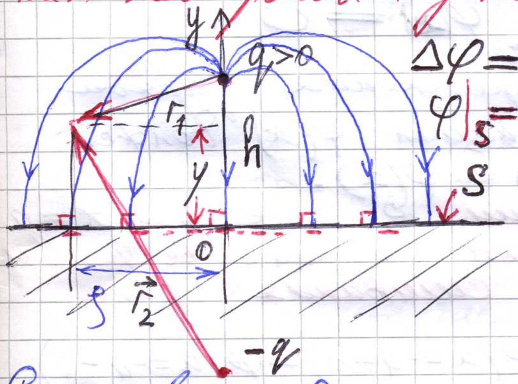
Лекция 12. О методе изображений, как способе расчета электростатических полей. Применение решений уравнений Лапласа и Пуассона. Потенциальные и ёмкостные коэффициенты. Диполь во внешнем поле.

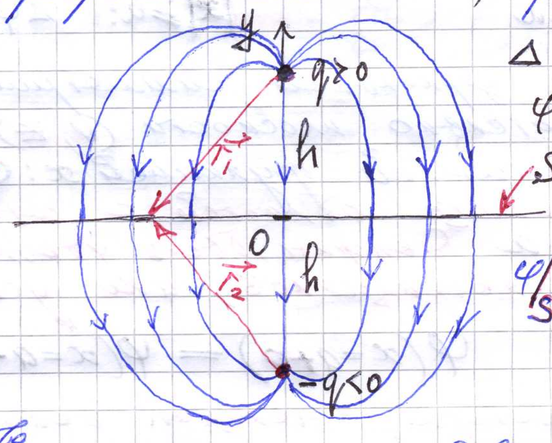
§1 Обоснование метода изображений.

Электростатические поля можно рассчитывать с помощью так называемого метода изображений. Рассмотрим, например, заряд $q>0$ на расстоянии h от проводящего полупространства. Ясно, что заряд q индуцирует на поверхности полупространства зарядов противоположного знака, заряд $q>0$ как бы вытягивает из полупространства на его поверхность отрицательные заряды. Очевидно, силовые линии поля в полупространстве с $y\geq 0$, над проводником, начинаются на заряде $q>0$ и замыкаются частично на проводник, часть из них уходит также на бесконечность. Проводящее полупространство представляет собой „эквипотенциальное тело" с потенциалом $\varphi=0$, силовые линии поля входят в проводник под прямым углом. Требуется поле $\vec{E}(\vec{r})$ рассчитать.



$$\left.\begin{array}{l}\Delta\varphi=0,\\ \varphi|_S=0.\end{array}\right\}$$

$\sim$



$$\left.\begin{array}{l}\Delta\varphi=0,\\ \varphi|_S=0.\end{array}\right\}$$

$$\varphi|_S = k\frac{q}{r_1} - k\frac{q}{r_1} = 0$$

Сопоставим задаче слева, о поле заряда и полупространства, заполненного проводником, задачу о поле двух противоположных по знаку зарядов q и $-q$, расположенных зеркально симметрично по отношению друг к другу относительно плоскости S с $y=0$. Поле в ситуации справа пересекает плоскость S с $y=0$ под прямым углом, причем, потенциал на плоскости $S|_{y=0}$ равен, в силу $\left(k\frac{q}{r_1}-k\frac{q}{r_2}\right)_{r_2=r_1}=0=\varphi|_S$.

Ясно, что поля в физических ситуациях слева и справа при $y\geq 0$ эквивалентны друг другу. Более того эти поля удовлетворяют при $y\geq 0$ уравнению Лапласа и оба поля, т.е. $\varphi_{слева}|_S=\varphi_{справа}|_S=0$ удовлетворяют одному и тому же граничному условию! В таком случае в силу теоремы единственности для решений уравнения Лапласа, поля совпадают, точнее, могут отличаться на константу.

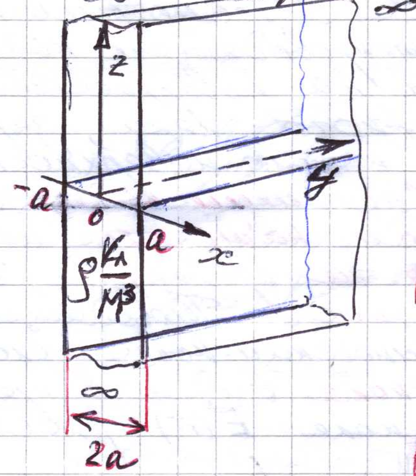
Итак, обосновано строго, что решение задачи слева эквивалентно решению задачи справа, при $y\geq 0$ — в верхнем полупространстве. Поэтому поле первой задачи рассчитывают, как говорят, методом изображений, помещая симметрично-зеркально расположенный снизу заряд, на расстоянии h от поверхности $S|_{y=0}$, потенциал поля $\varphi(\vec{r})$ при $y\geq 0$ имеет, т.о., вид:

получен методом изображений. $\rightarrow$

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{q}{r_1} - k\frac{q}{r_2} = k\frac{q}{\sqrt{(h-y)^2+\rho^2}} - k\frac{q}{\sqrt{(h+y)^2+\rho^2}}$$

§2. Применение уравнений Пуассона и Лапласа к расчёту электростатических полей.

Покажем, как для расчета электростатических полей используются уравнения Пуассона и Лапласа, основные уравнения электростатики. Рассмотрим распределение зарядов с постоянной объёмной плотностью $\rho\ \frac{Кл}{м^3}$ в форме бесконечной плиты толщиной $2a$.



В направлениях y и z плотность заряда не изменяется, поэтому следует ожидать, что и поле $E=E(x)$ зависит только от координаты x.
Внутри плиты с $\rho\neq 0$ следует решать уравнение Пуассона:

$$|x|\le a:\quad \Delta\varphi=\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Снаружи плиты $\varphi(x)$, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$|x|\ge a:\quad \Delta\varphi=\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=0$$

В силу зеркальной симметрии распределения заряда относительно плоскости (y,z) потенциал $\varphi(x)$ должен быть четной функцией x: $\varphi(-x)=\varphi(x)$.
На границе областей с различными ρ, т.е. при $x=a$ и $x=-a$ должны быть удовлетворены граничные условия для потенциалов, или условия "сшивания" типа

$$\varphi(x=a+0)=\varphi(x=a-0),\quad \varphi(x=-a+0)=\varphi(x=-a-0),$$

иначе говоря, потенциал должен быть непрерывной функцией на поверхностях, где происходит скачок ρ плотности заряда. Обоснование подобных граничных условий для потенциала довольно простое:

Потенциал непрерывен!

№3

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi \Longrightarrow \varphi(\vec{r})-\varphi(\vec{R}_0)=-\int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

$$\varphi(\vec{r})-\varphi(\vec{R}_0)=-\int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}}\vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow \varphi(\vec{R}_a)-\varphi(\vec{R}_b)=-\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_a}\vec{E}\,d\vec{l}+\int_{\vec{R}_0}^{\vec{R}_b}\vec{E}\,d\vec{l} \ldots$$

$$\Longrightarrow \varphi(\vec{R}_a)-\varphi(\vec{R}_b)=-\int_{\vec{R}_b}^{\vec{R}_a}\vec{E}\cdot d\vec{l} \xrightarrow{R_a\to R_b} \varphi(\vec{R}_a-\vec{0})=\varphi(\vec{R}_a+\ldots$$

В рассматриваемой задаче $\varphi(x)$ достаточно вычислить при $x\ge 0$, при $x\le 0$ потенциал можно определить из требования четности $\varphi(x)$, т.е.

$$\varphi(x)\Big|_{x\le 0}=\varphi(-x)\Big|_{-x\ge 0}$$

Итак, при $|x|\le a$ решаем уравнение Пуассона:

$$|x|\le a:\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\Longrightarrow\frac{d\varphi}{dx}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}x+C_1\Longrightarrow\varphi(x)=-\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}+C_1x+C_2$$

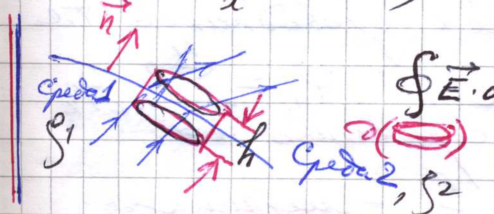
Из требования $\varphi(x)=\varphi(-x)\Rightarrow C_1=0.$

При $x \geq a$ решаем уравнение Лапласа:

$$x \geq a: \quad \Delta\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = C_3 \Rightarrow \varphi(x) = C_3 x + C_4$$

Можно доказать также, что в рассматриваемом случае помимо потенциала непрерывной ф-цией должно быть и эл. поле, т.е.

$$E_x(x=a-0) = E_x(x=a+0) \Rightarrow -\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=a-0} = -\frac{d\varphi}{dx}\Big|_{x=a+0}$$



$$\oint \vec E\cdot d\vec S\Big|_{h\to 0} = E_{2n}\Delta S - E_{1n}\Delta S = \frac{\Delta Q}{\varepsilon_0}\Big|_{h\to 0} \Rightarrow 0 \Rightarrow E_{2n} = E_{1n},$$

т.е. $-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}$

Док-во граничного условия для $\vec E$.

Итак, вычислим потенциал:

$$|x| \leq a: \quad \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + C_2$$

$$x \geq a: \quad \varphi(x) = C_3 x + C_4 = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}x + C_4$$

Константы C_2, C_3 и C_4 ищем из граничных условий:

$$-\varphi'(x=a-0) = -\varphi'(x=a+0) \Rightarrow -\frac{\rho a}{\varepsilon_0} = -C_3, \quad C_3 = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}$$

$$\varphi(x=a-0) = \varphi(x=a+0) \Rightarrow -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + C_2 = -\frac{\rho a^2}{\varepsilon_0} + C_4 \Rightarrow C_4 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + C_2$$

Окончательно получаем:

$$|x| \leq a: \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0} + C_2; \quad x \geq a: \varphi(x) = -\frac{\rho a}{\varepsilon_0}x + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + C_2$$

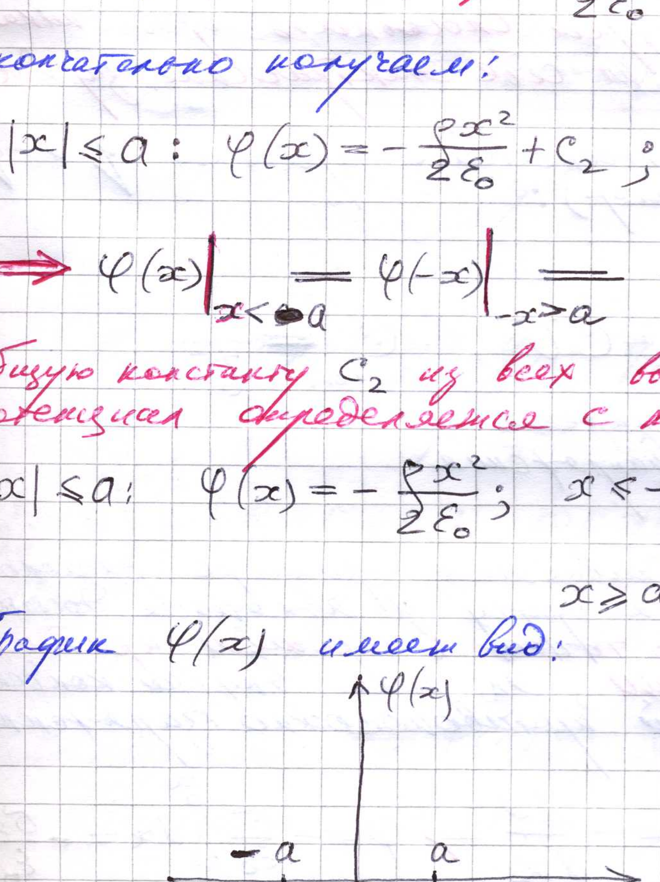
$$\Rightarrow \varphi(x)\Big|_{x<-a} = \varphi(-x)\Big|_{-x>a} = +\frac{\rho a}{\varepsilon_0}x + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} + C_2$$

Общую константу C_2 из всех выражений можно опустить, т.к. потенциал определяется с точностью до константы:

$$|x| \leq a: \quad \varphi(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}; \quad x \leq -a: \varphi(x) = \frac{\rho a}{\varepsilon_0}x + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

$$x \geq a: \quad \varphi(x) = -\frac{\rho a x}{\varepsilon_0} + \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

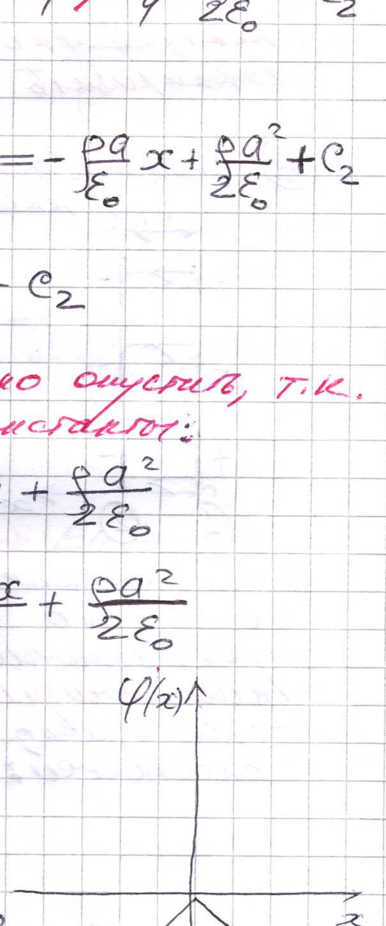
График $\varphi(x)$ имеет вид:



Интересен предел:

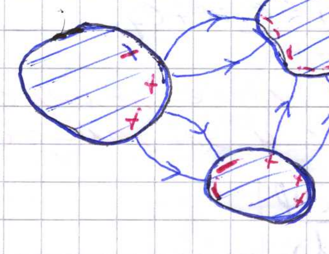
$a \to 0, \rho a \to \sigma \neq 0$

$\rho \to \infty$



Задача: обдумайте условие предела $\rho \to \infty$, $a \to 0$ но $2\rho a \to \sigma \frac{Кл}{м^2}$.

§3. Потенциальные и ёмкостные коэффициенты. Электроёмкость



Проводники, заряженные и/или незаряженные, оказывают влияние друг на друга вследствие электростатической индукции. Если имеется система N заряженных и/или незаряженных проводников, то заряд q_i на любом из проводников зависит от потенциалов всех проводников, т.е.

$$q_i = \sum_{k=1}^{N} C_{ik}\varphi_k,$$ обратное также справедливо $$\varphi_i = \sum_{k=1}^{N} S_{ik} q_k$$

C_{ik} — матрица ёмкостных коэффициентов S_{ik} — матрица потенциальных коэффиц

Важные частные случаи.

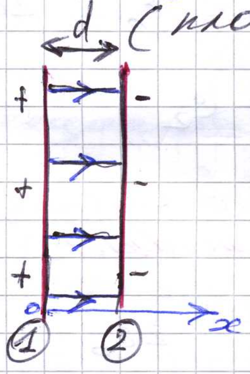
(A) Если имеется всего лишь один уединенный проводник, то для него

$$q = C\varphi; \quad C = \frac{q}{\varphi}$$ — электроемкость уединенного проводника.

$$[C] = \frac{Кл}{В} = Фарада = Ф$$ — единица электроёмкости.

Электроёмкость характеризует способность проводника накапливать и удерживать на себе электрические заряды.

(B) Для системы из двух плоскостей с зарядами q и $-q$ (плоский конденсатор):



$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU, \quad C_{конд} = \frac{q}{U}$$

$$U \overset{def}{=} \varphi_1 - \varphi_2$$ — падение напряжения

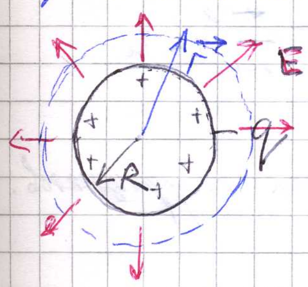
Если плоскости в рассматриваемом примере расположены достаточно близко друг к другу и являются достаточно протяженными, их можно тогда в хорошем приближении считать бесконечными, эл. поле внутри конденсатора равно сумме полей противоположно заряженных плоскостей:

$$E_{конд} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int^{x} dx = -\frac{\sigma x}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0} = \frac{q d}{S\varepsilon_0} = U \Rightarrow \boxed{C = \frac{q}{U} = \frac{S\varepsilon_0}{d}}$$

пример расчета электроемкости.

Электроемкость проводника в форме шара также легко рассчитывается:

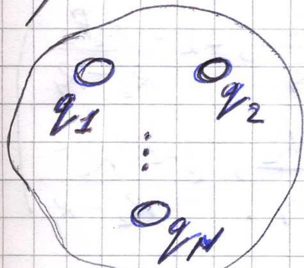


$$\oint \vec{E}\, d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E(r) = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow C = \frac{q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 r.$$

Используя понятие емкостных коэффициентов, достаточно просто выводится полезное и важное выражение для энергии, которую необходимо затратить, чтобы зарядить систему N проводников до зарядов $q_1, \dots, q_N$:



$$dW_{сист} = \sum_{k=1}^{N} dq_k \varphi_k = \sum_{i,k} c_{ki}\, d\varphi_i \varphi_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(c_{ki}\, d\varphi_i \cdot \varphi_k + c_{ik}\, d\varphi_k \varphi_i\right) =$$

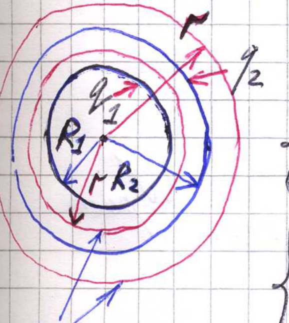
= (энергия системы не должна зависеть от способа подзарядки системы, т.е. dW должна быть полным дифференциалом) $c_{ik} = c_{ki}$

$$= \frac{1}{2}\sum c_{ik}\left(d\varphi_i \varphi_k + \varphi_i\, d\varphi_k\right) = d\left(\frac{1}{2}\sum_{i,k} c_{ik}\varphi_i\varphi_k\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{сист.\, заряж.\, пров} = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\left(c_{ik}\varphi_i\varphi_k\right)}$$

энергия сист. заряженных проводников

Приведём пример расчёта потенциальных и емкостных коэффициентов системы двух концентрических сфер радиусов R_1 и R_2 с зарядами q_1 и q_2. Для их расчёта придётся вычислить поле $E(r)$ и потенциал $\varphi(r)$ при $R_1 \le r \le R_2$, $R_2 \le r$.



Гауссовы поверхности

$$\begin{cases} R_1 \le r \le R_2: \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \Rightarrow \varphi(r) = -\int^{r} E(r)\,dr = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_2 \le r: \quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = \dfrac{q_1+q_2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \Rightarrow \varphi(r) = -\int E(r)\,dr = \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2, \end{cases}$$

выберем $C_2 = 0$.

Сшиваем потенциалы при $r = R_2$:

$$\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + C_1 = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \Rightarrow C_1 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

Имеем, следовательно, для потенциалов φ_1 и φ_2 двух сфер:

$$\varphi(R_1) = \varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + C_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, \quad \varphi_2 = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \varphi(R_2)$$

т.е.

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\end{pmatrix}}_{S_{ik}}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}, \quad \varphi_i = \sum_{k=1}^{2} S_{ik}\, q_k$$

S_{ik} – матрица потенциальных коэффициентов

$$S_{ik} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}, & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}, & \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_2}\end{pmatrix} \Rightarrow \det S = k^2\left(\frac{1}{R_1R_2} - \frac{1}{R_2^2}\right) = k^2\frac{R_2-R_1}{R_2^2R_1}$$

$$\Rightarrow C_{ik} = \frac{1}{k^2\frac{(R_2-R_1)}{R_1R_2^2}}\begin{pmatrix}k\frac{1}{R_2}, & -k\frac{1}{R_2}\\ -k\frac{1}{R_2}, & k\frac{1}{R_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}k^{-1}\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}, & -k^{-1}\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}\\ -k^{-1}\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}, & k^{-1}\frac{R_2^2}{R_2-R_1}\end{pmatrix}$$

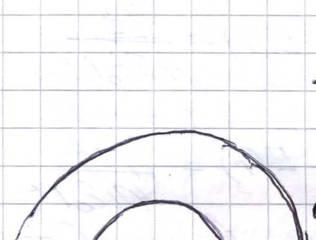
$$= \begin{pmatrix}C, & -C\\ -C, & C + k^{-1}\frac{R_2^2-R_2R_1}{R_2-R_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}C, & -C\\ -C, & C + \underbrace{k^{-1}R_2}_{\Delta C}\end{pmatrix}$$

Вычислим в заключение энергию, запасённую в рассматриваемой системе двух сфер:

$$W = \frac{C_{11}V_1^2}{2} + \frac{C_{22}V_2^2}{2} + C_{12}V_1V_2 =$$

$$= \frac{CV_1^2}{2} + \frac{(C+\Delta C)V_2^2}{2} - CV_1V_2 =$$

$$= \frac{C(V_1-V_2)^2}{2} + \frac{\Delta C\, V_2^2}{2} = W_{\text{внутр. сфер}} + W_{\text{расс}}$$



$$q_2 = -q_1 + q_2 + q_1 \rightarrow q_{\text{свз}} = -q_1$$

Энергия поля, заключенная между сферами,

$$W_{\text{свз.}} = W_{\text{между сф.}} = \frac{C(V_1-V_2)^2}{2}.$$

Энергия „рассеянная в окружающее пр-во"

$$W_{\text{расс}} = \frac{\Delta C\, V_2^2}{2}.$$