Лекция 13. Канонические уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона и интегралы движения. Канонические преобразования.

§1. Канонические уравнения Гамильтона.

Итак, мы познакомились с механикой в форме Лагранжа. Это та форма, которую придал Лагранж механике Ньютона. Механика Лагранжа является очень удобной формой механики для многих приложений и дальнейшего развития физической теории. Существует и еще одна очень важная форма механики, так называемая гамильтонова форма, центральными в ней являются уравнения Гамильтона. Получим эти уравнения, стартуя с механики в форме Лагранжа и применяя так называемое преобразование Лежандра от обобщенных координат и скоростей $(q, \dot q)$ к обобщенным координатам q_k и канонически сопряженным к ним обобщенным импульсам p_k, т.е. к набору (q, p).

Ниже, для удобства, проведём сравнение лагранжевой формулировки механики с гамильтоновой формулировкой.

Механика в форме Лагранжа	Механика в форме Гамильтона
В основе данных форм лежат фундаментальные величины	
$L = L(q, \dot q, t) \overset{def}{=} K(q, \dot q) - U(q)$ – лагранжиан, как функция обобщенных координат, скоростей и времени	$H = H(q, p, t) \overset{def}{=} \left(\sum p_k \dot q_k(t) - L\right)\Big\vert_{\dot q = \dot q(\ldots)}$ – гамильтониан, как функция обобщенных координат и импульсов
Состояние механической системы характеризуют точкой в соответствующих пространствах	
В конфигурационном пространстве	В фазовом пространстве
$\underbrace{q = (q_1(t), \ldots, q_f(t)), \ \dot q = (\dot q_1(t), \ldots, \dot q_f(t))}_{f\text{-мерное конфигурационное пр-во}}$	$\underbrace{(q_1(t), \ldots, q_f(t); p_1(t), \ldots, p_f(t))}_{2f\text{-мерное фазовое пр-во}}$

Переход от $(q, \dot q; L)$ к (q, p, H) и обратно осуществляется с помощью формулы, определяющей обобщенные импульсы $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k}$ с использованием преобразования Лежандра:

$$L(q, \dot q, t) \Longrightarrow H(q, p, t) \overset{def}{=} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - L(q, \dot q, t)\right)}_{\text{это и есть функция, определяющая преобразование Лежандра}}\Bigg\vert_{\dot q_k = \dot q_k(q, p, t)}$$

Обобщенные скорости $\dot q$ в формуле, определяющей H, должны быть выражены через q_k обобщенные координаты и импульсы, так как H – функция Гамильтона действительно является функцией q, p и t:

$$dL = \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} d\dot q_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dH = \sum_{k=1}^{f} \left(p_k d\dot q_k + dp_k \dot q_k\right) - \sum_{k=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} d\dot q_k + \frac{\partial L}{\partial t} dt\right) = \sum_{k=1}^{f} \left(\dot q_k dp_k - \dot p_k dq_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Полученная формула для dH как раз и показывает, что H является функцией q_k, p_k и t, $k = 1, \ldots$

В основе лагранжевой и гамильтоновой форм механики лежат следующие фундаментальные уравнения

Уравнения Лагранжа	Уравнения Гамильтона
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0$ — f уравнений второго порядка, $1\le k\le f$ — число степеней свободы	$\begin{cases}\dot q_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\\ \dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}.\end{cases}$ — $2f$ дифференциальных уравнений первого порядка, $1\le k\le f$.

Для описания конкретного движения механической системы (с определёнными начальными данными) необходимо задать начальные условия при $t=t_0$:

$(q_1(t_0),\dots,q_f(t_0);\dot q_1(t_0),\dots,\dot q_f(t_0))\equiv\equiv(q(t_0),\dot q(t_0))$	$(q_1(t_0),\dots,q_f(t_0);p_1(t_0),\dots,p_f(t_0))\equiv\equiv(q(t_0),p(t_0))$

Кроме того, очевидным образом выполняются следующие важные соотношения:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{k=1}^{f}(\dot q_k\dot p_k-\dot p_k\dot q_k)-\frac{\partial L}{\partial t}=-\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

Обобщенные координаты $(q_1,\dots,q_f)$ и соответствующие им обобщенные импульсы $(p_1,\dots,p_f)$ называются канонически сопряженными друг другу переменными.

Приведём несколько примеров гамильтонианов и уравнений Гамильтона простейших физических систем.

① Свободная нерелятивистская частица: $L=\frac{m\vec V^2}{2}\Rightarrow\vec P=\frac{\partial L}{\partial\vec V}=m\vec V,\ \vec V=\frac{\vec P}{m}$

$$\Rightarrow\ H\stackrel{def}{=}(\vec P\cdot\vec V-L)\underset{\vec V=\frac{\vec P}{m}}{=}\vec P\cdot\frac{\vec P}{m}-\frac{m}{2}\frac{\vec P^2}{m^2}=\frac{\vec P^2}{2m},\Rightarrow$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{\vec P}=-\frac{\partial H}{\partial\vec r}=0,\qquad\dot{\vec r}=\frac{\partial H}{\partial\vec P}=\frac{\vec P}{m}$$

② Нерелятивистская частица во внешнем потенциальном силовом поле:

$$L=\frac{m\vec V^2}{2}-U(\vec r)\Rightarrow\vec P=\frac{\partial L}{\partial\vec V}=m\vec V,\ \vec V=\frac{\vec P}{m}\Rightarrow$$ строим Гамильтониан

$$H\stackrel{def}{=}(\vec P\cdot\vec V-L)\underset{\vec V=\frac{\vec P}{m}}{=}\vec P\cdot\frac{\vec P}{m}-\frac{m}{2}\frac{\vec P^2}{m^2}+U(\vec r)=\frac{\vec P^2}{2m}+U(\vec r)$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{\vec P}=-\frac{\partial H}{\partial\vec r}=-\frac{\partial U}{\partial\vec r},\qquad\dot{\vec r}=\frac{\partial H}{\partial\vec P}=\frac{\vec P}{m}$$

③ Нерелятивистская заряженная частица в электромагнитном поле

$$L=\frac{m\vec V^2}{2}+q\vec A\cdot\vec V-q\varphi\Rightarrow\vec{\mathcal P}=\frac{\partial L}{\partial\vec V}=m\vec V+q\vec A\neq m\vec V!\ \vec V=\frac{\vec{\mathcal P}-q\vec A}{m}$$

$$\Rightarrow\ H\stackrel{def}{=}(\vec{\mathcal P}\cdot\vec V-L)\underset{\vec V=\frac{\vec{\mathcal P}-q\vec A}{m}}{=}\vec{\mathcal P}\frac{(\vec{\mathcal P}-q\vec A)}{m}-\frac{m}{2}\frac{(\vec{\mathcal P}-q\vec A)^2}{m^2}-q\vec A\frac{(\vec{\mathcal P}-q\vec A)}{m}+q\varphi=$$

$$=\frac{(\vec{\mathcal P}-q\vec A)^2}{2m}+q\varphi.$$

Уравнения Гамильтона:

$$\dot{\vec{\mathcal P}}=-\frac{\partial H}{\partial\vec r}=-q\vec\nabla\varphi+\frac{q}{m}(\vec{\mathcal P}-q\vec A)_k\vec\nabla A_k,\qquad\dot{\vec r}=\frac{\partial H}{\partial\vec{\mathcal P}}=\frac{\vec{\mathcal P}-q\vec A}{m}.$$

сумма по повторяющимся индексам, $k=1,2,3$.

§2. Интегралы движения. Скобки Пуассона.

Состояние системы в Гамильтоновой механике описывается заданием f обобщенных координат и f обобщенных импульсов и изображается точкой

$$(q(t);p(t)) = (q_1(t),\dots,q_f(t);p_1(t),\dots,p_f(t))$$

в $2f$-мерном фазовом пространстве. Произвольные физические величины рассматриваемой механической (динамической) системы являются функциями координат q_k и импульсов p_k времени t:

$$F = F(q(t),p(t),t) = F(q_1(t),\dots,q_f(t);p_1(t),\dots,p_f(t);t)$$

Определение Физическая величина $F = F(q,p,t)$ называется интегралом движения, если $dF/dt = 0$.

Известны следующие способы определения интегралов движения:

1°. q_k — циклическая координата $\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0$,

$\Rightarrow p_k = \mathrm{const}$. — импульс, канонич. сопряж. q_k — инт. дв-я

2°. Теорема Э. Нётер Пусть преобразования координат и времени вида

однопараметрические преобр-е $\quad q_k \to q_k + \varepsilon f_k(q,t),\ t \to t + \varepsilon h(q,t)$

являются преобразованием симметрии системы, тогда величина

$$I = \sum p_k \delta q_k - H\delta t + \delta\Lambda = \mathrm{const} \text{ — интеграл движения}$$

Здесь $\delta\Lambda$ определяется по изменению лагранжиана системы при преобразовании симметрии, т.е

$$L \to L\frac{dt'}{dt} = L - \frac{d}{dt}\delta\Lambda \quad \text{(см. лекцию N5).}$$

Установим, используя гамильтонову форму механики, критерий того, что величина $F(q,p,t)$ является интегралом движения, для этого вычислим скорость изменения F со временем:

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k\right) + \frac{\partial F}{\partial t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \overset{\mathrm{def}}{=} \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

здесь определена скобка Пуассона величины F с гамильтонианом H:

$$\{F,H\} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

Определение Скобкой Пуассона величин $F_1(q,p,t)$ и $F_2(q,p,t)$ называется выражение

$$\{F_1,F_2\} = \sum_{k=1}^{f}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_k}\frac{\partial F_2}{\partial p_k} - \frac{\partial F_1}{\partial p_k}\frac{\partial F_2}{\partial q_k}\right)$$

3°. Интегралы движения посредством скобок Пуассона

$\Rightarrow F(q,p,t)$ — интеграл движения $\Longleftrightarrow$, когда $\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$.

В частности, если $\dfrac{\partial F}{\partial t}=0$, то $F(q,p)$ — интеграл движения тогда и только тогда, когда $\{F,H\}=0$.

Пример. Для системы с $\dfrac{\partial H}{\partial t}=0$, т.е. с явно независящим от времени гамильтонианом

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial t}+\{H,H\}=\frac{\partial H}{\partial t}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad H=H(p,q)=\sum_{k=1}^{f} p_k \dot q_k - L = \text{const},$$

т.е. функция Гамильтона $H(q,p)$ является интегралом движения.

Канонические уравнения Гамильтона с использованием скобок Пуассона переписываются в следующей симметричной форме:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_k}{dt}=\{q_k,H\}=\sum\limits_{l}\left(\dfrac{\partial q_k}{\partial q_l}\dfrac{\partial H}{\partial p_l}-\dfrac{\partial q_k}{\partial p_l}\dfrac{\partial H}{\partial q_l}\right)=\sum\limits_{l}\delta_{kl}\dfrac{\partial H}{\partial p_l}=\dfrac{\partial H}{\partial p_k}, \\[2ex] \dfrac{dp_k}{dt}=\{p_k,H\}=\sum\limits_{l}\left(\dfrac{\partial p_k}{\partial q_l}\cdot\dfrac{\partial H}{\partial p_l}-\dfrac{\partial p_k}{\partial p_l}\dfrac{\partial H}{\partial q_l}\right)=-\sum\delta_{kl}\dfrac{\partial H}{\partial q_l}=-\dfrac{\partial H}{\partial q_k}. \end{cases}$$

Скобки Пуассона — это фундаментальные объекты теории, сыгравшие очень важную роль в развитии квантовой теории. Исходя из классических скобок Пуассона, можно определить квантовые скобки Пуассона и, тем самым, как говорят, проквантовать классическую микросистему.

§3. Свойства скобок Пуассона. Алгебра скобок Пуассона некоторых физических величин.

Скобки Пуассона обладают следующими, легко доказываемыми, важными свойствами:

1°. $\{F,G\}=-\{G,F\}$ — антисимметричность,

2°. $\{F_1+F_2,G\}=\{F_1,G\}+\{F_2,G\}$ — дистрибутивность.

3°. $\{F_1F_2,G\}=F_1\{F_2,G\}+\{F_1,G\}F_2$,

4°. $\dfrac{\partial}{\partial t}\{F_1,F_2\}=\left\{\dfrac{\partial F_1}{\partial t},F_2\right\}+\left\{F_1,\dfrac{\partial F_2}{\partial t}\right\}$,

← доказательства довольно простые

5°. $\{F_1,\{F_2,F_3\}\}+\{F_2,\{F_3,F_1\}\}+\{F_3,\{F_1,F_2\}\}=0$ — тождество Якоби.

Задача. Докажите свойства 1–4° самостоятельно. Наметим доказательство тождества Якоби.

$$\{F_2,\{F_3,F_1\}\}=\sum_{k,l}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_l}\frac{\partial F_1}{\partial p_l}-\frac{\partial F_3}{\partial p_l}\frac{\partial F_1}{\partial q_l}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_l}\frac{\partial F_1}{\partial p_l}-\frac{\partial F_3}{\partial p_l}\frac{\partial F_1}{\partial q_l}\right)\right\}=$$

$$=\sum_{k,l}\left\{\frac{\partial F_2}{\partial q_k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial p_l\partial p_k}-\frac{\partial F_3}{\partial p_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_l\partial p_k}\right)-\frac{\partial F_2}{\partial p_k}\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial p_l\partial q_k}-\frac{\partial F_3}{\partial p_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_l\partial q_k}\right)\right\}$$

$+$ члены, не содержащие F_1'' — вторые производные

аналогично имеем

$$\{F_3,\{F_1,F_2\}\} = -\{F_3,\{F_2,F_1\}\} = -\sum_{k,l}\Big\{\frac{\partial F_3}{\partial q_k}\Big(\cancel{\frac{\partial F_2}{\partial q_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial p_l \partial p_k}} - \frac{\partial F_2}{\partial p_l}\cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial p_k \partial q_l}}\Big)$$

$$-\frac{\partial F_3}{\partial p_k}\Big(\cancel{\frac{\partial F_2}{\partial q_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_k \partial p_l}} - \frac{\partial F_2}{\partial p_l}\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_k \partial q_l}\Big) + \text{члены, не содержащие } F_1''\Big\}$$

члены с F_1'', таким образом, сократились; но то, что не содержит F_1'', содержит F_2'' и F_3'', а такие члены, по аналогичной выкладке, также сокращаются.

Установим теперь алгебры скобок Пуассона некоторых физических величин, прежде всего, так называемые фундаментальные скобки Пуассона:

1° $$\{q_k, q_l\} = \sum_m\Big(\frac{\partial q_k}{\partial q_m}\frac{\partial q_l}{\partial p_m} - \frac{\partial q_k}{\partial p_m}\frac{\partial q_l}{\partial q_m}\Big) = 0,$$

2° $$\{p_k, p_l\} = \sum_m\Big(\frac{\partial p_k}{\partial q_m}\frac{\partial p_l}{\partial p_m} - \frac{\partial p_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_l}{\partial q_m}\Big) = 0,$$

3° $$\{q_k, p_l\} = \sum_m\Big(\frac{\partial q_k}{\partial q_m}\frac{\partial p_l}{\partial p_m} - \frac{\partial q_k}{\partial p_m}\frac{\partial p_l}{\partial q_m}\Big) = \sum_m \delta_{km}\delta_{lm} = \delta_{kl}.$$

← классический аналог квантовомеханической алгебры Гейзенберга.

Вычислим также скобки Пуассона физических величин нерелятивистской частицы в 3D-пространстве

$$q_k \Rightarrow \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)\ ; \quad p_k \Rightarrow \vec{p} = (p_1, p_2, p_3).$$

Имеем, переписывая результаты вычислений $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$:

(А) $$\{x_i, x_k\} = 0, \quad \{p_i, p_k\} = 0, \quad \{x_i, p_l\} = \delta_{il}$$

Для орбитального момента

$$L_i = \varepsilon_{ikl}\, x_k p_l = \{\vec{x}\times\vec{p}\}_i = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}_i$$

например, $L_1 = \varepsilon_{1kl}\, x_k p_l = x_2 p_3 - x_3 p_2$

(Б) $$\{L_i, x_m\} = \varepsilon_{ikl}\{x_k p_l, x_m\} = \varepsilon_{ikl}\, x_k\{p_l, x_m\} = -\varepsilon_{ikl}\, x_k \delta_{lm} = \varepsilon_{imk}\, x_k.$$

аналогично

(В) $$\{L_i, p_m\} = \varepsilon_{ikl}\{x_k p_l, p_m\} = \varepsilon_{ikl}\{x_k, p_m\}p_l = \varepsilon_{ikl}\,\delta_{km}\, p_l = \varepsilon_{iml}\, p_l$$

Можно показать также, что

(Г) $\boxed{\{L_i, L_k\} = \varepsilon_{ikl} L_l}$, в самом деле, например

$$\{L_1, L_2\} = \{L_1, x_3 p_1 - x_1 p_3\} = \{L_1, x_3\}p_1 + x_3\underbrace{\cancel{\{L_1, p_1\}}}_{0}$$

$$-\underbrace{\cancel{\{L_1, x_1\}}}_{0}p_3 - \{L_1, p_3\}x_1 = \varepsilon_{132}\, x_2 p_1 - \varepsilon_{132}\, p_2 x_1 =$$

$$= p_2 x_1 - x_2 p_1 = L_3 = \varepsilon_{123} L_3$$

и т.д. проверьте оставшиеся случаи.