Лекция 11. Уравнения движения твердого тела. Симметричный волчок. Уравнения Эйлера.

§1. Уравнения движения твердого тела в форме уравнений Лагранжа.

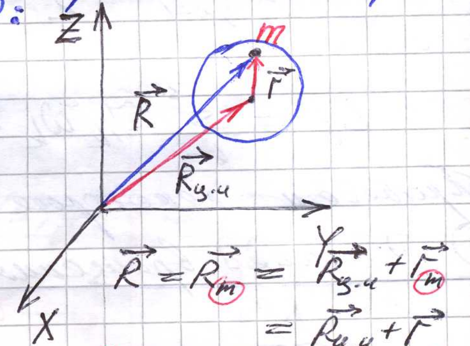
Уравнения движения твердого тела можно получить из принципа наименьшего действия, используя соответствующий лагранжиан:

$$L = K - U = \frac{M\dot{\vec{R}}_{цм}^{\,2}}{2} + \sum_{i,k=1}^{3}\frac{I_{ik}\,\omega_i\omega_k}{2} - U =$$

$$= \frac{M\dot{\vec{R}}_{цм}^{\,2}}{2} + \sum\frac{I_{ik}\,\dot{\varphi}_i\dot{\varphi}_k}{2} - U.$$

Можно показать, что потенциальная энергия твердого тела является функцией радиус-вектора $\vec{R}_{цм}$ центра инерции и трёх углов $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, задающих ориентацию твердого тела относительно неподвижной ЛСО:

в самом деле:



$$\vec{R} = \vec{R}_m = \vec{R}_{цм} + \vec{r}_m = \vec{R}_{цм} + \vec{r}$$

Значок m точечной (небольшой) массе будем опускать

$$U = \sum_m U(\vec{R}_m) = \sum_m U(\vec{R})$$

При бесконечно малом изменении $\vec{R}$ на $\delta\vec{R}_{цм}$, т.е. $\vec{R} \Rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R}_{цм}$

$$\delta U = \sum_m \frac{\partial U}{\partial\vec{R}}\cdot\delta\vec{R}_{цм} = \delta\vec{R}_{цм}\cdot\sum_m\frac{\partial U}{\partial\vec{R}} =$$

$$= -\delta\vec{R}_{цм}\cdot\sum_m \vec{f}^{(e)} = -\delta\vec{R}_{цм}\cdot\vec{F}^{(ext)}$$

$$\Rightarrow \quad U = U(\vec{R}_{цм}, \ldots), \qquad \vec{F}^{(ext)} = \sum_m \vec{f}^{(e)}$$

Точно также при бесконечно малом повороте

$$\vec{R} \Rightarrow \vec{R} + \delta\vec{R} = \vec{R} + [\delta\vec{\varphi}\times\vec{R}]$$

$$\delta U = \sum_m \frac{\partial U}{\partial\vec{R}}\cdot\delta\vec{R} = -\sum_m \vec{f}^{(e)}\cdot[\delta\vec{\varphi}\times\vec{R}] = -\delta\vec{\varphi}\sum_m[\vec{R}\times\vec{f}^{(e)}]$$

$$= -\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{M}^{(ext)}, \qquad \vec{M}^{(ext)} = \sum_m[\vec{R}\times\vec{f}^{(e)}]$$

$$\Rightarrow \quad U = U(\vec{R}_{цм}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$$

Поэтому имеем следующие уравнения движения твердого тела в форме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{R}}_{цм}} - \frac{\partial L}{\partial\vec{R}_{цм}} = 0, \text{ т.е. } M\ddot{\vec{R}}_{цм} = \vec{F}^{(ext)}$$

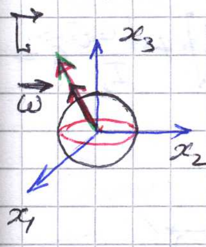
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}_i} - \frac{\partial L}{\partial\varphi_i} = 0, \text{ т.е. } \sum_{k=1}^{3} I_{ik}\dot{\omega}_k = -\frac{\partial U}{\partial\varphi_i} = M_i^{(ext)}$$

В случае свободного твердого тела $\sum_m \vec{f}^{(e)} = \vec{F}^{(ext)} = 0, \ \vec{M}^{(e)} = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\vec{L}_{внутр}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P} = \overrightarrow{const}, \qquad \vec{L}_{внутр} = \overrightarrow{const}.$$

§2. Анализ движения свободного симметричного волчка на основе законов сохранения $\vec L$ и K.

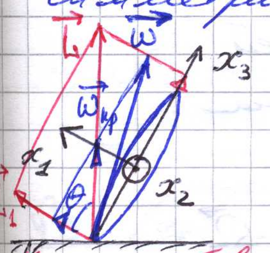


Со свободным шаровым волчком всё просто:

$$\vec L = I_ш \vec\omega, \quad \frac{d\vec L}{dt} = \vec M^{(ext)} = 0 \Rightarrow \vec L = I_ш\vec\omega = \overrightarrow{const}$$

$$\vec L \uparrow\uparrow \vec\omega, \quad \vec L = \overrightarrow{const}, \quad \vec\omega = \overrightarrow{const}.$$

Ситуация становится много интереснее в случае свободного симметричного волчка с $I_1 = I_2 \neq I_3$ — два одинаковых главных момента инерции.



$$\vec L = I_1(\vec\omega_1 + \vec\omega_2) + I_3\vec\omega_3 = I_1\vec\omega + (I_3 - I_1)\vec\omega_3 = \overrightarrow{const}$$

$$K_{вр.тв} = \frac{I_1(\omega_1^2+\omega_2^2)}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2} = \frac{I_1\vec\omega^2}{2} + \frac{(I_3-I_1)\omega_3^2}{2} = const,$$

Конкретный выбор и. осей с $\omega_2 = 0$.

$$= \frac{L_1^2+L_2^2}{2I_1} + \frac{L_3^2}{2I_3} = \frac{\vec L^2}{2I_1} + L_3^2\left(\frac{1}{2I_3} - \frac{1}{2I_1}\right) = const,$$

Имеют место следующие наблюдения:

(А) В каждый момент времени векторы $\vec L$, $\vec\omega$ и $\vec\omega_3$ лежат в одной плоскости.

(Б) $\forall$ (·) $\vec r$ на оси x_3 $\quad \vec V = \frac{d\vec r}{dt} = [\vec\omega\times\vec r]$, $|\vec r| = const$

$\Rightarrow \vec V \perp \vec\omega, \vec r \Rightarrow$ ось x_3 и вектор $\vec\omega$ вращаются вокруг $\vec L = \overrightarrow{const}$.

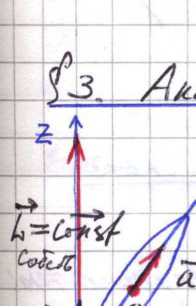
(В) $K = const$, $\vec L^2 = const \Rightarrow L_3 = I_3\omega_3 = const$, $\boxed{\omega_3 = const}$

(Г) $K = const$, $\omega_3 = const \Rightarrow \vec\omega^2 = const$

(Д) $L_1 = I_1\omega_1 = L\sin(\widehat{\vec\omega, ось\ x_3}) = L\sin\theta$, $\omega_1 = \omega_{прец}\sin\theta = \frac{L\sin\theta}{I_1}$

$\Rightarrow \omega_{прец} = \frac{L}{I_1}$, $\quad \omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \frac{L\cos\theta}{I_3}$

§3. Анализ движения свободного симметричного волчка с использованием уравнений динамики.



$\vec a \parallel$ оси x_3

$\vec a^2 = 1$

$$\vec L_{total} = \vec L_{орбит} + \vec L_{собств} = [\vec R_G \times M\vec V_G] + \vec L_{собств} = \overrightarrow{const}$$

$$\vec L_{орбит} = [\vec R_G \times M\vec V_G] = \overrightarrow{const} \Rightarrow \vec L_{собств} = \overrightarrow{const}$$

$\vec a$ — единичный вектор на оси x_3. $\quad \lambda \overset{def}{=} \vec\omega\cdot\vec a$

Имеют место следующие наблюдения.

(А) $\dot{\vec a} = [\vec\omega\times\vec a] \Rightarrow [\vec a\times\dot{\vec a}] = [\vec a\times[\vec\omega\times\vec a]] = \vec\omega - \vec a(\vec\omega\cdot\vec a) \Rightarrow \vec\omega = [\vec a\times\dot{\vec a}] + \lambda\vec a$

(Б) $\Rightarrow \vec L = I_1[\vec a\times\dot{\vec a}] + \lambda\vec a I_3 = \overrightarrow{const} \Rightarrow \dot{\vec L} = 0 = I_1[\vec a\times\ddot{\vec a}] + \dot\lambda I_3\vec a + \lambda I_3\dot{\vec a}$

$\Rightarrow \vec a\cdot\dot{\vec L} = 0 = \dot\lambda I_3 \Rightarrow \lambda = n = \vec a\cdot\vec\omega = const \qquad \vec e_3 = \vec k$

$\Rightarrow \vec L = I_1[\vec a\times\dot{\vec a}] + n\vec a I_3 = L\vec e_3 = L\vec k = \overrightarrow{const}$

(В) $\Rightarrow [\vec a\times L\vec k] = I_1[\vec a\times[\vec a\times\dot{\vec a}]] = -I_1\dot{\vec a} \Rightarrow \dot{\vec a} = \left[\frac{L\vec k}{I_1}\times\vec a\right] \Rightarrow \vec\omega_{прец} = \frac{L\vec k}{I_1}$

$\Rightarrow \vec L\cdot\vec a = L\cos\theta = nI_3 \Rightarrow n = \vec a\cdot\vec\omega = const = \frac{L\cos\theta}{I_3} \Rightarrow \omega_3 = \frac{L\cos\theta}{I_3}$

Воспроизводятся те же результаты.

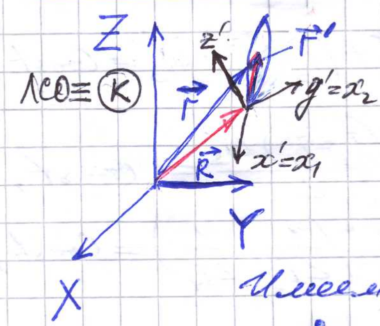
(Г) Полная угловая скорость вращения волчка

$$\vec\omega = [\vec a\times\dot{\vec a}] + \frac{L\cos\theta}{I_3}\vec a = \left[\vec a\times\left[L\frac{\vec k}{I_1}\times\vec a\right]\right] + \frac{L\cos\theta}{I_3}\vec a =$$

$$= L\frac{\vec k}{I_1} - \vec a\,\frac{\vec a\cdot\vec k}{I_1}L + \frac{L\cos\theta}{I_3}\vec a =$$

$$= L\frac{\vec k}{I_1} + \underbrace{\boxed{L\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)\vec a}}_{=\vec\omega'} = \vec\omega_{\text{прец}} + \vec\omega'$$

Задача Установить закон сложения угловых скоростей.



Пусть заданы системы отсчета

(а) $(X, Y, Z)\equiv(K) = ИСО = ЛСО$

(б) $(x', y', z')\equiv(K')$ – вращ. отн. ЛСО с $\vec\Omega$

(в) Тв. тело ≡ симметр. волчок ≡ вращ. отн. (K') с $\vec\omega'$

Имеем для вектора $\vec r = \vec R + \vec r'$:

$$\dot{\vec r} = \underbrace{\vec V + [\vec\omega\times\vec r']}_{\text{отн. }(K)} = \vec V + \dot{\vec r}'_{(K')} + [\vec\Omega\times\vec r']$$

$$= \vec V + [\vec\omega'\times\vec r'] + [\vec\Omega\times\vec r']$$

$\Rightarrow \boxed{\vec\omega = \vec\Omega + \vec\omega'}$ – закон сложения угл. скоростей.

Сравним полученное выше выражение для $\vec\omega$ с законом сложения скоростей:

$$\vec\omega = \underbrace{L\frac{\vec k}{I_1}}_{\vec\omega_{\text{прец}}} + \underbrace{L\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)\vec a}_{\vec\omega'} \leftrightarrow \vec\omega = \vec\Omega + \vec\omega'$$

$$= \vec\omega_{\text{прец}} + \vec\omega' \leftrightarrow \vec\omega = \vec\Omega + \vec\omega'$$

Волчок прецессирует отн. (K) с $\vec\omega_{\text{прец}} = \frac{L}{I_1}\vec k$ и вращается относительно сист. гл. осей (x_1, x_2, x_3) с угловой скоростью

$$\vec\omega' = L\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)\vec a.$$

§4 Уравнение Эйлера вращательного движения свободного твердого тела

Имеем в системе главных осей для абсолютно твердого тела

$$\vec L = I_1\vec\omega_1 + I_2\vec\omega_2 + I_3\vec\omega_3 \Rightarrow \dot{\vec L} = \dot{\vec L}_{(K')} + [\vec\omega\times\vec L] = 0,$$

т.е.

Система ур-ний Эйлера для своб. твердого тела свободного волчка

$$\begin{cases} I_1\dot\omega_1 + I_3\omega_3\omega_2 - I_2\omega_2\omega_3 = 0, \\ I_2\dot\omega_2 + I_1\omega_1\omega_3 - I_3\omega_3\omega_1 = 0, \\ I_3\dot\omega_3 = I_2\omega_2\omega_1 - I_1\omega_1\omega_2 = 0. \end{cases}$$

Применим эти ур-я к своб. симметричному волчку с $I_1 = I_2 \neq I_3$

$\Rightarrow I_3\dot\omega_3 = 0$, т.е. $\omega_3 = const$; $\quad \dot\omega_1 + \frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_2\omega_3 = 0, \quad \dot\omega_2 - \frac{I_3-I_1}{I_1}\omega_1\omega_3 =$

Для вытянутого вдоль оси x_3 волчка $I_3 < I_1$, сплюснутого $I_3 > I_1$

Пусть $I_3 < I_1$ — рассмотрим случай вытянутого вдоль x_3 волчка.

Имеем ур-я:

$$\dot{\omega}_1 - \Omega\omega_2 = 0, \quad \dot{\omega}_2 + \Omega\omega_1 = 0 \Rightarrow \ddot{\omega}_k + \Omega^2\omega_k = 0 \quad k = 1,2$$

Если $\omega_2 = A\cos\Omega t$, то $\omega_1 = -\frac{\dot{\omega}_2}{\Omega} = A\sin\Omega t$, $\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3$

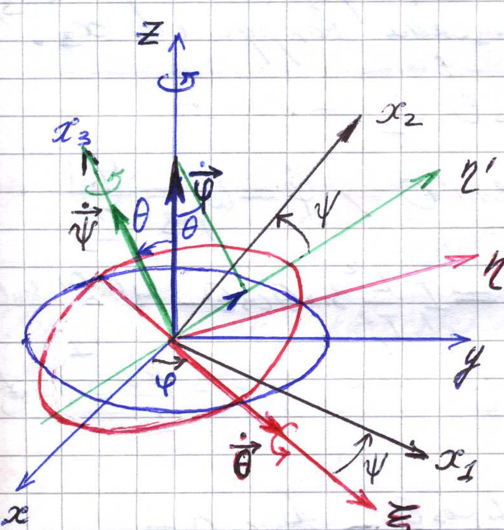
Таким образом, имеем в K' системе главных осей волчка:

$$\omega_3 = \frac{L_3}{I_3} = \frac{L\cos\theta}{I_3} = const, \Rightarrow \theta = const$$

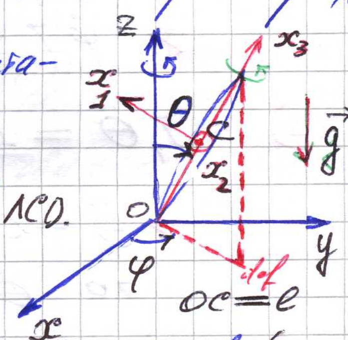
Кроме того

$\vec{\omega} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) + \vec{\omega}_3$ — вращается в K' с угловой скоростью $\Omega = \frac{I_1 - I_3}{I_1}\omega_3$, т.е. воспроизводится результат предыдущего раздела.

§5. Углы Эйлера и уравнения Лагранжа для них. Описание движения твердого тела.



При описании движений твердого тела используются часто углы Эйлера (φ, θ, ψ) и соответствующие им уравнения Эйлера-Лагранжа.



Углы Эйлера задают ориентацию твердого тела в пространстве и вводятся следующим образом. Пусть (x, y, z) — неподвижная ЛСО. Угол φ, угол прецессии, получается поворотом системы (x, y, z) вокруг оси z, при этом (x, y, z) переходит в (ξ, η, x_3). Угол θ, угол нутации, получается поворотом вокруг коорд. линии ξ (линии узлов), система (ξ, η, x_3) переходит в (ξ, η', x_3). Угол ψ, угол собственного вращения, получается поворотом вокруг оси x_3, при этом система (ξ, η', x_3) переходит в (x_1, x_2, x_3).

Легко вычисляются угловые скорости вращения $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ вокруг осей (x_1, x_2, x_3) в терминах угловых скоростей $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ и $\dot{\psi}$:

$$\omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$
$$\omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,$$
$$\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta.$$

Лагранжиан тяжелого (в однородном поле тяжести Земли) симметричного волчка имеет, очевидно, следующий вид:

$$L = \frac{I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2} - mgl\cos\theta =$$
$$= \frac{I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2)}{2} + \frac{I_3(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta)^2}{2} - mgl\cos\theta.$$

По лагранжиану L вычисляются уравнения Лагранжа-Эйлера. Очевидно, координата φ является циклической, поэтому сохраняется соответствующий ей обобщенный импульс p_φ:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta) = Const.$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для углов θ и ψ имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=\frac{\partial L}{\partial\theta}\Rightarrow I_1\ddot\theta=I_1\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta-I_3\dot\varphi(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)\sin\theta+$$
$$+mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=\frac{\partial L}{\partial\psi}\Rightarrow\frac{d}{dt}I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=\frac{\partial L}{\partial\psi}=0\Rightarrow\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta=\mathrm{const}$$

Задача Опишите движение свободного симметричного волчка, используя уравнения Эйлера-Лагранжа.

Решение Так как координата ψ циклическая, то

(А) $$P_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3(\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta)=I_3\omega_3=L\cos\theta=\mathrm{const}.$$

$\Rightarrow$ $\cos\theta=\frac{P_\psi}{L}=\mathrm{const}$, угол нутации постоянен,

$\omega_3=\frac{L\cos\theta}{I_3}=\mathrm{const}$, постоянна также угловая скорость ω_3, собственного вращения вокруг оси x_3.

(Б) $$P_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\overset{def}{=}|\vec L|=I_1\dot\varphi\sin^2\theta+I_3\cos\theta\,\omega_3=\mathrm{const}$$

$$\Rightarrow\dot\varphi I_1\sin^2\theta=|\vec L|-|\vec L|\cos^2\theta=|\vec L|\sin^2\theta\Rightarrow\dot\varphi=\omega_{прец}=\frac{|\vec L|}{I_1}.$$

(В) $$I_1\ddot\theta=I_1\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta-I_3\dot\varphi\omega_3\sin\theta=I_1\frac{L^2}{I_1^2}\sin\theta\cos\theta-\frac{L\cos\theta L\sin\theta}{I_1}$$

$\Rightarrow\ddot\theta=0$, $\dot\theta=\dot\theta_0=\mathrm{const}$, но так как $\cos\theta=\frac{P_\psi}{L}=\mathrm{const}$,

то $\dot\theta=\dot\theta_0=0$, $\theta=\mathrm{const}$.

(Г) $$\dot\psi+\dot\varphi\cos\theta=\omega_3=\frac{L\cos\theta}{I_3}\Rightarrow\dot\psi=\frac{L\cos\theta}{I_3}-\frac{L}{I_1}\cos\theta=$$
$$=L\cos\theta\left(\frac{1}{I_3}-\frac{1}{I_1}\right)$$ — получается угловая скорость вращения $|\vec\omega'|$ твердого тела относит. системы гл. осей $(x_1,x_2,$ тот же результат, что и в §3.

Вообщем, воспроизводятся результаты предыдущих разделов.

Задача Покажите, что задача об описании движений тяжелого симметричного волчка в однородном поле тяжести сводится к анализу одномерного движения по углу θ в поле с эффективной потенциальной энергией $U_{эфф}=mgl\cos\theta+\frac{(P_\varphi-P_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$

Решение $$L=\frac{I_1(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2)}{2}+\frac{I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)^2}{2}-mgl\cos\theta$$

(А) $$P_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)=I_3\omega_3=L\cos\theta=\mathrm{const}$$

$$P_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=I_1\dot\varphi\sin^2\theta+I_3(\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta=I_1\dot\varphi\sin^2\theta+I_3\omega_3\cos\theta$$
$$P_\varphi=I_1\dot\varphi\sin^2\theta+P_\psi\cdot\cos\theta$$

$$P_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=I_1\dot\theta.\Rightarrow\dot\theta=\frac{P_\theta}{I_1},\quad\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi=\frac{P_\psi}{I_3}$$

⑥ Выпишем энергию системы, совпадающую в данном случае с гамильтонианом:

$$H = E = p_\theta\dot\theta + p_\varphi\dot\varphi + p_\psi\dot\psi - L =$$

$$\left(\dot\varphi = \frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta},\quad \dot\psi = \frac{p_\psi}{I_3} - \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)}{I_1\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow E = I_1\dot\theta^2 + p_\varphi\frac{p_\varphi - p_\psi\cos\theta}{I_1\sin^2\theta} + p_\psi\left(\frac{p_\psi}{I_3} - \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)}{I_1\sin^2\theta}\cos\theta\right) -$$

$$- I_1\frac{\dot\theta^2}{2} - \frac{I_1\sin^2\theta}{2}\frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{I_1^2\sin^4\theta} - \frac{I_3 p_\psi^2}{2I_3^2} + mgl\cos\theta =$$

$$= \frac{I_1\dot\theta^2}{2} + \frac{p_\psi^2}{2I_3} + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta$$

$$\Rightarrow \text{const} = E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3} = \frac{I_1\dot\theta^2}{2} + mgl\cos\theta + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta} = \frac{I_1\dot\theta^2}{2} + U_{эфф}(\theta)$$

$$U_{эфф}(\theta) = mgl\cos\theta + \frac{(p_\varphi - p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}\left(E' - U_{эфф}(\theta)\right)}},\quad t = \int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}\left(E' - U_{эфф}(\theta)\right)}}$$ — задача решается в квадратурах

Покажем, как качественно анализируется характер движения волчка по углу θ. Удобно ввести новую независимую переменную:

$$u = \cos\theta,\quad \dot u = -\sin\theta\,\dot\theta,\quad \dot\theta = -\dot u/\sin\theta,$$

$$\Rightarrow \frac{I_1\dot\theta^2}{2} = \frac{I_1\dot u^2}{2\sin^2\theta} = E' - \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{2I_1\sin^2\theta} - mglu$$

$$\dot u^2 = \frac{2E'(1-u^2)}{I_1} - \frac{(p_\varphi - p_\psi u)^2}{I_1^2} - \frac{2mgl}{I_1}u(1-u^2) =$$

т.е. $= \alpha(1-u^2) - (b - au)^2 - \beta u(1-u^2)$,

$$\dot u^2 = \beta u^3 - u^2(a^2+\alpha) + u(2ab - \beta) + \alpha - b^2 \overset{def}{=} \varphi(u).$$

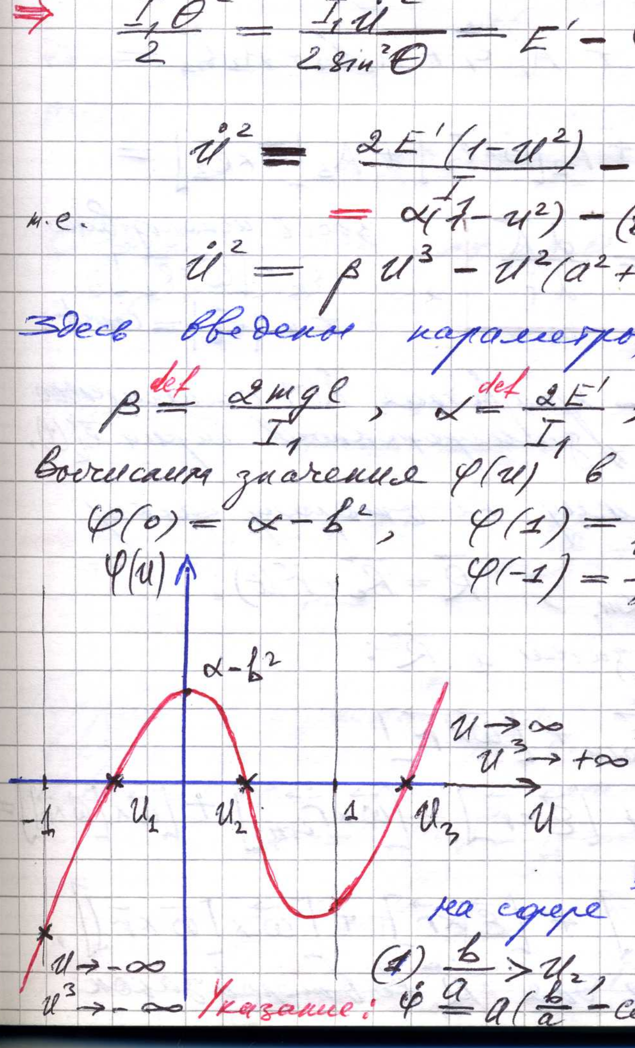
Здесь введены параметры, характеризующие рассм. систему:

$$\beta \overset{def}{=} \frac{2mgl}{I_1},\quad \alpha \overset{def}{=} \frac{2E'}{I_1},\quad a \overset{def}{=} \frac{p_\psi}{I_1},\quad b \overset{def}{=} \frac{p_\varphi}{I_1}.$$

Вычислим значения $\varphi(u)$ в нескольких точках:

$$\varphi(0) = \alpha - b^2,\quad \varphi(1) = \beta - (a^2+\alpha) + (2ab - \beta) + \alpha - b^2 = -(a-b)^2 \leqslant 0$$

$$\varphi(-1) = -\beta - (a^2+\alpha) - (2ab - \beta) + \alpha - b^2 = -(a+b)^2 \leqslant 0$$



$$\varphi(0) = \alpha - b^2 = \frac{2E'}{I_1} - \frac{p_\varphi^2}{I_1},\quad E' = E - \frac{p_\psi^2}{2I_3}.$$

$u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ — область, где $\varphi(u) \geqslant 0$.

Задача. Завершите рассмотрение качественного анализа движения тяжелого волчка. Изобразите для этого возможные типы траекторий (·)C, OC = l, на сфере OC = l. Рассмотрите случаи

(1) $\frac{b}{a} > u_2$, (2) $\frac{b}{a} = u_2$, (3) $u_1 < \frac{b}{a} < u_2$ (4) $\frac{b}{a} = u_1$

Указание: $\dot\varphi = a\left(\frac{b}{a} - \cos\theta\right)/(I_1\sin^2\theta)$.