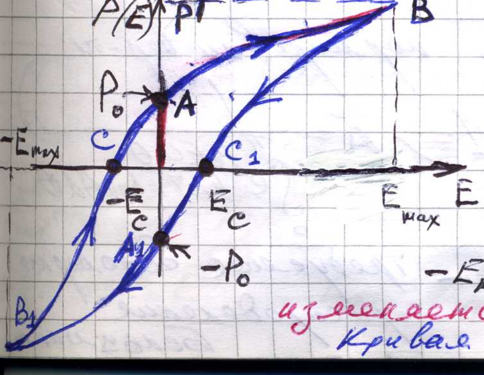
$D_i=\varepsilon_0(\delta_{ij}+\chi_{ij})E_j=\varepsilon_0\varepsilon_{ij}E_j$ Лин. анизотропные однор. диэлектрики.

существуют нелинейные диэлектрики, характеризующиеся нелинейной зависимостью $\vec{P}[\vec{E}]$ поляризации от электрического поля. Для нелинейных изотропных диэлектриков зависимость поляризуемости $\vec{P}$ от поля $\vec{E}$ имеет вид:

$$P(E)=P_0+\varepsilon_0\chi(E)E,\quad \chi=\chi(E)\text{ — нелинейная восприимчивость}$$

P_0 — спонтанная поляризация.

Для таких диэлектриков, их еще называют сегнетоэлектриками, имеет место явление гистерезиса:



при возрастании эл. поля E, начиная с нулевых значений, P(E) изменяется так, как показано на рисунке. При убывании поля E, зависимость P(E) не повторяет ход кривой в прямом направлении.

При циклическом изменении поля от E_{max} до $-E_{max}$ и обратно от $-E_{max}$ до $+E_{max}$ поляризация изменяется различными путями — диэлектрический гистерезис.

Кривая $BACB_1A_1C_1B$ называется петлей гистерезиса.