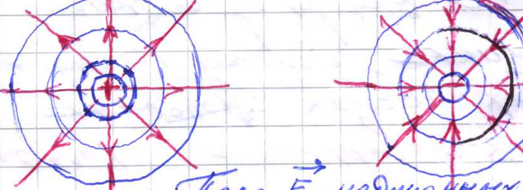
Лекция 11. Проводники в электростатическом поле. Свойства решений уравнений Пуассона и Лапласа. Идея метода изображений.

§1. Силовые линии и эквипотенциальные поверхности.

Электростатические поля удобно характеризовать с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей:

- Линия, касательная к которой в любой её точке задаёт направление поля, называется силовой линией.



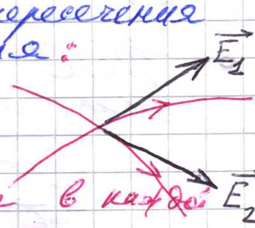
Поля $\vec{E}$ уединенных зарядов.

Свойства силовых линий

1° Силовые линии начинаются на положительных зарядах и уходят от них на бесконечность.

2° Силовые линии заканчиваются на отрицательных зарядах и приходят к ним из бесконечности.

3° Силовые линии не пересекаются, иначе в точке пересечения этих линий было бы два вектора напряженности поля: Разумеется, силовые линии пересекаются в местах расположения точечных зарядов.

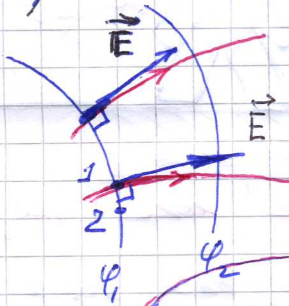


Поле в каждой точке характеризуется одним вектором $\vec{E}$.

4° Густота силовых линий характеризует величину, т.е. модуль $|\vec{E}|$ вектора $\vec{E}$.

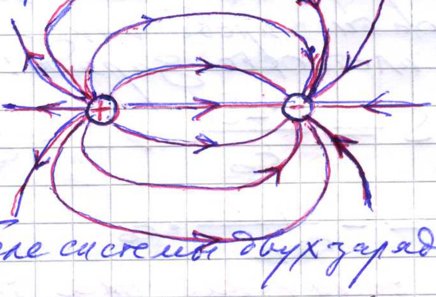
5° Силовые линии пересекаются с так называемыми эквипотенциальными поверхностями под прямым углом.

- Поверхности равного потенциала называются эквипотенциальными.

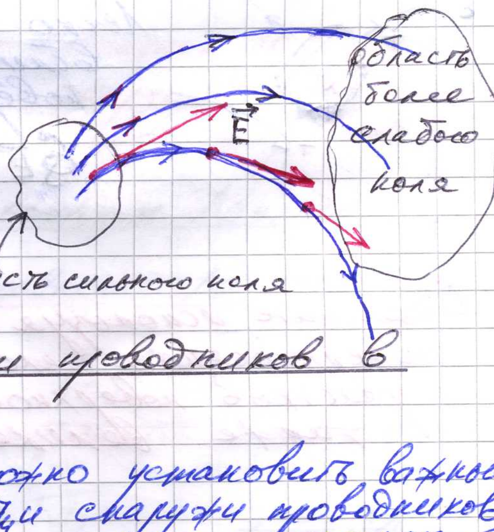


При смещении из (·)1 в бесконечно близко расположенную точку (·)2 вдоль эквипотенциальной поверхности изменение потенциала равно нулю:

$$d\varphi_{12} = (\vec{\nabla}\varphi, d\vec{x}_{12}) = 0 \Rightarrow -\vec{\nabla}\varphi = \vec{E} \perp d\vec{x}_{12}$$



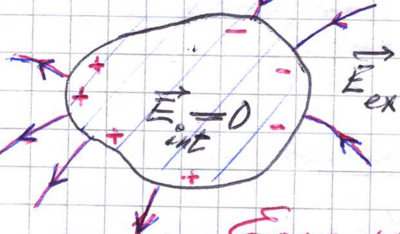
Поле системы двух зарядов



§2. О полях вокруг проводников и внутри проводников в электростатическом случае.

Опираясь на простые соображения, можно установить важные свойства электростатических полей внутри и снаружи проводников, проводники при этом могут быть заряжены, или электрически нейтральны.

- Внутри проводников поле $\vec{E}$ отсутствует, т.е. $\vec{E} = 0$, любое отличное от нуля внутреннее поле привело бы к возникновению электрических токов, а их в электростатическом случае нет.



$\vec{E}_{ext} \neq 0$

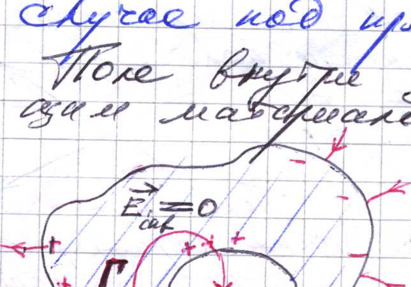
$$\vec{E}_{int}=0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_{int} = \frac{\rho_{int}}{\varepsilon_0} = 0$$

$\Rightarrow \rho_{int}=0$ — объемная плотность электрических зарядов внутри проводников равна нулю!

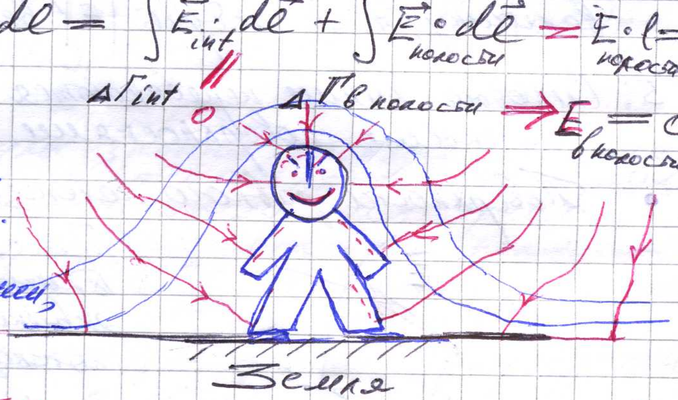
Если проводник заряжен или на нём с различных сторон внешние поле индуцируют заряды, то все эти заряды располагаются на поверхности проводника.

- Равенство поля $\vec{E}_{int} = -\vec{\nabla}\varphi_{int} = 0$ внутри проводника нулю приводит к постоянству потенциала, одного и того же значения потенциала во всех точках проводника, в том числе и во всех точках поверхности проводника. Отсюда следует, что силовые линии внешнего поля пересекают поверхность проводников в электростатическом случае под прямым углом.

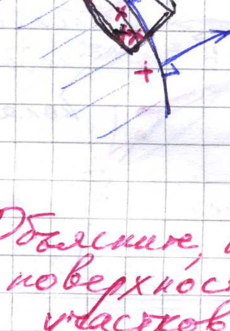
- Поле внутри замкнутых полостей, окруженных проводящим материалом, равно нулю, так как если предположить, что поле внутри полости есть, то



$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \Rightarrow \oint_{\Gamma}\vec{E}\cdot d\vec{l} = \underbrace{\int_{\Delta\Gamma_{int}}\vec{E}_{int}\,d\vec{l}}_{=0} + \int_{\Delta\Gamma_{\text{в полости}}}\vec{E}\cdot d\vec{l} = E\cdot l = 0 \Rightarrow E_{\text{в полости}}=0$$



Задача. Известно, что Земля имеет отрицательный заряд. Падение напряжения в эл. поле Земли на расстоянии, равном росту человека, составляет 100÷150 Вольт. Объясните, почему человека, стоящего босиком на Земле, такое поле не убивает?

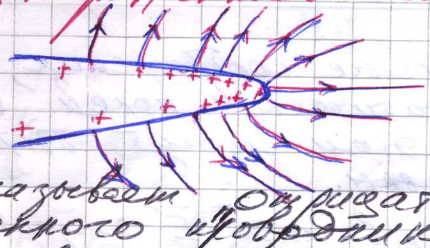
- 

Легко получить выражение для поля $\vec{E}=E\vec{n}$ вблизи поверхности проводника через поверхностную плотность заряда:

$$\oint\vec{E}\cdot d\vec{S} = E_n\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_{ext}$$

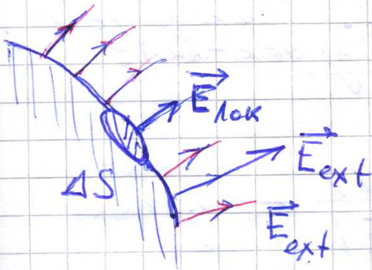
$$\Rightarrow \sigma(\vec{r}) = -\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n}\cdot\varepsilon_0$$

Объясните, используя полученное выражение для $\sigma(\vec{r})$, почему поверхностная плотность заряда больше у заостренных участков поверхности? Напряженность поля у таких участков также велика.



- Электрическое поле оказывает „отрицательное" давление на поверхность заряженного проводника, то есть тянет проводник, его куски поверхности наружу.

Чтобы получить формулу для величины такого давления, необходимо вычислить эл. поле, создаваемое в месте положения площадки ΔS окружающими эту площадку зарядами без учёта поля зарядов на самой площадке, так называемое локальное поле $\vec E_{лок}$.



$$\vec E_{лок} = \vec E_+ + \vec E_- = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec n - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec n = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec n$$

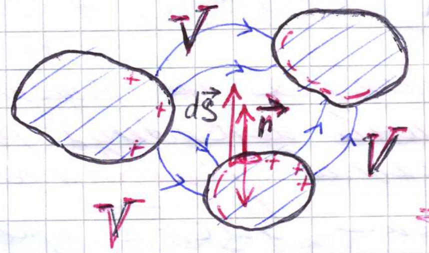
Площадку ΔS делаем нейтральной, приклеивая к ней ΔS с отрицательным $-\sigma\Delta S$ зарядом

$$\vec F_{\Delta S} = \vec E_{лок}\cdot\sigma\cdot\Delta S = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\Delta S\,\vec n$$

$$\longrightarrow \quad p = \frac{|\vec F_{\Delta S}|}{\Delta S} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\vec E_{ext}^{\,2}\varepsilon_0}{2}$$

Сила $\vec F_{\Delta S} \uparrow\uparrow \vec n$, вектору нормали к поверхности, т.е., действительно тянет площадку ΔS наружу. Более того, величина вычисленного давления в точности совпадает с плотностью энергии электрического поля! Направление действия силы $\Delta\vec F$, очевидно, не зависит от знака заряда $\pm\sigma$.

- Поучительно вычислить энергию поля в пространстве, окружающем заряженные (и незаряженные) проводники.



$$W = \int_V \frac{\varepsilon_0 \vec E^2}{2}\,dV \qquad \left(\vec E^2 = (\vec\nabla\varphi)^2 = \vec\nabla(\varphi\vec\nabla\varphi) - \varphi\Delta\varphi\right)$$

по пространству вне проводников

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \left(\vec\nabla(\varphi\vec\nabla\varphi) - \underbrace{\varphi\Delta\varphi}_{0,\ \text{в силу } \Delta\varphi=0}\right) dV$$

по теореме Гаусса-Остроградского

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_k \oint \varphi_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}\, dS_n{}_{\text{внешн. к } V} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\sum_k \varphi_k \oint \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = \sum_k \frac{\varphi_k q_k}{2}$$

$$\Rightarrow \quad W_{поля} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} q_k\varphi_k$$

– совпадает по форме с энергией N точечных зарядов!!

§3. Свойства решений уравнений Пуассона и Лапласа.

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

применяется там, где $\rho \neq 0$

Уравнение Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0$$

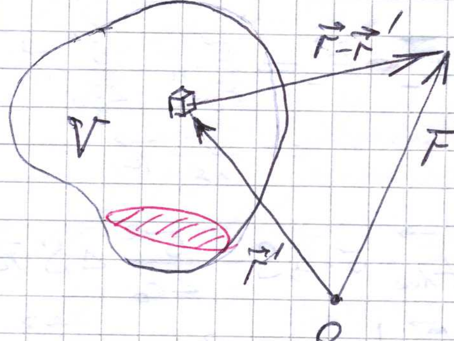
применяется там, где $\rho = 0$.

Теорема. Пусть $\varphi_П$ – некот. решение ур-я Пуассона, а $\varphi_Л$ – решение уравнения Лапласа, тогда $\varphi_П + \varphi_Л$ также является решением ур-я Пуассона, действительно

$$\Delta(\varphi_П + \varphi_Л) = \Delta\varphi_П + \underbrace{\Delta\varphi_Л}_{=0} = \Delta\varphi_П = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

С помощью любых решений ур-я Лапласа можно размножать решения ур. Пуассона

С помощью любых решений уравнения Лапласа мож-но "размножать" решения ур-я Пуассона. Более того, справедлива следующая теорема (без док-ва):



Пусть

$$\varphi_{\text{част.п.}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$ — частное решение уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

полученное с помощью принципа суперпозиции для локализованной в пр-ве системы зарядов с плотностью ρ $\frac{Кл}{м^3}$.

Ясно, что $\varphi_{\text{част}}\Big|_{r\to\infty} \propto \frac{1}{r}$ / убывает обратно пропорционально r.

Общее решение уравнения Пуассона $\varphi_{\text{общее Пуасс.}}$ получается как сумма частного решения уравнения Пуассона и общего решения ур-я Лапласа:

$$\varphi_{\text{общее Пуасс.}} = k\int\limits_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \varphi_{\text{общее Лапл.}};\quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

Произвол в выборе $\varphi_{\text{общее Лапл}}$ устраняется при решении задач, в которых разыскиваемый потенциал удовлетворяет определённым граничным условиям.

Обычно решение ур-я Пуассона ищется при определённых граничных условиях, а именно

$$(*)\quad \boxed{\begin{aligned}&\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0},\\ &\varphi\Big|_{\partial(V)} = \varphi_0(\vec{r})\end{aligned}}\qquad \text{или}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial(V)} = \varphi_1(\vec{r}).\end{aligned}}\quad (**)$$

Решается ур-е Пуассона с граничным условием для потенциала.

Решается ур-е Пуассона с граничным условием для нормальной производной потенциала.

Можно показать, что в указанных постановках, т. е. для указанных типов граничных условий, решение уравнения Пуассона / единственно.

Доказательство сформулированного утверждения базируется на следующей / лемме.

<u>Лемма</u> Пусть $\varphi(\vec{r})$ — решение ур-я Лапласа, тогда

$$\int\limits_V (\vec{\nabla}\varphi)^2 dV = \int\limits_V \vec{\nabla}(\varphi\vec{\nabla}\varphi)\,dV - \int\limits_V \varphi\overset{=0}{\Delta\varphi}\,dV =$$

$$= \int\limits_V \vec{\nabla}(\varphi\vec{\nabla}\varphi)\,dV = \oint\limits_{\partial(V)} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS_n.$$

Теорема. Пусть $\varphi(\vec r)$ есть решение ур-я Пуассона с граничным условием (А) или граничным условием (АА), тогда это решение единственно, т.е. определено с точностью до константы.

Док-во. Предположим, что существует два решения $\varphi' \neq \varphi''$, удовлетворяющих гр. условиям (А) или (АА). Разность $\varphi = \varphi' - \varphi''$ двух указанных решений уравнения Пуассона очевидно является решением ур-я Лапласа, а поэтому в силу леммы

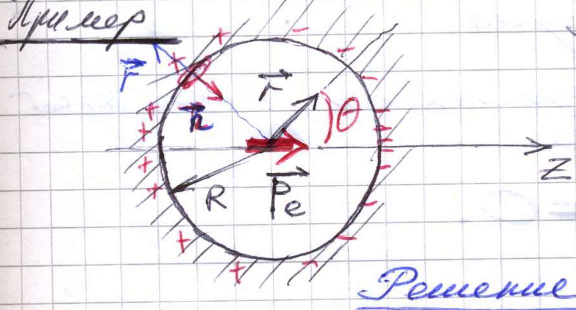
$$\int\limits_V (\vec\nabla\varphi)^2 dV = \oint\limits_{\partial(V)} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_n = 0$$ — в силу (А) или (АА).

← разность $\varphi' - \varphi''$

$\Rightarrow \vec\nabla\varphi = 0$, т.е. $\varphi'(\vec r) - \varphi''(\vec r)$ — определена с точн. до const. и поэтому $\varphi'(\vec r) = \varphi''(\vec r) + const$ ∎

Очевидно, $\varphi = (\varphi' - \varphi'')\Big|_{\vec r \in \partial(V)} \equiv 0$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial}{\partial n}(\varphi' - \varphi'')\Big|_{\vec r \in \partial(V)} \equiv 0$, это и приводит к равенству нулю интеграла $\int\limits_V (\vec\nabla\varphi)^2 dV$.

Пример



В центре сферической полости радиуса R находится эл. диполь $\vec p_e$, ориентированный вдоль оси Z. Полость сделана внутри бескон. проводника, потенциал которого равен нулю. Требуется определить потенциал поля внутри полости.

Решение:

К решению $\varphi_{дип} = k\dfrac{\vec p_e \cdot \vec r}{r^3}$ — (поле диполя), добавим решение ур-я Лапласа, пропорциональное координате z:

$$\varphi_{дип} + Az = k\frac{p_e z}{r^3} + Az = \left(k\frac{p_e}{r^3} + A\right)z$$

Уравнение Лапласа $\Delta\varphi = 0$ имеет обширный "запас" решений, например, решения вида Ax, Ay, Az и т.д. Решение $\varphi = Az$ выбрано с тем, чтобы $\forall\,\theta$ удовлетворить требуемому граничному условию:

$$\varphi_{дип} + Az = \left(k\frac{p_e}{r^3} + A\right) r\cos\theta \Big|_{r=R} = \left(\frac{kp_e}{R^3} + A\right) R\cos\theta,$$

откуда находим A — константу:

$$A = -\frac{kp_e}{R^3}$$

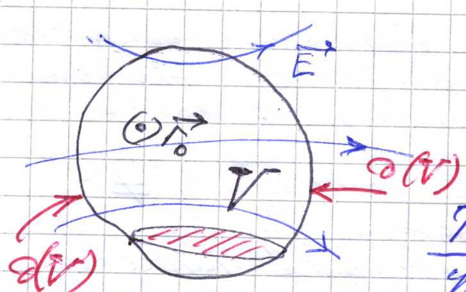
$$\rightarrow \varphi_{в\ полости}(\vec r) = k\frac{\vec p_e \cdot \vec r}{r^3} - \frac{kp_e}{R^3}z = kp_e\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

В силу доказанной выше теоремы, это решение единственно.

Задача. Определите плотность индуцированных зарядов на стенках полости.

Ответ: $$\sigma_{инд} = -\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = -kp_e\cos\theta \times \left(\frac{2}{r^3} + \frac{1}{R^3}\right)$$

Какой знак имеет $\sigma_{инд}$ при $\theta \sim 0^\circ$, $\theta \sim 180^\circ$?



Для решений уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

справедлива теорема о мини-максе.

Теорема (о мини-максе). Решение $\varphi(\vec r)$ уравнения Лапласа достигает своих минимального φ_{min} и максимального φ_{max} значений на границе ∂V области V.

Доказательство методом от противного.

Пусть φ_{min} достигается в (·) $r_0 \in V$ — во внутренней точке $\vec r_0$ области V, тогда по условию минимума

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{\vec r_0} > 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\Big|_{\vec r_0} > 0, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Big|_{\vec r_0} > 0$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} > 0,$$ что

противоречит $\Delta\varphi = 0$. Аналогично доказывается и для случая максимума.

Пример

Поле $\varphi(\vec r)$ внутри полости, удовлетворяет ур-ю Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

$$const = \varphi(\vec r)_{min}\Big|_{\vec r \in \partial V} \le \varphi(\vec r)\Big|_{r \in V} \le \varphi(\vec r)_{max}\Big|_{r \in \partial(V)} = const$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec r)\Big|_{r \in V} = Const \Rightarrow \vec E_{\text{в полости}} = 0$$

Для решений уравнения Лапласа в области V удовлетворяющих на границе области краевым условиям вида

(*) $\Delta\varphi = 0$ в V, $\varphi\big|_{r \in \partial V} = \varphi_0(\vec r)$

$\Delta\varphi = 0$ в V, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\vec r \in \partial V} = \hat\varphi_0(\vec r)$ (**)

решение ур-я Лапласа единственно т.е. определяется с точностью до константы.

Док-во: Пусть имеется два реш. $\varphi_1(\vec r) \neq \varphi_2(\vec r)$ ур-я Лапласа. Образуем разность этих решений

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2, \Rightarrow (\varphi_1 - \varphi_2)\Big|_{\vec r \in \partial(V)} \equiv 0$$

$\Delta\varphi = 0$ или $\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right)\Big|_{r \in \partial(V)} = 0.$

$$0 = (\varphi_1 - \varphi_2)_{min\, r \in \partial(V)} \le (\varphi_1 - \varphi_2)_{\vec r \in V} \le (\varphi_1 - \varphi_2)_{max\, r \in \partial V} = 0$$

или точнее для $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\int(\vec\nabla\varphi)^2 dV = \oint_{\partial(V)} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} dS = 0 \Rightarrow \vec\nabla\varphi = 0, \quad \varphi(\vec r) = Const.$$