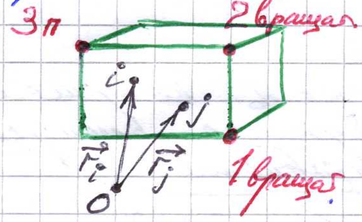
# Лекция 10. Кинематика движений абсолютно твердого тела. Кинетическая энергия и момент импульса твердого тела. Тензор инерции твердого тела и его свойства

## §1. Кинематика абсолютно твердого тела

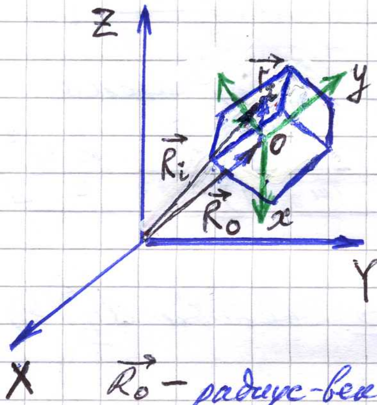
**Определение.** Абсолютно твердое тело — это такое тело, расстояния между любыми точками которого не изменяются с течением времени:




$$\forall\, i, j \quad r_{ij} = |\vec r_i - \vec r_j| = c_{ij} = const$$

В результате наложения указанных связей у абсолютно твердого тела остаётся шесть степеней свободы, число которых подсчитывается методом последовательного закрепления трёх точек тела, не лежащих на одной прямой. В результате получатся три поступательных и три вращательных степени свободы: $f=6$

$f =$ 3 поступ. + 2 вращат. + 1 вращат. = 6 степеней.




При описании движений абсолютно твердого тела удобно использовать неподвижную лабораторную систему отсчета с осями X, Y, Z и подвижную систему, связанную с твердым телом, а некоторой его точкой O, обычно этой точкой является центр инерции твердого тела:

$$\vec R_i = \vec R_0 + \vec r_i,$$

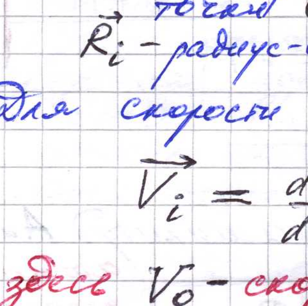
$\vec R_0$ — радиус-вектор опорной точки твердого тела (обычно центра масс),
$\vec r_i$ — радиус-вектор произвольной точки (i) твердого тела относительно точки O,
$\vec R_i$ — радиус-вектор точки (i) относительно точки O.

Для скорости движения точки (i) получаем выражение:

$$\vec V_i = \frac{d\vec R_i}{dt} = \frac{d\vec R_0}{dt} + \frac{d\vec r_i}{dt} = \vec V_O + [\vec\omega \times \vec r_i],$$

здесь $V_0$ — скорость поступательного движения твердого тела, а $d\vec r_i/dt = [\vec\omega \times \vec r_i]$ — скорость вращательного движения точки $\vec r_i$ вокруг точки O. Здесь и в дальнейшем мы будем часто использовать лемму о производной по времени постоянного по модулю вектора:

**Лемма**




$$\vec\omega = \frac{d\vec\varphi}{dt}$$

$$\Delta\vec A = [\vec\omega \times \vec A]\Delta t = [\Delta\vec\varphi \times \vec A]$$

$$|\Delta\vec A| = \Delta\varphi \cdot A\sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec A}{dt} = [\vec\omega \times \vec A]}$$

В частности, для любой точки (i) твердого тела

$$|\vec r_i| = const \Rightarrow \frac{d\vec r_i}{dt} = [\vec\omega \times \vec r_i]$$

Полезно осознать некоторые свойства угловой скорости $\vec\omega$ вращения твердого тела. А именно, имеет место следующая лемма об угловых скоростях вращ. тв. тела.

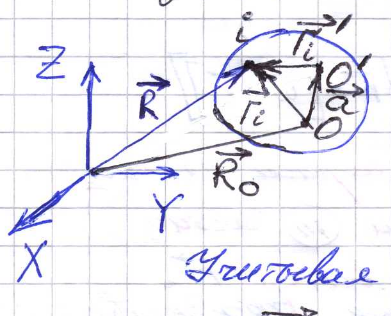
**Лемма.** Имеют место утверждения

(1) $\vec{\omega}$ не зависит от выбора точки $O$ в твердом теле;

(2) Всегда можно выбрать такую точку $O$ в твердом теле, скорость которой $\vec{V}_O = 0$ равна нулю, эта точка $O$ при этом может находиться и вне твердого тела, через указанную точку проходит мгновенная ось вращения тв. тела.

(3) $\vec{\omega}\cdot\vec{V}_O = \vec{\omega}\cdot\vec{V}_{O'} = inv$ — не зависит от выбора точки $O$.

Доказательство:




(1) $\vec{R}_i = \vec{R}_0 + \vec{r}_i \Rightarrow \vec{V}_i = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{r}_i]$

с другой стороны, т.к. $\vec{R}_i = \vec{R}_{0'} + \vec{r}_i'$, то точно также $\Rightarrow \vec{V}_i = \vec{V}_{0'} + [\vec{\omega}'\times\vec{r}_i']$, где $\vec{\omega}'$ — угловая скорость вращения тв. тела относительно точки $O'$.

Учитывая теперь то, что $\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{a}$, получаем

$$\Rightarrow \vec{V}_i = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{a}] + [\vec{\omega}\times\vec{r}_i'],$$ кроме того $\vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{a}]$,

поэтому

$$\Rightarrow \vec{V}_i = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{a}] + [\vec{\omega}'\times\vec{r}_i'],$$ сравнивая последние две формулы, заключаем

$$\Rightarrow [(\vec{\omega}-\vec{\omega}')\times\vec{r}_i'] = 0,\ \forall \vec{r}_i' \Rightarrow \vec{\omega}-\vec{\omega}'=0,\ \vec{\omega}=\vec{\omega}'.$$

(2) Если $\vec{V}_0 \neq 0$, то подберем точку $O'$ так, чтобы

$$\Rightarrow \vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{a}] = 0$$ выбором $\vec{a}$ это всегда можно достичь.

(3) Из $\vec{V}_{0'} = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}\times\vec{a}]$ следует

$$\Rightarrow \vec{\omega}\cdot\vec{V}_{0'} = \vec{\omega}\cdot\vec{V}_0 + \vec{\omega}\cdot[\vec{\omega}\times\vec{a}] = \vec{\omega}\cdot\vec{V}_0.$$

Если $\vec{\omega}\perp\vec{V}_0$, то $\forall$ (·) $O'$ $\vec{\omega}\cdot\vec{V}_{0'} = 0 \Rightarrow \vec{\omega}\perp\vec{V}_{0'}$, $\forall O'$

## §2. Кинетическая энергия абсолютно твердого тела

Вычислим кинетическую энергию твердого тела относительно лабораторной системы отсчёта, используя формулы кинематики из предыдущего раздела:

$$K = \sum_i \frac{m_i \vec{V}_i^2}{2} = \sum_i \left(\frac{m_i \vec{V}_0^2}{2} + m_i \vec{V}_0\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}_i] + \frac{m_i}{2}[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]^2\right) =$$

$$= \frac{M\vec{V}_0^2}{2} + \vec{V}_0\cdot\left[\vec{\omega}\times\sum_i m_i\vec{r}_i\right] + \sum \frac{m_i[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]^2}{2}$$

Выберем далее в качестве точки $O$ центр инерции твердого тела, в таком случае

$$\sum_i m_i\vec{r}_i = 0,\ \text{т.к.}\ \vec{r}_{ц.и} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i} = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{M\vec{V}_0^2}{2} + \sum_i \frac{m_i[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]^2}{2},\quad M = \sum m_i$$

Радиус-вектор центра инерции относит. центра инерции равен нулю.

Кинетическая энергия тв. тела представлена таким образом, в виде суммы двух слагаемых — кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$K = K_{поступ} + K_{вращ}; \quad K_{поступ} = \frac{M\vec{V}_0^{\,2}}{2}, \quad K_{вращ} = \sum_i \frac{m_i[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]^2}{2}$$

Преобразуем далее выражение для кинетической энергии вращательного движения:

$$K_{вр.\,движ} = \sum_i \frac{m_i[\vec{\omega}\times\vec{r}_i]^2}{2} = \sum_m \frac{m[\vec{\omega}\times\vec{r}]^2}{2} =$$

$$= \sum_m \frac{m}{2}[\vec{\omega}\times\vec{r}]\cdot[\vec{\omega}\times\vec{r}] = \sum_m \frac{m}{2}\vec{\omega}\cdot[\vec{r}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]]$$

Здесь для удобства суммирование по номерам частиц заменено на суммирование по массам $m$ частиц, причем, массе $m$ соответствует радиус-вектор $\vec{r}$.

Применяя в последней формуле известное тождество:

$$[\vec{a}\times[\vec{b}\times\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

получим

$$K_{вр.\,дв} = \sum_m \frac{m}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\vec{\omega}\cdot r^2 - \vec{r}(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\right) =$$

$$= \sum_m \frac{m}{2}\left(\omega_i\omega_k\delta_{ik}r^2 - \omega_i\omega_k x_i x_k\right) = \sum_{i,k=1}^{3}\frac{J_{ik}\omega_i\omega_k}{2},$$

где введён так называемый тензор инерции $J_{ik}$ твердого тела:

$$J_{ik} = \sum_m m(r^2\delta_{ik} - x_i x_k) = \begin{pmatrix} \sum_m m(x^2+y^2), & -\sum m xy, & -\sum m x \ldots \\ -\sum_m m yx, & \sum_m m(x^2+z^2), & -\sum m yz \ldots \\ -\sum_m m zx, & -\sum_m m zy, & \sum_m m(x^2+y^2) \ldots \end{pmatrix}$$

Подчеркнем что при подсчёте кинетической энергии твердого тела используется разбиение твердого тела на достаточно малые массы $m$, местоположение которых в твердом теле определяется относительно центра инерции твердого тела радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$.

## §3 Момент импульса абсолютно твердого тела.

Получим также удобное для приложений выражение для момента импульса твердого тела:

$$\vec{L} = \sum_m[\vec{R}\times m\vec{V}] \xrightarrow[\vec{R}=\vec{R}_0+\vec{r}]{\vec{V}=\vec{V}_0+[\vec{\omega}\times\vec{r}]} \sum_m[\vec{R}_0\times m\vec{V}_0] +$$

$$+ \sum_m\left[\vec{R}_0\times[\vec{\omega}\times m\vec{r}]\right] + \sum_m\left[m\vec{r}\times\vec{V}_0\right] + \sum_m\left[\vec{r}\,m\times[\vec{\omega}\times\vec{r}]\right]$$

Выбирая опять в качестве точки O центр инерции твердого тела, и учитывая, что

$$\sum_m m\vec{r} = 0, \text{ т.к } \vec{r}_{ц.и.} = \frac{\sum_m m\vec{r}}{\sum m} = 0,$$

получаем

$$\vec{L}_{тв.тела} = \sum_m \left[\vec{R}_0 \times m\vec{V}_0\right] + \sum_m m\left[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right] = \vec{L}_{орбит} + \vec{L}_{внутр}$$

Первое слагаемое представляет собой момент импульса орбитального движения твердого тела

$$\vec{L}_{орбит} = \left[\vec{R}_0 \times M\vec{V}_0\right].$$

Второе слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$\vec{L}_{внутр} = \vec{L}_{собств} = \sum_m m\left[\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]\right] =$$

$$= \sum_m \left(\vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\right) m$$

откуда для $i$-ой компоненты $\vec{L}_{собств}$ получаем выр-е:

$$L_i = \sum_m m\left(\omega_k \delta_{ik} r^2 - \omega_k x_i x_k\right) = \sum_k J_{ik}\omega_k .$$

Как и кинетическая энергия вращательного движения, собственный момент импульса твердого тела выражен через угловую скорость $\vec{\omega}$ и тензор инерции $J_{ik}$:

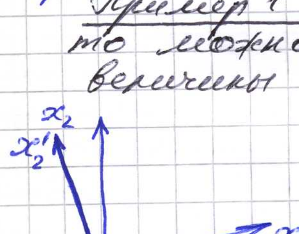
$$J_{ik} = \sum_m m\left(r^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) = J_{ki},$$

который является симметричным тензором второго ранга. В следующем разделе будет дано определение тензорных величин и будут обсуждены некоторые их важные свойства.

## §4. Общее определение тензорных физических величин.

Наряду со скалярными и векторными величинами в физике широко используются тензорные величины. Оказывается, все перечисленные величины можно определить по закону их преобразования при преобразованиях системы координат или, более общо, при преобразованиях координат (и времени) при переходе от одной системы отсчета к другой.

Пример 1 Если рассматривать повороты системы отсчета, то можно определить скалярные, векторные и тензорные величины по закону их трансформации при вращениях, при этом говорят о скалярах, векторах и тензорах в трёхмерном пространстве:



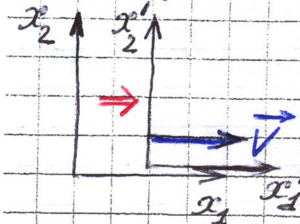

А. $S$ — скаляр, если $\underbrace{S'}_{\text{в повернутой системе}} = \underbrace{S}_{\text{в исходной системе}}$

Б. $\vec{x}$ — трёхвектор, если $\vec{x}' = a\vec{x}$, т.е. $x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k$

В. У тензорных величин более общий закон преобразования, например, $x_i x_k$, произведение компонент трёхвектора $\vec{x}$, преобразуется следующим образом:

$$x_i' x_k' = \sum_{l,m}^{3} a_{il} a_{km} x_l x_m$$

Пример 2 Можно определить скалярные, векторные и тензорные величины по закону их преобразования при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой ИСО, движущейся относительно первой с некоторой скоростью:




Преобразования Лоренца координат и времени

$$\begin{cases} x_0' = \gamma(x_0 - \beta x_1), \\ x_1' = \gamma(x_1 - \beta x_0), \\ x_2' = x_2, \; x_3' = x_3 \end{cases}$$

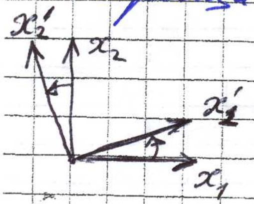
Скалярные, векторные и тензорные величины

(А) $s' = s$ − скалярные,

(Б) $x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} L_{\mu\nu} x_\nu$ − векторные

(В) $x'_\mu x'_\lambda = \sum_{\nu,\sigma=0} L_{\mu\nu} L_{\lambda\sigma} x_\nu x_\sigma$ − тензорные

Скалярные, векторные и тензорные величины определяются в рассматриваемом случае по отношению к преобразованиям Лоренца так, как указано выше в случаях (А), (Б) и (В).




Трёхмерные пространственные вращения характеризуются так называемыми ортогональными матрицами поворота $\hat{a}$:

$$\vec{x}' = \hat{a}\vec{x}, \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

кратко $x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k$.

Свойство ортогональности матриц поворота следует из инвариантности скалярного произведения трёхвекторов:

$$(\vec{x}', \vec{y}') = (\hat{a}\vec{x}, \hat{a}\vec{y}) = (\vec{x}, \hat{a}^T\hat{a}\vec{y}) = (\vec{x}, \vec{y}) = inv$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}^T\hat{a} = \hat{E} \Rightarrow \sum_{k=1}^{3} (\hat{a}^T)_{ik} \hat{a}_{kl} = \delta_{il}, \text{ т.е. } \sum_{k=1}^{3} a_{ki} a_{kl} = \delta_{il}$$

Аналогично

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\hat{a}^T\vec{x}', \hat{a}^T\vec{y}') = (\vec{x}', \hat{a}\hat{a}^T\vec{y}') = (\vec{x}', \vec{y}') = inv$$

$$\Rightarrow \quad \hat{a}\hat{a}^T = \hat{E}, \quad \sum_{k=1}^{3} a_{ik} a_{lk} = \delta_{il}, \quad \text{т.о. } \hat{a}^{-1} = \hat{a}^T.$$

**Определение** $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ − трёхвектор, если при поворотах его компоненты преобразуются как компоненты $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$A_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} A_k \quad \text{преобразуются как} \quad x_i' = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} x_k$$

**Определение** $\underbrace{T_{ik\ldots l}}_{N}$ − тензор $N$-го ранга, если при поворотах системы координат, его компоненты преобразуются как произведение $x_i x_k \ldots x_l$ $N$ компонент $\vec{x}$:

$$T'_{ik\ldots l} = \sum_{\underbrace{p,q,\ldots,r}_{N}} a_{ip} a_{kq} \ldots a_{lr} T_{pq\ldots r} \quad \sim \quad x_i' x_k' \ldots x_l' = a_{ip} a_{kq} \ldots a_{lr} x_p x_q \ldots x_r$$

**Пример** Величина $I_{ik} = \sum_m m(r^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$ действительно является тензором второго ранга, так как при поворотах системы координат

$$\delta'_{ik} = \sum_{p,q=1}^{3} a_{ip} a_{kq} \delta_{pq} = \sum_{p=1}^{3} a_{ip} a_{kp} = \delta_{ik}$$

компоненты символа Кронекера не измен. при поворотах.

$$x_i' x_k' = \sum_{p,q} a_{ip} a_{kq} x_p x_q \Rightarrow I'_{ik} = \sum_{p,q=1}^{3} a_{ip} a_{kq} I_{pq}.$$

## §5 Тензор инерции и его свойства

В каждой системе отсчёта тензор инерции представляется симметричной матрицей:

$$I_{ik} = \sum_m m(r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) = I_{ki},$$

т.е. является симметричным тензором второго ранга.

Для симметричных тензоров второго ранга справедлива следующая

Теорема. (без доказательства) Всякий симметричный тензор $2^{го}$ ранга $T_{ik}=T_{ki}$ подходящим преобразованием системы координат может быть приведён к диагональному виду, то есть существует ортогональная матрица $\hat{a}$ такого поворота системы координат, что в повёрнутой системе координат

$$T'_{ik}=\sum_{p,q=1}^{3}a_{ip}a_{kq}T_{pq}=\delta_{pq}T_p=\begin{pmatrix}T_1&0&0\\0&T_2&0\\0&0&T_3\end{pmatrix}.$$

Определение. Система координат, в которой тензор инерции тв. тела диагонален, называется системой главных осей данного твёрдого тела.

Кинетическая энергия $K$ и момент импульса $\vec{L}$ абсолютно твёрдого тела в системе главных осей этого тела имеют особенно простой вид:

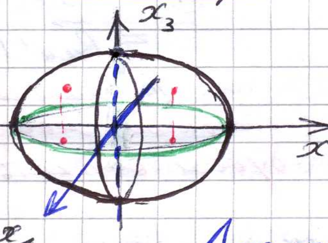
$$K=\sum_{i,k=1}^{3}\frac{J_{ik}\omega_i\omega_k}{2}=\sum_{i,k=1}^{3}\frac{J_k\delta_{ki}\omega_i\omega_k}{2}=\sum_{k=1}^{3}\frac{J_k\omega_k^2}{2}=\frac{J_1\omega_1^2}{2}+\frac{J_2\omega_2^2}{2}+\frac{J_3\omega_3^2}{2};$$

В системе гл. осей, где $J_{ik}=J_k\delta_{ik}$

$$L_i=\sum_{k=1}^{3}J_{ik}\omega_k=\sum_{k=1}^{3}J_k\delta_{ki}\omega_k=J_i\omega_i\Rightarrow\vec{L}=J_1\vec{\omega}_1+J_2\vec{\omega}_2+J_3\vec{\omega}_3$$

Приведём некоторые примеры тензоров инерции разл. тв. тел.

① Эллипсоид вращения




Очевидно,

$$J_{12}=J_{21}=-\sum_m mx_1x_2=\sum(-mx_1+mx_1)x_2$$

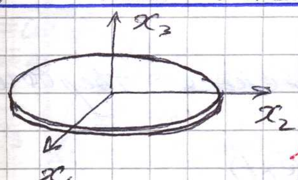
по парам масс с $x_1$-фикс. и с $x_2$, $-x_2$ координатами.

$$J_{ik}=\begin{pmatrix}\sum_m m(x_2^2+x_3^2), & -\sum mx_1x_2, & -\sum mx_1x_3\\ -\sum_m mx_2x_1, & \sum m(x_1^2+x_3^2), & -\sum mx_2x_3\\ -\sum_m mx_3x_1, & -\sum mx_3x_2, & \sum m(x_1^2+x_2^2)\end{pmatrix}$$

Аналогично, в системе координат с осями, являющимися осями симметрии эллипсоида, все недиагональные элементы $J_{ik}$, с $i\neq k$, равны нулю, так что такая система координат является системой главных осей и

$$J_{ik}=\begin{pmatrix}J_1&0&0\\0&J_2&0\\0&0&J_1\end{pmatrix}$$ , при этом $J_1=J_3$.

② Тонкий диск

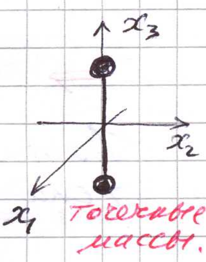



$$J_{ik}=\begin{pmatrix}J_1&0&0\\0&J_1&0\\0&0&J_3=2J_1\end{pmatrix}$$

в системе гл. осей, являющихся осями симметрии

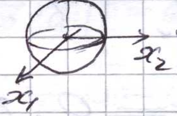
③ Гантель

$$J_{ik}=\begin{pmatrix}J_1&0&0\\0&J_1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$




точечные массы.

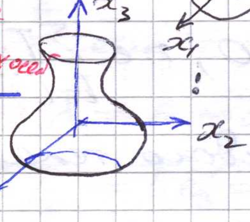
Определения Ⓐ Шаровой волчок




$$J_{ik}=\begin{pmatrix}J&0&0\\0&J&0\\0&0&J\end{pmatrix},\quad J=\frac{2}{5}mR^2$$

$\vec{L}=I\vec{\omega}$ — Любая система с центром в центре шара — система главных осей

Ⓑ Симметричный волчок




$$J_{ik}=\begin{pmatrix}J_1&0&0\\0&J_1&0\\0&0&J_3\end{pmatrix}$$ — тело с $J_1=J_2$, но с $J_2\neq J_3$

$\vec{L}=I_1(\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2)+I_3\vec{\omega}_3$

В системе главных осей

Ⓒ Несимметричный волчок

$$J_{ik}=\begin{pmatrix}J_1&0&0\\0&J_2&0\\0&0&J_3\end{pmatrix}$$ — в системе главных осей все моменты инерции на диагонали различны!

$\vec{L}=I_1\vec{\omega}_1+I_2\vec{\omega}_2+I_3\vec{\omega}_3$

В системе главных осей