Лекция 10 Расчёт электростатических полей с помощью принципа суперпозиции.

§1. Принцип суперпозиции для электрических полей.

Решения $\vec{E}(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$ фундаментальных уравнений электростатики для заданных произвольных распределений зарядов с плотностью $\rho(\vec{r})$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0, \end{cases} \quad \xleftrightarrow{\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi} \quad \begin{cases} \Delta\varphi(\vec{r}) = -\dfrac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}, \\ \vec{E} = -\vec{\nabla}_r\varphi(\vec{r}) \end{cases}$$

удобно искать с помощью принципа суперпозиции

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_N \quad \xrightarrow{\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\, d\vec{r}} \quad \varphi_{рез} = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_N,$$

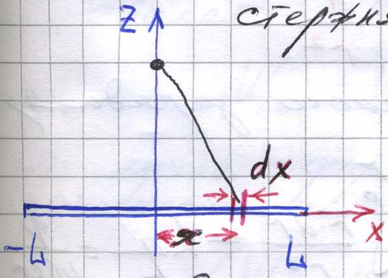
при этом начало отсчета $\vec{R}_0$ потенциала (выбирается) устанавливается для всех складывающихся полей одним и тем же

$$\varphi_{рез}(\vec{r}) = -\int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}} \vec{E}_1(\vec{r})\, d\vec{r} - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}} \vec{E}_2(\vec{r})\, d\vec{r} - \ldots - \int_{\vec{R}_0}^{\vec{r}} \vec{E}_N(\vec{r})\, d\vec{r}$$

$$= \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) + \ldots + \varphi_N(\vec{r}).$$

Приведём некоторые примеры использования принципа суперпозиции

Пример 1 Потенциал тонкого равномерно заряженного стержня на оси симметрии этого стержня.



$$\varphi(z) = \frac{Q}{L\, 4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{dx}{(x^2+z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l} \int_{-L/z}^{L/z} \frac{dy}{(1+y^2)^{1/2}}$$

Возникающий интеграл легко берется заменой

$$y = \frac{x}{z} = \operatorname{sh} u$$

$$dq = \frac{Q}{l}\, dx$$

$$d\varphi = k\frac{dq}{(x^2+z^2)^{1/2}}\Bigg|_{z\to\infty} \to 0 \quad \text{NB}$$

$$\varphi(z) = \frac{Q}{L\, 4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/z}^{L/z} \frac{\operatorname{ch} u\, du}{\operatorname{ch} u} = \frac{Q}{L\, 4\pi\varepsilon_0} \operatorname{Arcsh}\frac{x}{z}\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$\operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} = \frac{x}{z} \Rightarrow u = \ln\left(\frac{x}{z} + \sqrt{\frac{x^2}{z^2}+1}\right) = \operatorname{Arcsh}\frac{x}{z} \rightarrow$$

$$\rightarrow \varphi(z) = \frac{Q}{L\, 4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{L+\sqrt{L^2+z^2}}{-L+\sqrt{L^2+z^2}}\right)$$

Отметим, что у всех потенциалов $d\varphi$ выбрана одна и та же точка отсчета $R_0 = z\to\infty$, $R_0 = \infty$. По $\varphi(z)$ легко расчитывается $E(z)$:

$$E_z(z) = -\nabla_z\varphi = -\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{Q}{L\, 4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\frac{z}{\sqrt{L^2+z^2}}}{L+\sqrt{L^2+z^2}} - \frac{\frac{z}{\sqrt{L^2+z^2}}}{-L+\sqrt{L^2+z^2}}\right)$$

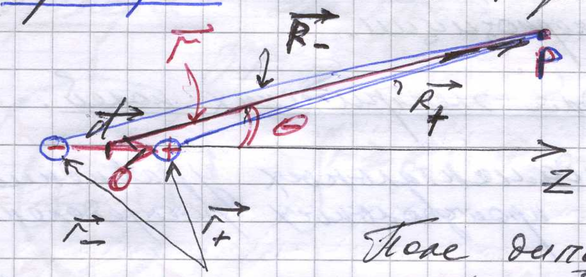
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z}\frac{1}{\sqrt{z^2+L^2}}$$

Отметим интересные предельные случаи:

$$E_z(z)\Big|_{z\to\infty} \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2} \qquad E_z(z)\Big|_{L\to\infty} \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L z} = \frac{\varkappa}{2\pi\varepsilon_0 z}$$

поле точечного заряда NB — NB — поле бесконеч. длинной нити.

Пример 2 Поле электрического диполя.



Определение Электрический диполь

$$\vec{p}_e \overset{def}{=} q\vec{r}_+ - q\vec{r}_- = q\vec{d}$$

Поле диполя в точке наблюдения P расположенной далеко от диполя $|\vec R_+|, |\vec R_-| \gg d$, согласно принципу суперпозиции имеет вид:

$$\varphi_P(\vec r) = k\frac{q}{R_+} - k\frac{q}{R_-} = k\frac{q}{\left|\vec r - \frac{\vec d}{2}\right|} - k\frac{q}{\left|\vec r + \frac{\vec d}{2}\right|},$$

Здесь радиус-вектор $\vec r$ проведен из середины диполя в (·) P. Как и $R_\pm$, $|\vec r| \gg d$, поэтому

$$\left|\vec r \pm \frac{\vec d}{2}\right| = \sqrt{r^2 \pm \vec r\cdot\vec d + \frac{d^2}{4}} \simeq \sqrt{r^2 \pm \vec r\cdot\vec d} \simeq r\left(1 \pm \frac{\vec r\cdot\vec d}{2r^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\vec r \pm \frac{\vec d}{2}\right|^{-1} \simeq \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{\vec r\vec d}{2r^2}\right),$$ в силу изв. ф-лы $(1\pm x)^{-1} \simeq 1 \mp x$ при $|x| \ll 1$

Используя указанные приближенные формулы, получаем:

$$\varphi_P(\vec r) \cong kq\frac{1}{r}\left(1 + \frac{\vec r\cdot\vec d}{2r^2} - 1 + \frac{\vec r\cdot\vec d}{2r^2}\right) = k\frac{\vec r\cdot q\vec d}{r^3} = k\frac{\vec r\cdot\vec p_e}{r^3}$$

$$\Rightarrow \varphi_{диполя}(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec r\cdot\vec p_e}{r^3}\Big|_{r\to\infty} \sim \frac{1}{r^2}.$$

Для сравнения, потенциал поля точечного заряда q убывает как r^{-1}:

$$\vec E = k\frac{q\vec r}{r^3} \Longrightarrow \varphi_{точечн.зар.}(\vec r) = -kq\int_\infty^r \frac{\vec r\cdot d\vec r}{r^3} = k\frac{q}{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi_{диполя}(r) = k\frac{\vec p_e\cdot\vec r}{r^3}, \quad \varphi_{точечн.зар}(r) = k\frac{q}{r}.$$

По потенциалу $\varphi_{дип}(r)$ легко рассчитывается и поле диполя $\vec E_{дип}(\vec r)$:

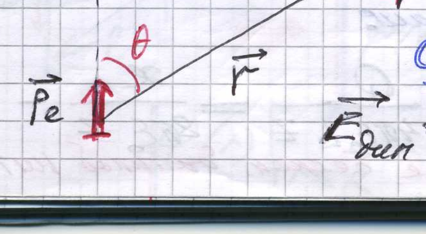
Задача Убедитесь в правильности проделанных вычислений

$$\vec E_{дип} = -\vec\nabla\varphi_{дип} = -k\frac{\vec\nabla(\vec p_e\cdot\vec r)}{r^3} + 3k\frac{(\vec p_e\cdot\vec r)\vec r}{r^5} = \vec E_{дип},$$

$$= k\frac{3(\vec p_e\cdot\vec r)\vec r - \vec p_e\cdot r^2}{r^5}\Big|_{r\to\infty} \sim \frac{1}{r^3}$$ NB

Эл. поле диполя при больших значениях r ведёт себя как $1/r^3$.

Задача



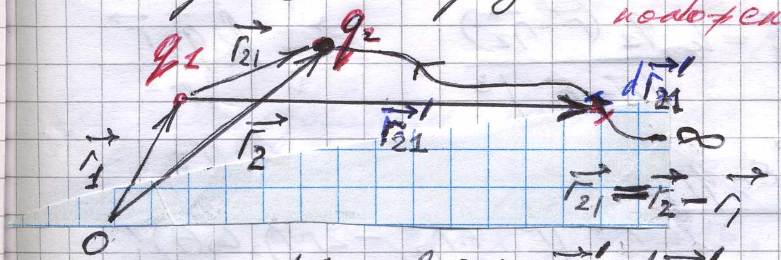
Вычислите проекции поля $\vec E_{дип}(\vec r)$ на направления $\vec e_\theta$ и $\vec e_r$.

Ответ: $\vec e_r\cdot\vec E = E_r = k\frac{2p_e\cos\theta}{r^3}$, $E_\theta = \vec e_\theta\cdot\vec E = -k\frac{p_e\sin\theta}{r^3}$.

$$\vec E_{дип} = E_r\vec e_r + E_\theta\vec e_\theta.$$

§2. Энергия электростатического поля системы точечных зарядов.

При образовании локализованной в пространстве системы точечных зарядов $q_1, \dots, q_N$ в такой системе запасается, как говорят, энергия электрического поля. Энергия, необходимая для образования системы зарядов в положениях $\vec r_1, \vec r_2, \dots, \vec r_N$ может быть вычислена следующим образом: пусть имеется один заряд q_1 в положении $\vec r_1$. Привнесём в систему ещё один заряд q_2 в положение $\vec r_2$. Этот заряд мы перемещаем из ∞ в (·) $\vec r_2$.



$\vec r_{21} = \vec r_2 - \vec r_1$

$dA = -k\dfrac{q_1 q_2\, \vec r_{21}' \cdot d\vec r_{21}'}{r_{21}'^3}$ — элементарная работа над зарядами при перемещении q_2 на $d\vec r_{21}'$

$$\Rightarrow W_{12} = \int_{r_{21}=\infty} dA = -kq_1q_2\int_{\infty}^{r_{21}} \frac{dr_{21}'}{r_{21}'^2} = k\frac{q_1q_2}{r_{21}'}\Big|_{\infty}^{r_{21}} = k\frac{q_1q_2}{r_{21}}.$$

При внесении в систему третьего заряда q_3 в положение $\vec r_3$ к уже запасённой в системе энергии W_{12}, очевидно, добавятся энергии W_{13} и W_{23}, так, что энергия, запасённая в системе в результате её „зарядки", станет равной:

$$W_{12} + W_{13} + W_{23} = k\frac{q_1q_2}{r_{21}} + k\frac{q_1q_3}{r_{31}} + k\frac{q_2q_3}{r_{23}}$$

В случае формирования системы N зарядов, в ней запасается энергия

$$(W_{12} + W_{13} + \dots + W_{1N}) + (W_{23} + W_{24} + \dots + W_{2N}) + \dots$$
$$\dots + W_{N-1\,N} = k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = k\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{|\vec r_i - \vec r_j|}$$

С другой стороны к вычислению запасаемой в системе энергии можно подойти по-другому, используя выражение для плотности энергии электрического поля

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \quad \text{где } \vec E = \vec E_{рез} = \vec E_1 + \dots + \vec E_N$$

$$W_{total} = \int_V w_e\, dV = \int_V \frac{\varepsilon_0 \vec E^2}{2}\, dV =$$

V — по всему пр-ву; V — всё пр-во (NB)

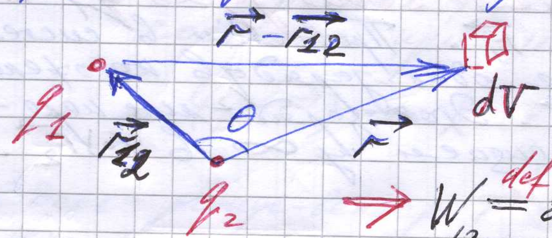
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{N}\int_V \frac{\varepsilon_0 E_k^2}{2}\, dV}_{= W_1 + \dots + W_N} + \int_V \frac{\varepsilon_0 \vec E_1(\vec E_2 + \dots + \vec E_N)}{2}\, dV + \int \varepsilon_0 \vec E_2 (\vec E_1 + \vec E_3 + \dots + \vec E_N)\, dV \dots$$
$$+ \int_V \frac{\varepsilon_0 E_{N-1}(E_N + \dots + E_1)}{2}\, dV.$$

$= W_1 + \dots + W_N$ — сумма собств. энергий зарядов

Вычислим для примера интеграл W_{12}

$$W_{12} \stackrel{def}{=} 2\int\limits_V \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_1\cdot\vec{E}_2}{2}\, dV$$

При этом будем использовать следующую удобную сферическую систему координат

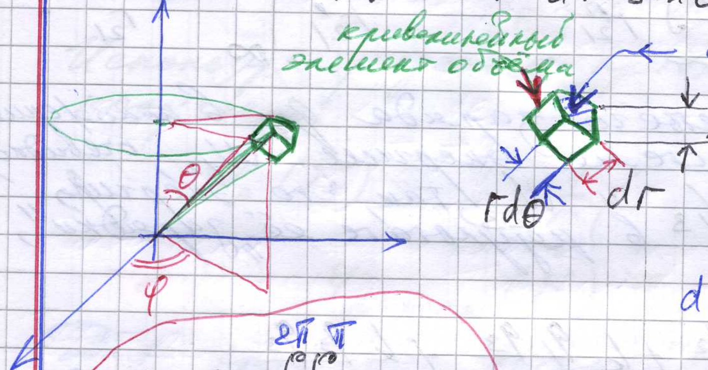


$$\vec{E}_1 = k\,\frac{q_1(\vec r-\vec r_{12})}{|\vec r-\vec r_{12}|^3}, \quad \vec{E}_2 = k\,\frac{q_2 \vec r}{r^3}$$

$$\Rightarrow W_{12} \stackrel{def}{=} 2\int \varepsilon_0 q_1 q_2 \frac{\vec r\cdot(\vec r-\vec r_{12})\; dV\cdot k^2}{r^3\,(r^2+r_{12}^2-2rr_{12}\cos\theta)^{3/2}}$$

Элемент объема dV в сферической системе координат имеет вид:

$$dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = r^2 dr\, d\Omega$$



$$dS_\perp = r\sin\theta\, d\varphi \times r\, d\theta$$

$$\Rightarrow dV = dr\times r\,d\theta \times r\sin\theta\, d\varphi = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Omega_{полн} = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{\theta=0}^{\pi} d\Omega = 4\pi$$

$$dS_\perp = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$d\Omega \stackrel{def}{=} \frac{dS_\perp}{r^2} = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$ – элемент телесного угла

$$\Rightarrow W_{12} = 2k^2\varepsilon_0\frac{q_1q_2}{2}\iiint dr\,\frac{(r^2-rr_{12}\cos\theta)\,r^2\,d\Omega}{r^3(r^2+r_{12}^2-2rr_{12}\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= k^2\varepsilon_0 q_1 q_2 \iint d\Omega \int\limits_{r=0}^{\infty}\frac{d(r^2-2rr_{12}\cos\theta)}{2\,(r^2+r_{12}^2-2rr_{12}\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= k^2\varepsilon_0 q_1 q_2 \iint d\Omega\, \left.\frac{(-1)}{(r^2+r_{12}^2-2rr_{12}\cos\theta)^{1/2}}\right|_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= k^2\varepsilon_0 q_1 q_2\,\frac{1}{r_{12}}\cdot 4\pi = k\,\frac{q_1q_2}{r_{12}}$$

$$4\pi = \iint d\Omega = \int\limits_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi$$

Поэтому для энергии, запасаемой при зарядке системы, т.е. формировании заряженной системы с $q_1, q_2, \ldots, q_N$ получается следующее выражение:

$$W_{вз} = W_{total} - (W_1 + \ldots + W_N) \overset{def}{=} \int\limits_V \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_{рез}^{\,2}}{2} dV - \sum_{k=1}^{N} \int \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_k^{\,2}}{2} dV =$$

$$= W_{12} + W_{13} + \ldots + W_{1N} + W_{23} + W_{24} + \ldots + W_{2N} + \ldots$$

$$\ldots + W_{N-1\,N} = k \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{2} k \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}, \qquad r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

При использовании выражения для плотности энергии $\frac{\varepsilon_0 \vec{E}_{рез}^{\,2}}{2}$ — результирующего поля, плотностей $w_k = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_k^{\,2}}{2}$ энергий полей отдельных зарядов, считается что энергия поля непрерывно заполняет всё пространство.

Для энергии взаимодействия зарядов $W_{вз}$ опять получилось уже установленное выше выражение:

$$W = \frac{1}{2} k \sum_{i \neq j} q_i q_j \frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j \neq i} \frac{k q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i$$

Здесь

$$\varphi_i \overset{def}{=} k \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$ — потенциал результир. поля в месте нахождения $\vec{r}_i$ i-го заряда.

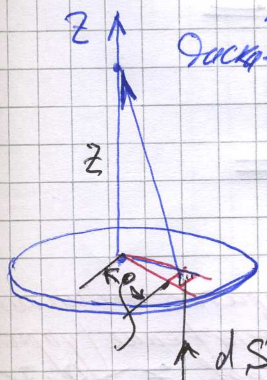
При образовании локализованной в пространстве системы зарядов $q_1, \ldots, q_N$ в точках с координатами $\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$ в системе запасается, как говорят, энергия W, определяемая по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i \overset{def}{=} \int\limits_V \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_{рез}^{\,2}}{2} dV - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_V \frac{\varepsilon_0 \vec{E}_k^{\,2}}{2} dV$$

и равная разности полной энергии поля во всём пр-ве и суммы энергий отдельных зарядов (энергии собственных полей этих зарядов) $= W_{tot} - (W_1 + \ldots + W_N)$

<u>Задача</u> На использование принципа суперпозиции.

Вычислите потенциал $\varphi(z)$ на оси симметрии диска-кольца, равномерно заряженного с $\sigma \, \frac{Кл}{м^2}$



<u>Решение</u>:

$$\varphi(z) = k \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \rho \, d\rho \, d\varphi}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} =$$

$dS = \rho \, d\rho \, d\varphi$

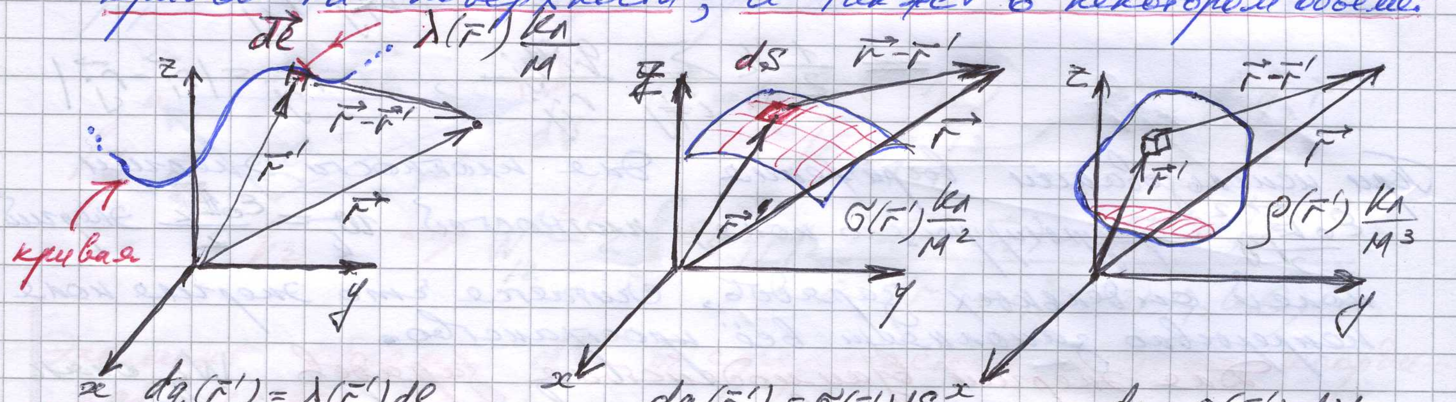
$$= k\sigma 2\pi \int_0^R \frac{\frac{1}{2} d\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} =$$

Рассчитайте также и $E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$.

$$= k\sigma \frac{2\pi}{2} 2 \sqrt{\rho^2 + z^2} \Big|_0^R = 2k\sigma\pi \left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

§3. Потенциал ограниченного в пространстве распределения зарядов, сосредоточенного на линии, поверхности и в объеме.

Используя принцип суперпозиции для потенциалов, легко подсчитать потенциал электростатического поля распределения зарядов, локализованного вдоль заданных кривой и поверхности, а также в некотором объеме:



$dq(\vec{r}\,')=\lambda(\vec{r}\,')d\ell$ — Распред. зарядов вдоль линии

$dq(\vec{r}\,')=\sigma(\vec{r}\,')dS$ — Распред. зарядов на пов-ти

$dq=\rho(\vec{r}\,')dV$ — Распр. зарядов в объеме

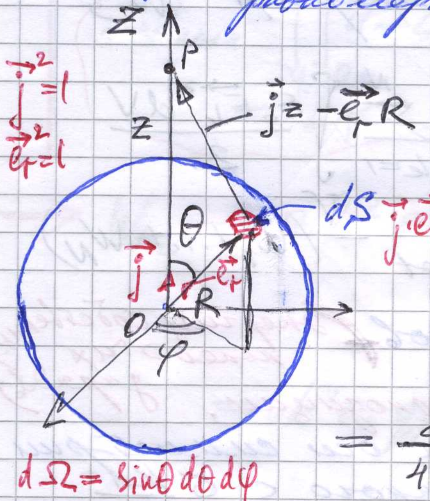
Используя принцип суперпозиции для потенциалов, получаем следующие выражения:

$$\varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\mathcal{L}}\frac{\lambda(\vec{r}\,')d\ell}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\quad \varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{S}\frac{\sigma(\vec{r}\,')dS}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|},\quad \varphi(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{V}\frac{\rho(\vec{r}\,')dV}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$\mathcal{L}$ — кривая, S — поверхность, V — объём.

Фактически выписанные формулы задают частное решение уравнения Пуассона для локализованных распр. зарядов

Пример. Вычислить потенциал электростатического поля равномерно заряженной с $\sigma\,\frac{Кл}{м^2}$ тонкой сферич. оболочки радиуса R



Имеем, используя принцип суперпозиции.

$$\varphi_P(z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\sigma\cdot R^2d\Omega}{|z\vec{j}-\vec{e}_rR|}=$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint\frac{\sigma R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}}=$$

$$=\frac{2\pi\sigma R^2}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1}\frac{d\cos\theta}{(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}}=$$

$$=\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0}\cdot2\cdot\frac{1}{(-2zR)}(z^2+R^2-2zR\cos\theta)^{1/2}\Big|_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1}=$$

$$=\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0zR}\left(\left((z+R)^2\right)^{1/2}-\left((z-R)^2\right)^{1/2}\right)$$

Далее аккуратно вычислим последнее выражение (упростим) для случаев $z>R$ и $z<R$

$z>R$: $\quad\varphi_P(z)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0z}(z+R-(z-R))=\frac{2\sigma R^2}{2\varepsilon_0z}=\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0z}$

$z<R$: $\quad\varphi_P(z)=\frac{\sigma R}{2\varepsilon_0z}(z+R-(R-z))=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0}$