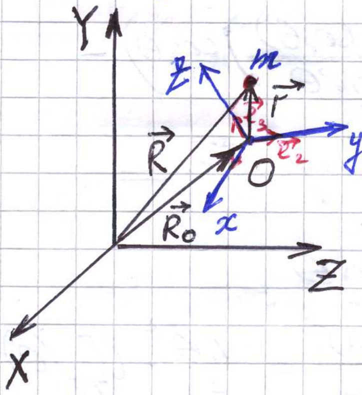
Лекция 12 Движение во вращающихся системах отсчета. Силы инерции: центробежная и Кориолиса. Уравнения Лагранжа и Гамильтона для заряженной частицы в электромагнитном поле. Теорема Лармора.

§1. Движение материальных частиц в неинерциальных системах отсчёта. Силы инерции.

Покажем, как описывается движение материальных частиц в неинерциальных системах отсчета. Пусть имеется две системы отсчета:



(X, Y, Z) — ЛСО $\equiv$ ИСО — лаб. инерциальная система отсчета.

(x, y, z) — Неинерциальная система отсчета т.е. система, движущаяся относительно ЛСО, вообще говоря с ускорением $\equiv$ НСО

Координаты $\vec{R}=(X, Y, Z)$ и $\vec{r}=(x, y, z)$ обеих указанных систем связаны соотношением:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r} = \vec{R}_0 + x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,$$

где орты $\vec{e}_k(t)$ координатных осей $x_k = (x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$, вообще говоря, движутся вместе с системой (x, y, z) и, следовательно, зависят от времени. Далее, справедлива следующая

Лемма о производной векторной величины

$$\vec{A}(t) = A_1(t)\vec{e}_1(t) + A_2(t)\vec{e}_2(t) + A_3(t)\vec{e}_3(t),$$

разложенной по базису $\{\vec{e}_k\}$ подвижной системы координат:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_1\vec{e}_1 + \dot{A}_2\vec{e}_2 + \dot{A}_3\vec{e}_3 + A_1\dot{\vec{e}}_1 + A_2\dot{\vec{e}}_2 + A_3\dot{\vec{e}}_3 =$$

$$= \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{отн} + A_1[\vec{\omega}\times\vec{e}_1] + A_2[\vec{\omega}\times\vec{e}_2] + A_3[\vec{\omega}\times\vec{e}_3] =$$

$$= \boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{отн} + [\vec{\omega}\times\vec{A}] = \frac{d\vec{A}}{dt}},$$

здесь использовано $\dot{\vec{e}}_k = [\vec{\omega}\times\vec{e}_k]$, т.к. $|\vec{e}_k| = const$.

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{отн} \overset{def}{=} \dot{A}_1\vec{e}_1(t) + \dot{A}_2\vec{e}_2(t) + \dot{A}_3\vec{e}_3$$ — производная $\vec{A}(t)$ относительно "замороженного" базиса $\vec{e}_k(t)$.

Применим сформулированную лемму ко второму закону Ньютона в ЛСО:

$$m\ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{рез.акт.}, \quad \vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{r}(t).$$

Вычислим для этого $\dot{\vec{R}}$, а затем и $\ddot{\vec{R}}$:

$$\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{R}}_0 + \dot{\vec{r}} = \vec{V}_0 + \dot{\vec{r}}_{отн} + [\vec{\omega}\times\vec{r}]$$

$$\Rightarrow \ddot{\vec{R}} = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \ddot{\vec{r}}_{отн} + [\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\vec{\varepsilon}\times\vec{r}] + [\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]] =$$

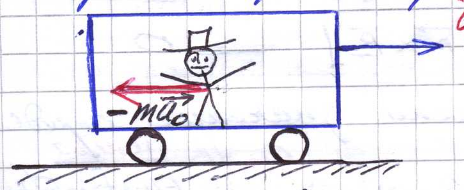
$$= \vec{a}_0 + \ddot{\vec{r}}_{отн} + 2[\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{отн}] + [\vec{\varepsilon}\times\vec{r}] + [\vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]].$$

Подставляя вычисленное выражение для $\ddot{\vec{R}}$ во второй закон

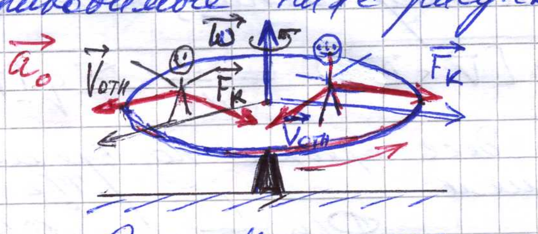
Ньютона, получим выражение для второго закона Ньютона в НСО:

$$m\ddot{\vec r}_{отн} = \underbrace{\vec F_{рез.акт.}}_{\text{Результирующая активных сил}} \underbrace{- m\vec a_0 - 2m[\vec\omega\times\vec V_{отн}] - m[\vec\varepsilon\times\vec r] - m[\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]]}_{\text{Силы инерции}}$$

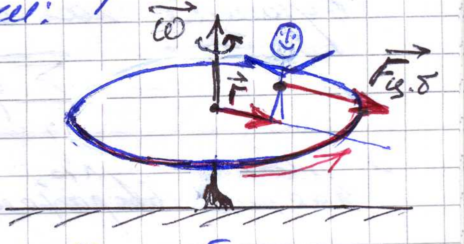
Помимо активных сил в НСО, неинерциальной системе отсчета, на частицу действуют и силы инерции, иллюстрациями для которых служат приводимые ниже рисунки:



Вагон, движущийся с ускорением $\vec a_0$, сила инерции $-m\vec a_0$.



Сила Кориолиса: $\vec F_к = -2m[\vec\omega\times\vec V_{отн}]$



Центробежная сила: $\vec F_{ц.б} = -[\vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]]\cdot m = +\omega^2\vec r m$, при $\vec\omega\perp\vec r$.

§2. Лагранжев и гамильтонов подходы к описанию движений заряженных частиц в электромагнитных полях.

Напомним, как описывается движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле с использованием уравнений Лагранжа и Гамильтона.

Необходимо подобрать лагранжиан для частицы во внешнем электромагнитном поле так, чтобы, в конечном счёте, из уравнений Лагранжа возникало ур-е Ньютона:

$$m\frac{d\vec V}{dt} = q\vec E + q[\vec V\times\vec B],$$

где поля $\vec B$ и $\vec A$ выражаются известным образом через электромагнитные потенциалы $\vec A$ и φ:

$$\vec B = [\vec\nabla\times\vec A] \quad и \quad \vec E = -\vec\nabla\varphi - \frac{\partial\vec A}{\partial t}.$$

Ограничиваясь случаем нерелятивистской частицы выберем лагранжиан в виде

$$L = \frac{m\vec V^2}{2} + q\vec A\cdot\vec V - q\varphi$$

Имеем

$$\vec P \overset{def}{=} \frac{\partial L}{\partial\vec V} = m\vec V + q\vec A,\quad \frac{\partial L}{\partial\vec r} = q\vec\nabla(\vec A\cdot\vec V) - q\vec\nabla\varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\vec V} = m\frac{d\vec V}{dt} + q\frac{\partial\vec A}{\partial t} + q(\vec V\cdot\vec\nabla)\vec A = \frac{\partial L}{\partial\vec r} = -q\vec\nabla\varphi + q\vec\nabla(\vec A\cdot\vec V)$$

$$\Rightarrow m\frac{d\vec V}{dt} = q\left(-\vec\nabla\varphi - \frac{\partial\vec A}{\partial t}\right) + q[\vec V\times[\vec\nabla\times\vec A]] = q\vec E + q[\vec V\times\vec B].$$

Получились известные уравнения движения, значит лагранжиан выбран правильно. Построим также и уравнения Гамильтона. Имеем для гамильтониана

$$H \overset{def}{=} \vec P\cdot\vec V - L = \vec P\cdot\frac{\vec P - q\vec A}{m} - \frac{m}{2}\frac{(\vec P - q\vec A)^2}{m^2} - q\vec A\frac{(\vec P-q\vec A)}{m} + q\varphi =$$

$$= \frac{(\vec P-q\vec A)^2}{2m} + q\varphi,$$ здесь использовалось $\vec V = \frac{\vec P - q\vec A}{m}$.

Уравнения Гамильтона имеют вид: $\dot{\vec r} = \vec V = \frac{\partial H}{\partial\vec P} = \frac{\vec P - q\vec A}{m}$, $\dot{\vec P} = -\frac{\partial H}{\partial\vec r} = -q\vec\nabla\varphi - \vec\nabla\frac{(\vec P - q\vec A)}{2m}$

§3. Теорема Лармора.

Рассмотрим вопрос о движении системы заряженных нерелятивистских частиц с одинаковыми отношениями зарядов к массе $q_k/m_k = const$ в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Будем предполагать, что система частиц локализована в пространстве и совершает финитные движения. Средняя по времени сила, действующая на систему частиц, даётся выражением

$$\overline{\vec{F}} = \overline{\sum_q q[\vec{v}\times\vec{B}]} = \overline{\frac{d}{dt}\sum q[\vec{r}\times\vec{B}]} = 0$$

и равна нулю, здесь среднее по времени значение определяется выражением

$$\overline{\Phi(t)} \overset{def}{=} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\Phi(t+\tau)\,d\tau \quad \left|\ \Phi=\frac{dF}{dt} \xrightarrow{\text{Лемма}} \frac{F(t+\frac{T}{2})-F(t-\frac{T}{2})}{T}\right.$$

при $T\uparrow$, $\overline{\frac{dF}{dt}} \to 0$.

Для среднего по времени момента силы, действующего на систему частиц, получается ненулевое значение:

$$\overline{\vec{M}} = \overline{\sum_q q[\vec{r}\times[\vec{v}\times\vec{B}]]} = \overline{\sum_q q\,\vec{v}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{B})} - \underbrace{\overline{\sum_q q\vec{B}(\vec{r}\cdot\vec{v})}}_{\text{по лемме } = 0} =$$

$$= \overline{\frac{1}{2}\sum_q\left(q(\vec{v}(\vec{r}\cdot\vec{B})-\vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{B}))\right)} + \underbrace{\overline{\frac{1}{2}\sum_q q\left(\vec{v}(\vec{r}\cdot\vec{B})+\vec{r}(\vec{v}\cdot\vec{B})\right)}}_{\text{по лемме } = 0}$$

$$= \overline{\frac{1}{2}\sum_q q[\vec{B}\times[\vec{v}\times\vec{r}]]} = \overline{\frac{1}{2}\sum_q q[[\vec{r}\times\vec{v}]\times\vec{B}]} = \overline{[\vec{P}_m\times\vec{B}]} = [\overline{\vec{P}_m}\times\vec{B}]$$

Поэтому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overline{\vec{M}} = [\overline{\vec{P}_m}\times\vec{B}], \quad \vec{P}_m = \frac{1}{2}\sum_q q[\vec{r}\times\vec{v}] =$$

— магнитный момент

$$\overset{(\frac{q}{m}=const)}{=\!=} \frac{q}{2m}\sum_m[\vec{r}\times m\vec{v}] = \frac{q}{2m}\vec{L}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \left[-\frac{q}{2m}\vec{B}\times\vec{L}\right], \quad \vec{\omega}_{прец} = -\frac{q}{2m}\vec{B}$$ — угловая скорость прецессии $\vec{L}$ вокруг $\vec{B}$.

$$\Rightarrow \quad \vec{M} = [\vec{P}_m\times\vec{B}] \rightarrow W_{вз} = -\vec{P}_m\cdot\vec{B} \rightarrow L_{вз} = \sum_q q(\vec{A}\cdot\vec{v}) =$$

$$= \sum_q q\,\frac{[\vec{B}\times\vec{r}]\cdot\vec{v}}{2} = \frac{q}{2m}\vec{B}\cdot\vec{L}.$$

Здесь использовано выр-е для векторного потенциала однородного магнитного поля

$$\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{B}\times\vec{r}], \text{ т.к. } \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{2}[\vec{\nabla}\times[\vec{B}\times\vec{r}]] = \frac{1}{2}\left(\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{r}) - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}\right) = \vec{B}$$

и получены выражения для потенциальной энергии взаимодействия с магнитным полем и лагранжиан взаимодействия системы заряженных частиц с магнитным полем:

$$dW_{вз} = \sum_q \vec{F}\cdot d\vec{r} \overset{d\vec{r}=[d\vec{\varphi}\times\vec{r}]}{=\!=\!=} \sum_q \vec{F}\cdot[d\vec{\varphi}\times\vec{r}] = \sum_q d\vec{\varphi}\cdot[\vec{r}\times\vec{F}] = d\vec{\varphi}\cdot\vec{M}$$

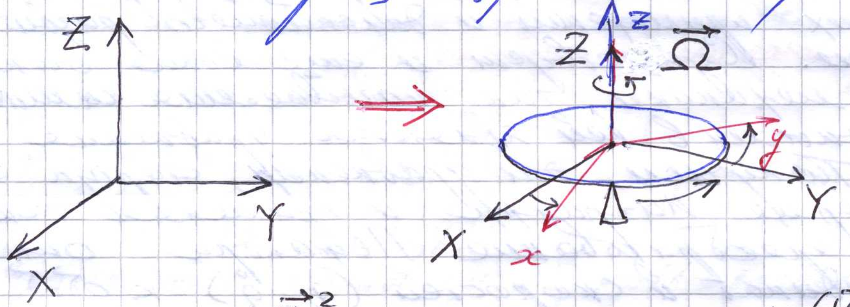
$$\Rightarrow \quad W_{вз} = \int d\varphi\, p_m B\sin\varphi = -\vec{P}_m\cdot\vec{B}, \quad L_{вз} = -W_{вз} = \vec{P}_m\cdot\vec{B} =$$

$$= \frac{q}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}.$$

Подойдём теперь к рассмотренному вопросу несколько иначе. Пусть имеется система заряженных частиц с $q_k/m_k = const$ в центрально симметричном электрическом поле, система описывается лагранжианом:

$$L=\sum_m \frac{m\vec{V}^2}{2} - \sum_q W(\vec{r}).$$

Перейдем во вращающуюся систему отсчета:



$$\vec{V} \Rightarrow \vec{V} + [\vec{\Omega}\times\vec{r}]$$

$$L=\sum_m \frac{m\vec{V}^2}{2} - \sum_q W(\vec{r}) \Rightarrow L = \sum_m \frac{m(\vec{V}+[\vec{\Omega}\times\vec{r}])^2}{2} - \sum_q W(\vec{r}) =$$

$$= \sum_m \frac{m\vec{V}^2}{2} + \sum_m m\vec{V}\cdot[\vec{\Omega}\times\vec{r}] + O(\Omega^2) - \sum W(\vec{r})$$

Переход во вращающуюся систему отсчета приводит к появлению в лагранжиане энергии взаимодействия

$$W_{вз} = \sum_m m\vec{V}\cdot[\vec{\Omega}\times\vec{r}] = \sum_m \vec{\Omega}\cdot[\vec{r}\times m\vec{V}] = \vec{L}\cdot\vec{\Omega}$$

Сравнив последнее выражение с энергией $W_{вз} = \frac{q}{2m}\vec{L}\cdot\vec{B}$, заключаем, что при выборе $\vec{\Omega} = \frac{q}{2m}\vec{B}$, получается в точности энергия взаимодействия $W_{вз}$ для случая системы заряж. частиц в слабом магнитном поле. Доказана замечательная

Теорема Лармора. Поведение системы нерелятивистских заряженных частиц с одинаковым отношением q_k/m_k, совершающих финитное движение в центрально симметричном электрическом поле и в слабом магнитном поле $\vec{B}$ эквивалентно поведению этой же системы частиц в том же электрическом поле (но без магнитного поля) в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\Omega} = \frac{q}{2m}\vec{B}$.