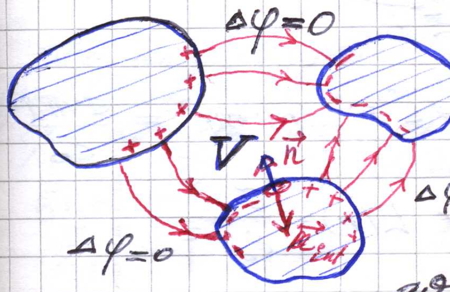
Лекция 13. Энергия системы заряженных проводников. Потенциальные и емкостные коэффициенты. Электростатическое экранирование. Электрический диполь во внешнем поле. Понятие о мультипольном разложении огр. в пр-ве распред. зарядов.

§1. Энергия системы заряженных проводников. Потенциальные и ёмкостные коэффициенты. Электростатическое экранирование.



Вычислим еще раз энергию электрического поля системы заряженных проводников. В самих проводниках поле отсутствует, поэтому энергия сосредоточена в пространстве между проводниками и может быть вычислена с помощью плотности энергии

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}$$ электрического поля:

$$W = \int_V \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} dV = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 dV = \int_V \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\vec{\nabla}(\varphi\vec{\nabla}\varphi) - \varphi\underbrace{\Delta\varphi}_{=0}\right) dV =$$

V = область вне проводников.

$$= \frac{1}{2}\sum_k \oint_{S_k} \varphi_k \frac{\varepsilon_0 \partial\varphi_k}{\partial n_{k(int)}} dS_k = -\frac{1}{2}\sum_{S_k} \oint_{S_k} \varphi_k \cdot \sigma_k \, dS_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} q_k \varphi_k ,$$

здесь было учтено что производная по нормали $n_{k(int)}$,

$$\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial n_{k(int)}} = -\varepsilon_0 \frac{\partial\varphi}{\partial n_k} = \varepsilon_0 E_{n_k} = \sigma_k$$ – поверхностная плотность заряда на k-ом проводнике

направленной внутрь проводника, равна минус производной по внешней нормали.

Используя далее выражение для $\varphi_k = \sum_{k=1}^{N} s_{ik} q_k$, получаем формулу для энергии поля сис. заряженных проводников

$$W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} q_k \varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{N} s_{ik} q_i q_k$$

через потенциальные коэффициенты $s_{ik} = s_{ki}$. Ясно, что энергия поля сосредоточена в пространстве между проводниками. Данную формулу поучительно получить и несколько иначе, а именно, при „подзарядке" системы N проводников:

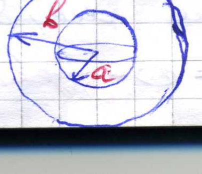
$$dW = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \, dq_k = \sum_{k,i} s_{ki} q_i \, dq_k =$$

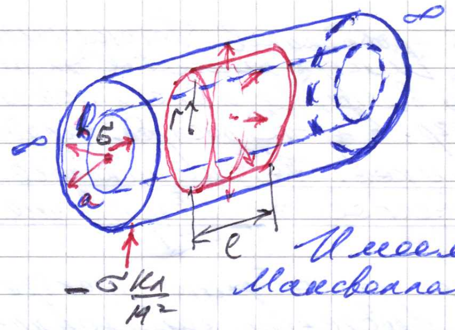
$$= \frac{1}{2}\sum_{k,i}\left(s_{ki} q_i \, dq_k + s_{ik} q_k \, dq_i\right) \xrightarrow[s_{ik}=s_{ki}]{\text{потребуем}} \frac{1}{2}\sum_{i,k} s_{ik} \, d(q_i q_k)$$

Для того, чтобы изменение энергии не зависело от способа подзарядки системы проводников, требуем симметрии потенциальных коэффициентов $s_{ik} = s_{ki}$, dW – в таком случае – полный дифференциал и

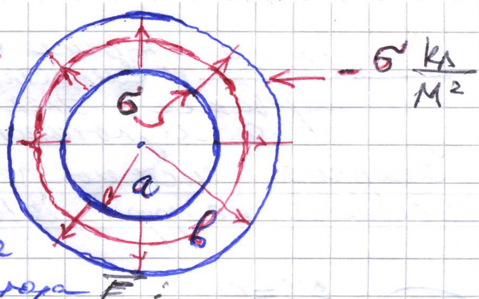
$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} s_{ik} \int_0^{(q_1,\dots,q_N)} d(q_i q_k) = \frac{1}{2}\sum_{i,k} s_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i$$

Приведем примеры вычисления потенциальных и емкостных коэффициентов в простейших случаях – цилиндрического и сферического конденсаторов:





Красным показаны Гауссовы поверхности с $a \le r \le b$.



И тогда, используя ур-е Максвелла о потоке вектора $\vec{E}$:

$$a\le r\le b:\ \oint \vec{E}\,d\vec{S} = E(r)\cdot 2\pi r\cdot l = \frac{\sigma\cdot 2\pi a l}{\varepsilon_0};\qquad a\le r\le b:\ \oint \vec{E}\,d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r},\qquad \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}$$

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,dr = -\int \frac{\sigma a\,dr}{\varepsilon_0 r} = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln r + C,\qquad \varphi = -\int \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\,dr = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r} + C$$

Из полученных выражений находим разность потенциалов между обкладками $r=a$ и $r=b$ конденсаторов:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln a + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln b = \frac{\sigma a 2\pi}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \overset{def}{=} \frac{q/_{l=1м}}{C}$$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 a} - \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 b} = \frac{\sigma 4\pi a^2 (b-a)}{4\pi\varepsilon_0 ab} \overset{def}{=} q/C$$

$$\Rightarrow \frac{q/_{l=1м}}{C} = U,\quad C/_{l=1м} = \frac{q/_{l=1м}}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}\qquad \Rightarrow C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}.$$

электроёмкость на ед. длины системы проводящих коаксиальных цилиндров, заряженных с $+\sigma\,\frac{Кл}{м^2}$ и $-\sigma\,\frac{Кл}{м^2}$

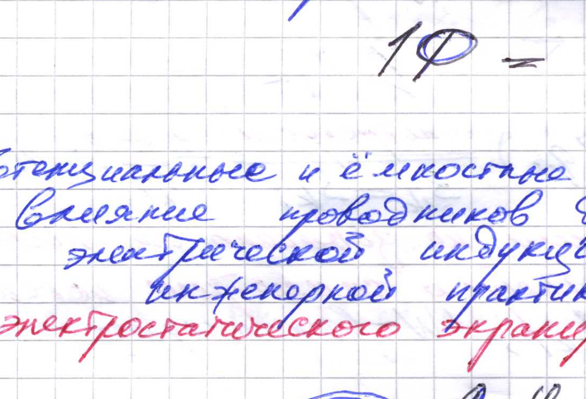
электроёмкость системы двух концентрических сфер, заряженных с $+\sigma\,\frac{Кл}{м^2}$ и $-\sigma\,\frac{Кл}{м^2}$

Единица электроёмкости — фарада:

$$1Ф = \frac{1Кл}{1В},\quad 1пФ = 10^{-12}Ф,\ 1нФ = 10^{-9}Ф,\ 1мкФ = 10^{-6}Ф \text{ и т.д.}$$

более мелкие единицы

Потенциальные и ёмкостные коэффициенты отражают взаимное влияние проводников друг на друга посредством явления электрической индукции и широко используются в инженерной практике, например, для обоснования электростатического экранирования: предположим, что мы хотим экранировать прибор/установку с $q_3 = 0$ от внешних электростатических полей, например, проводника с зарядом q_1 и потенциалом φ_1. Для этого окружаем прибор проводящей оболочкой с q_2 и φ_2, которую заземлим, т.е. $\varphi_2 = 0$.



Т.к. $q_3 = 0$, то поле между q_3 и q_2 равно нулю, поэтому

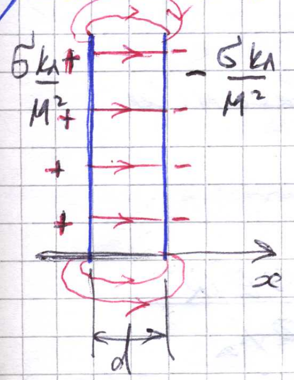
$$\Rightarrow \varphi_3 = \varphi_2 = 0 \text{ — заземление!} \Rightarrow q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{13}\varphi_3,\quad q_2 = C_{21}\varphi_1 \ldots,\quad q_3 = C_{31}\varphi_1$$

$\Rightarrow q_3 = C_{31}\varphi_1, \quad q_1 = C_{13}\varphi_3 + C_{11}\varphi_1, \quad q_2 = C_{21}\varphi_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow q_3 = 0 = C_{31}\varphi_1 \Rightarrow C_{31} = 0 \Rightarrow C_{13} = C_{31} = 0$,

т.е. влияние внешних (q_1, φ_1) по отношению к прибору с (q_3, φ_3) заряженных проводников, в силу $C_{13} = C_{31} = 0$, отсутствует!

То, как связаны между собой энергия поля заряженных проводников, плотность энергии и "давление" поля можно проследить на примере "плоского" конденсатора. В случае достаточно близко расположенных друг к другу проводящих пластин (обкладок) площадью S, в пренебрежении краевыми эффектами,



$$E_{конд} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad \varphi(x) = -\frac{Q}{S\varepsilon_0}x + C$$

$$\Rightarrow U = \varphi(0) - \varphi(d) = \frac{Q}{S\varepsilon_0}d \Rightarrow C = \frac{S\varepsilon_0}{d}$$

При зарядке такого плоского конденсатора:

$$W_{конд} = \int_0^Q dW = \int_0^Q dq\cdot\varphi = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{q^2}{2C}\Big|_0^Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{E^2 S^2 \varepsilon_0^2}{2S\varepsilon_0}d =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} S\cdot d \Rightarrow w_e = \frac{W}{Sd} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2}$$

Легко вычислить "давление" эл. поля внутри конденсатора на его пластины. Для этого слегка раздвинем пластины, работа сил поля дается при этом выражением

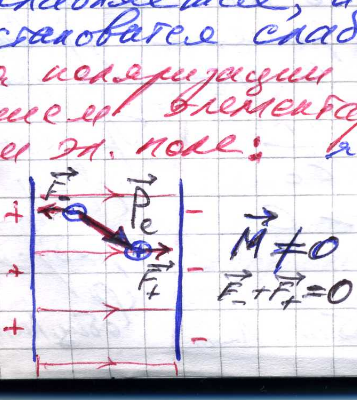
$$\Delta A = F\Delta d = P\cdot S\Delta d = \Delta W_{конд} = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} S\Delta d$$

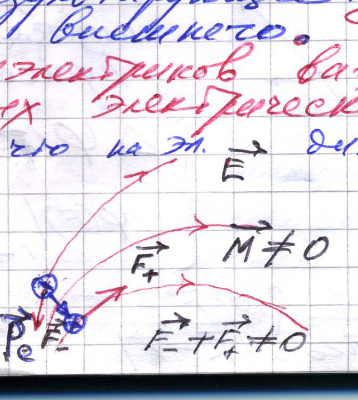
$$\Rightarrow P\cdot S\Delta d = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} S\Delta d \Rightarrow P = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} = w_e.$$

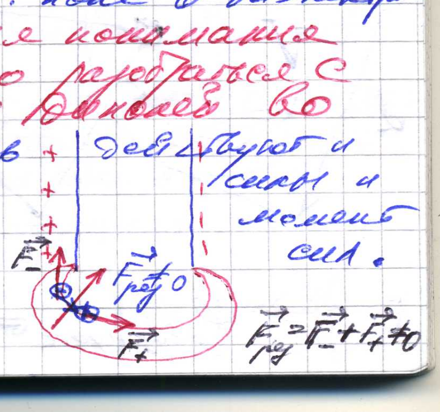
Ясно, что эл. поле не давит, а тянет, т.е. давление поля на пластины конденсатора является "отрицательным".

§2. Электрический диполь во внешнем поле.

В последующих лекциях нашего курса мы обратимся к изучению электростатических полей в диэлектрических средах или диэлектриках. Диэлектрики – это особый класс твердых тел, которые являются изоляторами, т.е. плохо проводят эл. ток. Во внешних эл. полях диэлектрики поляризуются: электрические дипольные моменты атомов (молекул) диэлектриков выстраиваются по внешнему полю, в результате это поле ослабляется, и результирующее эл. поле в диэлектриках становится слабее внешнего. Для понимания явления поляризации диэлектриков важно разобраться с поведением элементарных электрических диполей во внешнем эл. поле: ясно, что на эл. диполь действуют и силы и момент сил.

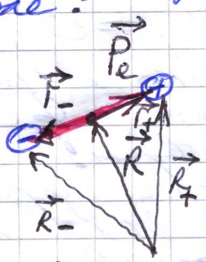






Получим соответствующие формулы для момента сил и силы, действующих на электрический диполь во внешнем поле:

(А). Момент сил



$$\vec M = [\vec r_+ \times q\vec E(\vec R+\vec r_+)] - [\vec r_- \times q\vec E(\vec R+\vec r_-)] \simeq$$

$$\simeq [q(\vec r_+ - \vec r_-)\times \vec E(\vec R)] = [q\vec d\times \vec E(\vec R)] = [\vec p_e \times$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec M = [\vec p_e\times\vec E]}.$$

$\vec R_+ = \vec R + \vec r_+$, $\vec R_- = \vec R + \vec r_-$

(Б). Сила, действующая на эл. диполь во внешнем неоднородном поле.

$$\vec F = q\vec E(\vec R+\vec r_+) - q\vec E(\vec R+\vec r_-) =$$

$$\simeq q\frac{\partial \vec E}{\partial X_\alpha}x_{+\alpha} - q\frac{\partial \vec E}{\partial X_\alpha}x_{-\alpha} = q(x_{+\alpha}-x_{-\alpha})\frac{\partial \vec E(\vec R)}{\partial X_\alpha}$$

$$= (\vec p_e\cdot\vec\nabla_R)\vec E(\vec R) + \underbrace{\cancel{\vec p_e(\vec\nabla_R \vec E(\vec R))}}_{=0} = \vec\nabla_R(\vec p_e\cdot\vec E(\vec R))$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec F = (\vec p_e\cdot\vec\nabla_R)\vec E(\vec R) = \vec\nabla_R(\vec p_e\cdot\vec E(\vec R))}$$

Последняя формула была получена из тождества ($[\vec\nabla_R\times\vec E]=0$):

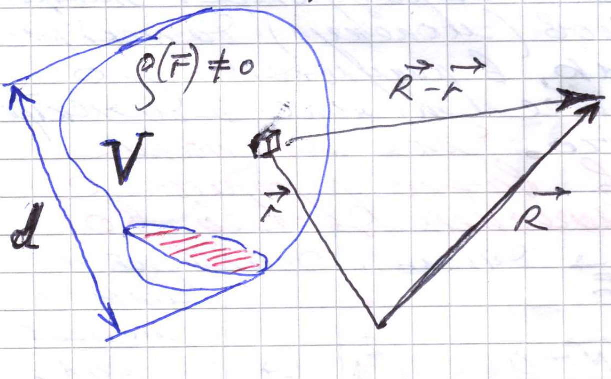
$$[\vec p_e\times[\vec\nabla_R\times\vec E(\vec R)]] = 0 = \vec\nabla_R(\vec p_e\cdot\vec E(\vec R)) - (\vec p_e\cdot\vec\nabla_R)\cdot\vec E(\vec R) =$$

$\Rightarrow$ Вспоминая выражение для силы через потенциальную энергию $\vec F = -\vec\nabla_R W(\vec R)$, выводим формулу для потенциальной энергии взаимодействия диполя с электрическим внешним полем:

$$\vec F = \vec\nabla_R(\vec p_e\cdot\vec E(\vec R)) = -\vec\nabla_R W_{в}(\vec R) \Rightarrow \boxed{W_{в}(\vec R) = -\vec p_e\cdot\vec E(\vec R)}.$$

Энергетически выгодной ориентацией для диполя, является, таким образом, выстраивание диполя $\vec p_e$ по полю $\vec E(\vec R)$; такой ориентации соответствует миним. энергия взаимодействия диполя с полем: $(W_{в})_{min} = -|\vec p_e|\cdot|\vec E(\vec R)| < 0$

§3 Понятие о мультипольном разложении потенциала ограниченного в пространстве распределения зарядов



Электростатическое поле ограниченного в пространстве распределения зарядов с $\rho(\vec r)\neq 0$ в некоторой области V, ищется как решение уравнения Пуассона с граничным условием:

$$\begin{cases}\Delta\varphi(\vec r) = -\dfrac{\rho(\vec r)}{\varepsilon_0},\\ \varphi(\vec r)|_{r\to\infty}\to 0\end{cases}$$

Гр. условие $\varphi(\vec r)|_{r\to\infty}\to 0$ требует, чтобы $\varphi_{общ. Лапл.}\equiv 0$

$$\to \varphi_{общ. Пуасс} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{d^3\vec r\,\rho(\vec r)}{|\vec R-\vec r|} + \varphi_{общ. Лапл}$$

Итак, электростатическое поле $\varphi(\vec r)$ ограниченного в пространстве расп. зарядов, исчезающее на бесконечности, т.е. $\varphi(\vec r)\big|_{r\to\infty}\to 0$ даётся формулой:

$$\varphi(\vec R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V\frac{d^3\vec r\,\rho(\vec r)}{|\vec R-\vec r|}.$$

Посмотрим внимательнее на поведение $\varphi(\vec R)$ при $|\vec R|\gg|\vec r|\sim d$, для чего разложим ф-цию $1/|\vec R-\vec r|=f(\vec r)$ по степеням $\vec r$:

$$f(\vec r)\overset{def}{=}\frac{1}{|\vec R-\vec r|}=f(0)+\vec\nabla_r f(\vec r)\Big|_{\vec r=0}\cdot\frac{\vec r}{1!}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\vec r)\Big|_{\vec r=0}\frac{x^2}{2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\vec r)\Big|_{\vec r=0}\cdot y^2+$$
$$+\frac{\partial^2}{\partial z^2}f(\vec r)\Big|_{\vec r=0}\cdot\frac{z^2}{2}+\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial x\partial y}\Big|_{\vec r=0}\cdot xy+\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial x\partial z}\Big|_{\vec r=0}\cdot xz+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\Big|_{\vec r=0}\cdot yz+\ldots$$

Очевидно, имеют место соотношения:

$$f(0)=\frac{1}{R},\quad \vec\nabla_r f(\vec r)\Big|_{\vec r=0}=-\vec\nabla_R\frac{1}{R}=\frac{\vec R}{R^3},\quad \frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial x^2}\Big|_{\vec r=0}=\frac{\partial^2}{\partial X^2}\frac{1}{R}=-\frac{\partial}{\partial X}\frac{X}{R^3},$$

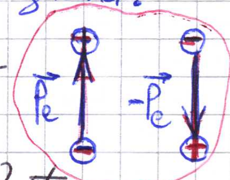
т.е. $$\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial x^2}\Big|_{\vec r=0}=-\frac{\partial}{\partial X}\frac{X}{R^3}=\frac{3X^2-R^2}{R^5},\quad \frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial y^2}\Big|_{\vec r=0}=\frac{3Y^2-R^2}{R^5},$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial z^2}\Big|_{\vec r=0}=\frac{3Z^2-R^2}{R^5},\quad \frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial X\partial Y}=\frac{3XY}{R^5},$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial x\partial z}\Big|_{\vec r=0}=\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial X\partial Z}=\frac{3XZ}{R^5},\quad \frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial y\partial z}\Big|_{\vec r=0}=\frac{\partial^2 f(\vec r)}{\partial Y\partial Z}\Big|_{\vec r=0}=\frac{3YZ}{R^5}.$$

Используя данные соотношения в выражении для $\varphi(\vec R)$, получаем так называемое мультипольное разложение потенциала:

Диполь



квадруполь

$$\varphi(\vec R)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int\limits_V d^3\vec r\,\rho(\vec r)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int\limits_V d^3\vec r(\vec R\cdot\vec r)\rho(\vec r)+$$
$$+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^5}\frac{3X^2-R^2}{2}\int\limits_V d^3\vec r\cdot x^2\rho(\vec r)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^5}\frac{3Y^2-R^2}{2}\int\limits_V d^3\vec r\,y^2\rho(\vec r)+$$
$$+\frac{(3Z^2-R^2)}{4\pi\varepsilon_0 R^5\cdot 2}\int\limits_V d^3\vec r\,z^2\rho(\vec r)+\frac{3XY}{4\pi\varepsilon_0 R^5}\int\limits_V d^3\vec r\,xy\rho(\vec r)+\frac{3XZ}{4\pi\varepsilon_0 R^5}\int d^3\vec r\cdot xz\rho(\vec r)$$
$$+\frac{3YZ}{4\pi\varepsilon_0 R^5}\int d^3\vec r\,yz\rho(\vec r)+\ldots=\underbrace{\boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}}_{\varphi_0(\vec R)}+\underbrace{\boxed{k\frac{\vec R\cdot\vec p_e}{R^3}}}_{\varphi_{дип}(\vec R)}+$$
$$\underbrace{\boxed{+k\frac{(3X^2-R^2)}{2R^5}Q_{11}+k\frac{(3Y^2-R^2)}{2R^5}Q_{22}+k\frac{(3Z^2-R^2)}{2R^5}Q_{33}+k\frac{3XY}{R^5}Q_{12}+k\frac{3XZ}{R^5}Q_{13}+k\frac{3YZ}{R^5}Q_{23}}}_{\varphi_{квадруп}(\vec R)=\varphi_2(\vec R)}+\ldots=$$
$$=\varphi_0(\vec R)+\varphi_{дип}(\vec R)+\varphi_{квадруп}(\vec R)+\ldots$$

$\vec p_e\overset{def}{=}\int d^3\vec r\cdot\vec r\rho(\vec r)$ — эл. дип. момент

Здесь $\varphi_0(\vec R)\overset{def}{=}k\frac{Q}{R}$ — потенциал точечного заряда, $Q_{\alpha\beta}\overset{def}{=}\int d^3\vec r\,x_\alpha x_\beta\rho(\vec r)$ — тензор квадруп. момента

$\varphi_1(\vec R)=\varphi_{дип}(\vec R)=k\frac{\vec R\cdot\vec p_e}{R^3}$ — потенциал эл. диполя,

Остальные шесть слагаемых дают в сумме потенциал так называемого квадрупольного распределения зарядов.

Очевидно, имеют место неравенства:

$$\left|\frac{\varphi_1(\vec R)}{\varphi_0(\vec R)}\right|\sim\frac{d}{R}\ll 1,\quad\left|\frac{\varphi_{квадруп}(\vec R)}{\varphi_{дип}(\vec R)}\right|\sim\frac{d}{R}\ll 1,\ \text{и т.д.}\ \left|\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}\right|\sim\frac{d}{R}\ll 1$$