

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Д. Заикин

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Утверждено
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2025

Рецензенты:

Г.В. Харламов, канд. физ.-мат. наук, доцент

М.П. Сарина, канд. техн. наук, доцент

Заикин А.Д.

Колебания и волны. Учебное пособие./ А.Д. Заикин. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2025. – 95 с.

Учебное пособие по разделу «Колебания и волны» курса общей физики для студентов I и II курсов РЭФ, ФТФ, ФЭН всех специальностей и всех форм обучения. Представлен теоретический анализ колебательных и волновых процессов в рамках механических моделей. Разобраны типичные задачи, приведены задачи для самостоятельного решения. Учебное пособие предназначено для использования преподавателями и студентами при изучении соответствующих разделов курса физики.

Работа подготовлена на кафедре
прикладной и теоретической физики

© Новосибирский государственный
технический университет, 2025.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Разнообразие колебательных процессов	4
2. Гармонический осциллятор	5
3. Пружинный маятник	7
4. Физический маятник.....	10
5. Математический маятник	12
6. Квазиупругая сила	15
7. Сложение колебаний одного направления.....	18
8. Биения	21
9. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	23
10. Фигуры Лиссажу	26
11. Затухающие колебания	28
12. Вынужденные колебания. Резонанс.	33
13. Спектральное представление колебательных процессов	38
14. Связанные маятники.....	42
15. Нелинейный осциллятор.....	47
16. Фазовые траектории	50
17. Волны на струне	55
18. Стоячие волны	59
19. Волны в упругих средах.....	63
20. Звуковые волны	67
21. Эффект Доплера.....	70
22. Сонар.....	73
23. Примеры решения задач	75
24. Варианты задач для самостоятельного решения.....	89

1. Разнообразие колебательных процессов

Многие физические процессы характеризуются повторяемостью во времени. Если состояние системы, изменяясь около точки равновесия, повторяется во времени, то такая система совершает колебания.

Это относится и к природным явлениям, и к рукотворным процессам. Именно такие движения осуществляет маятник часового механизма, долото отбойного молотка и крыло летящего комара. В этом же ряду находятся приливно-отливные течения на поверхности моря и колебания водной глади от брошенного камня. Колеблется напряжение в электрической цепи и температура воздушных масс атмосферы. Телевидение, радиосвязь – это колебания электромагнитных полей. Человеческая речь и музыка, порождаемая различными музыкальными инструментами – это тоже колебания.

Несмотря на очевидные различия физической природы, лежащей в основе этих явлений, они обладают общими чертами, что позволяет подходить к их изучению с единых позиций и прежде всего, конечно, использовать единое математическое описание.

Более того, изучение колебаний не является прерогативой физики. Так, в химии известны колебательные химические реакции, в биологии – циклические колебания в популяции численности хищников и жертв. Колебательные движения, медленные поднятия и опускания земной коры изучает геология.

Колебания представляют интерес и в общественных науках при изучении демографических, социальных и экономических закономерностей. Даже не специалисту известны такие понятия как демографические волны, циклические колебания экономики и курсов валют.

В биржевой торговле ценными бумагами широко применяется волновая теория Эллиотта, интерпретирующая происходящее на финансовом рынке через систему волновых моделей.

Понимая и принимая такое разнообразие, тем не менее, далее сосредоточим внимание на колебаниях, совершаемых механическими системами.

2. Гармонический осциллятор

Гармоническими называются колебания, совершающиеся по закону синуса или косинуса. Систему, совершающую одномерные гармонические колебания, называют линейным гармоническим осциллятором. В механике под гармоническим осциллятором чаще всего понимают материальную точку, колеблющуюся около положения равновесия. Далее покажем, что многие другие физические процессы описываются этой моделью.

Смещение гармонического осциллятора от положения равновесия запишем в виде

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A – амплитуда колебаний, а ω_0 – циклическая частота. Аргумент гармонической функции называется фазой, фаза в начальный момент времени равняется φ_0 и называется начальной фазой.

Наряду с циклической частотой ω_0 , которая определяет число колебаний за 2π секунды, определим частоту ν_0 – число колебаний за одну секунду. Тогда

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0,$$

а период колебаний (время одного колебания)

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

Единица измерения частоты в СИ – герц (Гц).

Определим мгновенную скорость (первую производную по времени) и мгновенное ускорение (вторую производную по времени) от смещения

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Преобразуем последнее выражение $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$, тогда

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1)$$

Полученное уравнение, содержащее вторую производную и не содержащее свободного члена, классифицируется как однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его физический смысл заключается в том, что оно, являясь уравнением движения, определяет как изменяется смещение материальной точки со временем. Под x следует понимать функцию $x = x(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения. Функция называется решением дифференциального уравнения, если подстановка ее в уравнение обращает его в тождество. Решением данного уравнения является гармоническая функция. Это следует из того, каким способом было построено уравнение. Поэтому данное уравнение называется дифференциальным уравнением свободных гармонических колебаний.

Формула Эйлера, связывающая тригонометрические и экспоненциальные функции,

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha ,$$

позволяет представлять гармоническое колебание в комплексной форме

$$s(t) = Ae^{i(\omega t + \varphi_0)} .$$

Комплексная форма записи гармонических колебаний во многих случаях оказывается более удобной, чем тригонометрическая. Математические преобразования экспоненциальной функции проще, чем преобразования тригонометрических функций.

3. Пружинный маятник

Закрепим один конец пружины, а к другому концу прикрепим тело (шар) массой m , Рис. 1. В дальнейшем шар будем считать материальной точкой. Пусть ось координат x направлена вдоль пружины, а начало координат совпадает с положением материальной точки в случае недеформированной пружины.

Если сместить материальную точку вдоль оси x и отпустить, то со стороны пружины на нее будет действовать упругая сила. Эта сила стремится вернуть материальную точку в положение равновесие. Закон Гука гласит, что при небольших растяжениях пружины сила пропорциональна растяжению и направлена в сторону, противоположную смещению. Тогда

$$F = -kx,$$

где постоянная k – жесткость пружины.

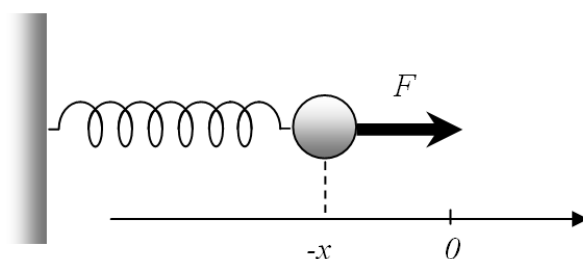


Рис. 1

Однако, по второму закону Ньютона ускорение, с которым движется материальная точка, пропорционально действующей на нее силе,

$$F = ma.$$

Ускорение a есть вторая производная от смещения по времени, $a = \ddot{x}$. Объединяя второй закон Ньютона и закон Гука, запишем, что $m\ddot{x} = -kx$. Преобразуя и делая замену $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, сведем полученное выражение к уравнению

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Данное уравнение есть уравнение свободных гармонических колебаний (1). Его решение – гармоническая функция. Поэтому смещение изменяется со временем по гармоническому закону

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (2)$$

Также как и мгновенная скорость и мгновенное ускорение

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Такой гармонический осциллятор называется пружинным маятником.

Рассмотрим решение (2). По сути, оно представляет собой множество решений. Три независимых параметра индивидуализируют колебания осциллятора, это: множитель A – амплитуда колебаний, φ_0 – начальная фаза, ω_0 – собственная циклическая частота. Циклическая частота определяется свойствами маятника, а амплитуда и начальная фаза зависят от того, каким образом колебания возбуждались. Для случая, приведенного на Рис. 1, в начальный момент времени $x(0) = -A$, $V(0) = 0$. Эти условия называются начальными.

Начальные условия позволяют выбрать из множества решений одно единственное, согласно которому будут совершаться колебания.

Возможен иной способ возбуждения колебаний. Пусть маятник покоится. Кратковременное приложение силы (удар) вдоль оси x в начальный момент времени также заставит маятник колебаться. Тогда начальные условия записываются так: $x(0) = 0$, $V(0) = V_0$.

Произвольное сочетание этих двух способов воздействия на маятник также заставят его колебаться. В любом случае причиной колебаний будет та энергия которую передали осциллятору.

Колебания, совершающиеся под действием внутренних сил за счет первоначально полученной энергии, называются собственными (свободными). Поэтому циклическая частота ω_0 называется собственной частотой маятника.

Определим кинетическую и потенциальную энергию маятника

$$E_k = \frac{mV^2}{2}, \quad E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

Подставив смещение и скорость, проделав тригонометрические преобразования, получим выражения для энергии в симметричной форме

$$E_k = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}(1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)), \quad E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}(1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0)).$$

Кинетическая и потенциальная энергии совершают гармонические колебания около среднего значения с удвоенной частотой, Рис. 2.

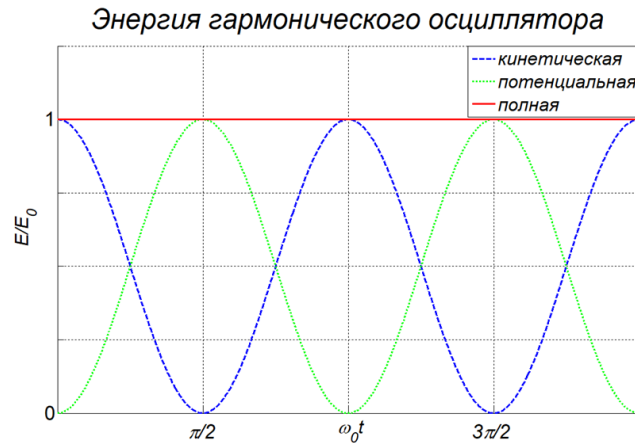


Рис. 2

Эти колебания осуществляются в противофазе, когда кинетическая энергия максимальна, потенциальная равна нулю, и наоборот. Полная энергия маятника при этом не меняется

$$E_0 = E_k + E_p = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Результат вполне ожидаем. Действительно, анализ движения маятника основывался на предположении об отсутствии потерь энергии (действующие силы консервативны). Поэтому в соответствии с законом сохранения энергии полная механическая энергия остается постоянной.

Колебания многих систем описываются уравнением свободных гармонических колебаний (1), а значит, для них остаются справедливыми отмеченные выше закономерности.

4. Физический маятник

Физический маятник – твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.

Физический маятник изображен на Рис. 3. Горизонтальная ось, перпендикулярная плоскости рисунка, обозначена как O , центр масс тела – M . Отрезок, соединяющий ось и центр масс, – l . В состоянии равновесия отрезок OM расположен вертикально, то есть центр масс располагается под точкой подвеса.

Отклоним маятник от положения равновесия, подняв центр масс на высоту h . Потенциальная энергия при этом возрастет до значения $U = mgh$, где m – масса маятника.

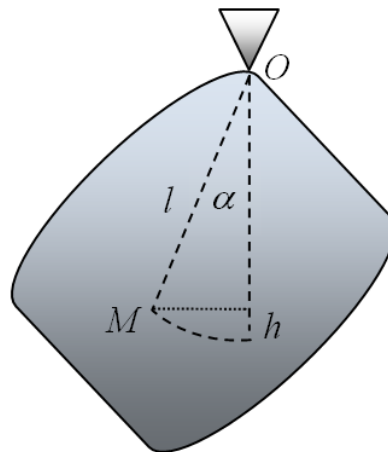


Рис. 3

Пусть α – угол, на который отклонили маятник, тогда $h = l(1 - \cos \alpha)$. Для малых углов, $\alpha \ll 1$, справедливо равенство $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Тогда, для потенциальной энергии получаем выражение $E_p = mgl \frac{\alpha^2}{2}$.

Если маятник отпустить, то он начнет вращательное движение к положению равновесия. Угловая скорость такого движения $\dot{\alpha}$. Пусть J – момент инерции маятника. Запишем кинетическую энергию твердого тела, совершающего вращательное движение,

$$E_k = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2}.$$

Тогда полная энергия $E = E_k + E_p = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2}$.

Будем считать, что диссипативные силы отсутствуют, тогда выполняется закон сохранения полной механической энергии. Если энергия не меняется, то ее производная по времени равна нулю. Из условия $\dot{E} = 0$ следует, что

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{mgl}{J}.$$

Таким образом, физический маятник, выведенный из положения равновесия, совершает гармонические колебания относительно горизонтальной оси.

5. Математический маятник

Тело массой m подвешено на нити длиной l , Рис. 4. Если размером тела можно пренебречь по сравнению с длиной нити l , то тело можно считать материальной точкой. Предположим, что нить невесома и нерастяжима. Такая идеализированная конструкция называется математическим маятником.

Отклоним маятник от положения равновесия на малый угол. Положение маятника полностью определяется углом α между нитью и вертикалью. Если маятник отпустить, то он начнет двигаться, причем траектория движения будет окружностью.

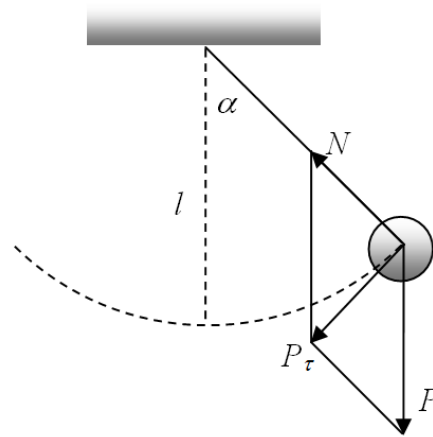


Рис. 4

В соответствии с первым законом Ньютона причиной начала движения маятника является сила, действующая на него. Рассмотрим действующие силы подробнее.

На материальную точку действуют две силы. Сила тяжести $P = mg$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити N , направленная по нити. Их векторная сумма определяет тангенциальную составляющую силы тяжести

$$\vec{P}_\tau = \vec{N} + \vec{P},$$

которая и приводит материальную точку в движение. Эту силу можно назвать возвращающей, она стремится вернуть маятник в положение равновесия. Заметим, что нормальная составляющая силы тяжести (на рисунке не приведена) уравновешивается силой натяжения нити и радиальное движение отсутствует.

Угол между силой натяжения нити и тангенциальной составляющей силы тяжести прямой, поэтому $P_\tau = -mg \sin \alpha$. Знак минус берется потому, что угол α отсчитывается от вертикали против часовой стрелки, а сила P_τ направлена в противоположном направлении.

Для малых углов, выраженных в радианах, $\alpha \ll 1$, справедливо равенство $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда возвращающая сила

$$P_\tau \approx -mg\alpha. \quad (3)$$

Если расположить начало декартовой системы координат в точке равновесия тела, то, как легко заметить, $x = l \sin \alpha \approx l\alpha$.

Учитывая, что источником движения маятника выступает возвращающая сила, запишем второй закон Ньютона для материальной точки

$$P_\tau = ma_\tau.$$

Подставляя в это уравнение возвращающую силу (3) и тангенциальное ускорение в виде $a_\tau = \dot{V} = l\ddot{\alpha}$, получаем, что уравнение движения математического маятника является дифференциальным уравнением гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

при этом циклическая частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Период колебаний математического маятника не зависит от массы материальной точки и амплитуды колебаний, а определяется лишь длиной нити и ускорением свободного падения

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Этот же результат можно получить, если рассматривать математический маятник как частный случай физического. Действительно, момент инерции материальной точки $J = ml^2$, тогда

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{J} = \frac{mgl}{ml^2} = \frac{g}{l}.$$

Длина нити и период маятника могут быть измерены с высокой точностью, это позволяет использовать колебания маятника для измерения ускорения свободного падения.

Колебания математического маятника оказались гармоническими лишь при условии малости угла отклонения. В этом случае возвращающая сила P_{τ} становится схожей с силой Гука. Она также линейна относительно перемещения и направлена в противоположную сторону. Такой вид возвращающей силы позволил свести уравнение движения к дифференциальному уравнению гармонических колебаний.

Если условие малости углов отклонения математического маятника не выполняется, то маятник совершает колебания отличные от гармонических. В этом случае период колебаний зависит от их амплитуды.

6. Квазиупругая сила

В независимости от физической природы силу называют квазиупругой, если она линейна относительно смещения и направлена противоположно ему. Возвращающую силу P_r при малых отклонениях можно считать квазиупругой.

Справедливо следующее утверждение, если в системе, подвергшейся кратковременному внешнему воздействию и вышедшей из состояния равновесия, возникает квазиупругая возвращающая сила, то система будет совершать гармонические колебания.

В качестве иллюстрации приведем фантастический пример такой системы. Для этого попробуем найти ответ на следующий вопрос. Что будет с телом, которое уронили в скважину, пробуренную сквозь центр Земли с одной стороны на другую?

В дальнейшем будем придерживаться следующих допущений. Тело – материальная точка массой m , Земля – однородный шар, радиус которого $R=6378$ км. Ускорение свободного падения на поверхности Земли $g=9,81$ м/с². Скважина пробурена с Северного полюса на Южный (в этом случае можно не учитывать вращение Земли). Сила сопротивления воздуха не учитывается.

Поместим начало координат в центре Земли, а ось ординат направим по скважине на Северный полюс, Рис. 5.

Движение тела определяет закон всемирного тяготения Ньютона, гласящий, что сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками с массами m_1 и m_2 пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними R_{12}

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R_{12}^2}.$$

На материальную точку массой m , находящуюся на поверхности Земли, действует сила тяжести mg . Сила тяжести является следствием гравитационного притяжения массой Земли M . Гравитационное поле материальной точки и шара той же массы совпадают вне шара.

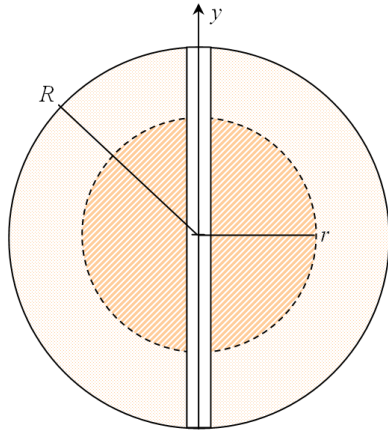


Рис. 6

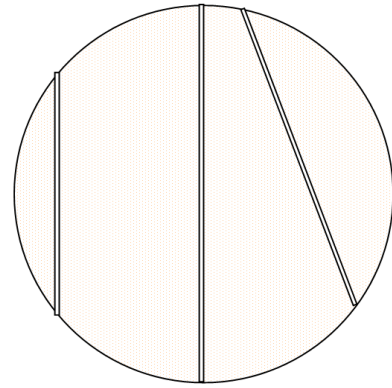


Рис. 5

Тогда на поверхности Земли $mg = G \frac{mM}{R^2}$. Отсюда можно найти массу Земли $M = \frac{gR^2}{G}$ и ее плотность $\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR}$.

На материальную точку, опустившуюся в скважину на глубину $y = r$, оказывает воздействие не вся масса Земли. Воздействие масс, распределенных в шаровом слое от R до r , взаимно уравновешено. Оставшаяся масса M_r , сосредоточенная в шаре радиуса r , (на Рис. 5 он заштрихован) продолжает притягивать материальную точку.

Поскольку масса этого шара

$$M_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = \frac{g}{GR} r^3,$$

то гравитационная сила, направленная к центру Земли,

$$F = G \frac{mM_r}{r^2} = mr \frac{g}{R}$$

Перейдя к координате y , запишем, учитывая направление, силу, действующую на падающую в скважине материальную точку

$$F = -m\omega_0^2 y, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Построенная сила оказалась квазиупругой. Следовательно, материальная точка будет совершать гармонические колебания, между устьями скважины

расположенными на Северном и Южном полюсах. Период этих колебаний составляет 84,4 минуты, а скорость материальной точки в центре Земли $V = R\omega_0 \approx 7,9 \text{ км/с}$, что совпадает с первой космической скоростью.

Если скважину или туннель проложить не через центр Земли, а по хорде, Рис. 6, то характер движения тел в нем останется прежним.

Наблюдатель, находящийся у входа, будет видеть наклонный тоннель, уходящий под землю. Колесное транспортное средство начнет двигаться по такому тоннелю под уклон, постепенно набирая скорость. Пройдя середину тоннеля, транспортное средство начнет замедляться, пока не остановится, достигнув противоположного входа в тоннель.

Путешествие во встречном направлении будет выглядеть совершенно аналогично: наклонный тоннель, первоначально ускоренное, а затем замедленное движение, и остановка на поверхности.

Двигатель и горючее при таком способе передвижения оказываются излишними. И время такого путешествия, вне зависимости по какой хорде проложен тоннель, будет всегда одинаково – 42,2 мин.

Возможно, что когда-нибудь прокладка таких хордовых тоннелей станет технологически возможной и экономически оправданной.

7. Сложение колебаний одного направления

Пусть материальная точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях. Ограничимся случаем, когда эти колебания совершаются вдоль одного направления и с одинаковой частотой. Одна из возможных реализаций такого процесса приведена на Рис. 7. Пружинный маятник 2 колеблется относительно маятника 1, также в свою очередь совершающего гармонические колебания.

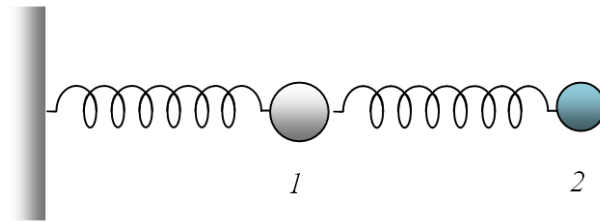


Рис. 7

Запишем эти колебания в виде

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Результирующее движение представим как $x = x_1 + x_2$. Используя тригонометрические соотношения, можно доказать, что результирующее колебание так же гармоническое и осуществляется на той же частоте

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Докажем это утверждение, а также найдем амплитуду и начальную фазу результирующего колебания, используя метод векторных диаграмм.

Отложим из начала декартовой системы координат вектор, длина которого равняется амплитуде колебаний, Рис. 8. Пусть угол этого вектора с осью абсцисс равен фазе гармонического колебания $\omega_0 t + \varphi_0$. С течением времени фаза возрастает, и вектор равномерно вращается вокруг начала координат против часовой стрелки. Проекция этого вектора на ось ординат, как впрочем и на ось абсцисс, совершает гармонические колебания. Действительно,

$$A_y = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

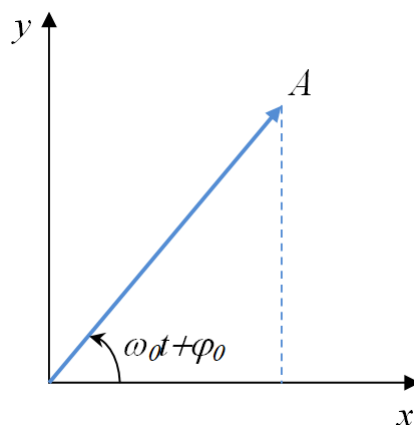


Рис. 8

Векторные диаграммы дают наглядное представление гармонических колебаний и связывают колебательные и вращательные движения. Действительно, равномерное движение по окружности, по сути, есть два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Колебанию x_1 в начальный момент времени на векторной диаграмме соответствует вектор A_1 , отложенный под углом φ_1 , а колебанию x_2 – вектор A_2 , отложенный под углом φ_2 , Рис. 9. Вращение векторов A_1 и A_2 с одинаковой частотой не меняет их взаимного расположения.

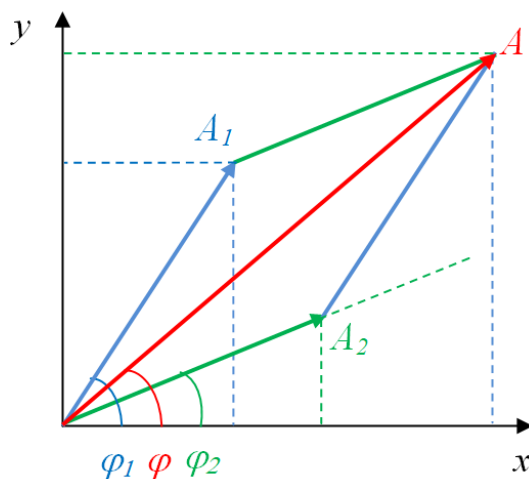


Рис. 9

Складывая вектора A_1 и A_2 по правилу параллелограмма, получаем вектор A , вращающийся совместно с ними. Следовательно, результирующее колебание осуществляется на той же частоте.

Начальную фазу результирующего колебания найдем, определив катеты треугольника,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Амплитуду его можно найти по теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - \varphi_1 + \varphi_2),$$

Или же

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Амплитуда зависит от начальных фаз складываемых колебаний. Рассмотрим несколько простых случаев. Пусть $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2m\pi$, тогда $A = A_1 + A_2$. Совершаясь в одинаковой фазе (синфазно), колебания взаимно усиливаются, как это показано на Рис. 10.

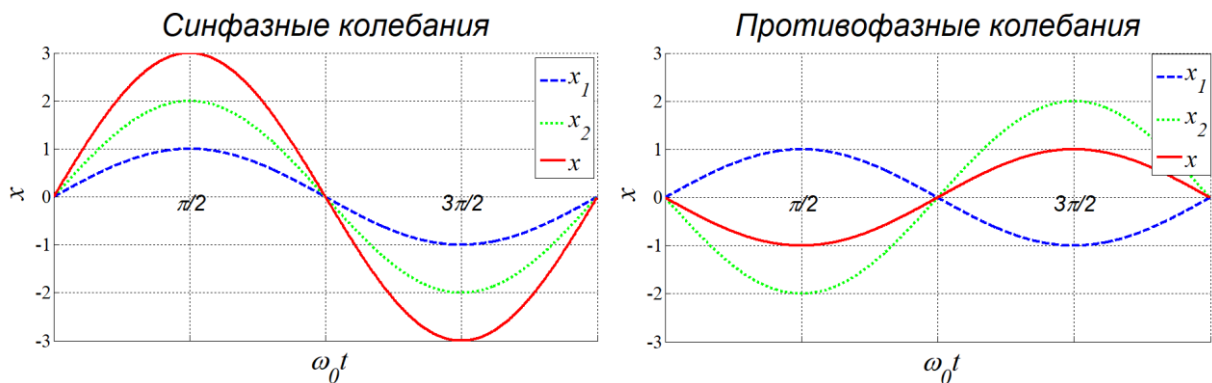


Рис. 10

Если же колебания совершаются в противофазе, $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm(2m + 1)\pi$, то они ослабляются, $A = A_1 - A_2$, вплоть до полного гашения при, $A_1 = A_2$.

8. Биения

Пусть материальная точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях. Рассмотрим случай, когда эти колебания совершаются вдоль одного направления с близкими частотами.

Полагая для простоты амплитуды одинаковыми, запишем уравнения колебаний

$$x_1 = A \sin \omega t, \quad x_2 = A \sin(\omega + \Delta\omega)t.$$

Условие близости частот заключается в том, что $\omega \gg \Delta\omega$. Результирующее колебание

$$x = x_1 + x_2,$$

вообще говоря, уже не являющееся гармоническим, путем тригонометрических преобразований сведем к виду

$$x(t) = 2A \sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t \cdot \cos \frac{\Delta\omega}{2}t.$$

Отбросив малое слагаемое $\Delta\omega$ в аргументе функции синус, окончательно получаем, что результирующее колебание есть гармоническое колебание с периодически изменяющейся амплитудой

$$x = B(t) \sin \omega t, \quad B(t) = 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t.$$

Явление периодического изменения амплитуды результирующего колебания при сложении двух колебаний одного направления с близкими частотами называется биениями.

На Рис. 11 и Рис. 12 показаны первое исходное и результирующее колебания. Второе исходное колебание графически неотличимо от первого.

Период биений определяется как $T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$. Период основного колебания $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Очевидно, что $T_b \gg T$, то есть изменение амплитуды результирующего колебания происходит медленно относительно основного сигнала.

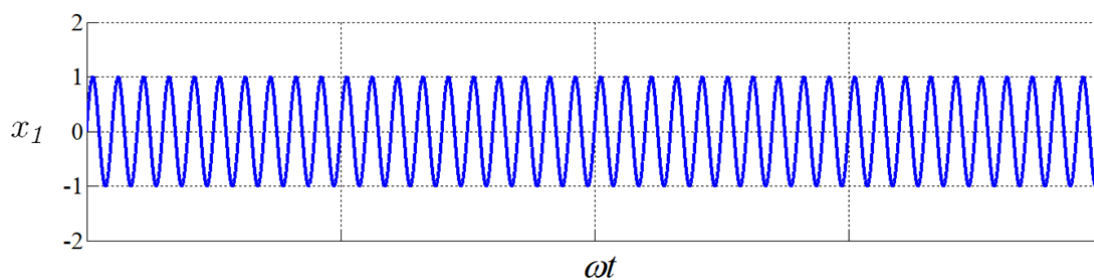


Рис. 11

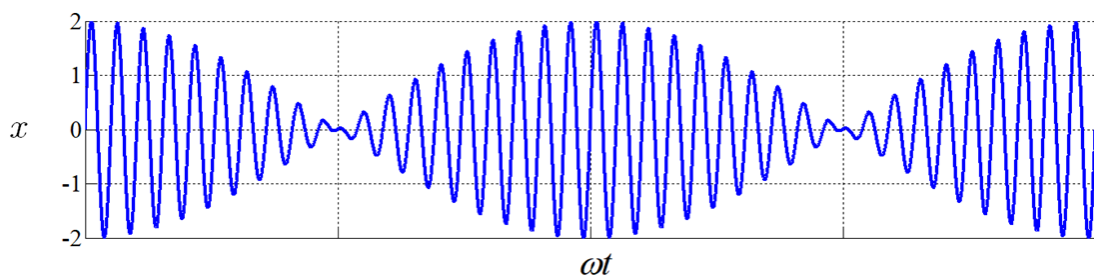


Рис. 12

Изменение по определенному закону параметров колебаний называется модуляцией. Биение – простейший вид модуляции называемой амплитудной.

Биения при наложении двух колебаний с частотами 350 Гц и 355 Гц можно прослушать по [ССЫЛКЕ](#).

9. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть колебания совершаются одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Этого можно добиться, закрепив материальную точку на двух пружинах, как показано на Рис. 13.

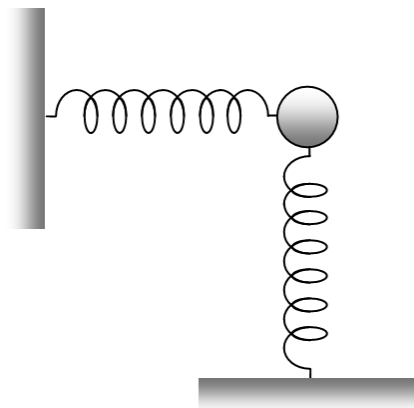


Рис. 13

Рассмотрим случай, когда частоты этих колебаний совпадают. Запишем уравнения колебаний

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad y = B \sin(\omega t + \beta).$$

Отсчет времени начнем тогда, когда фаза первого колебания равна нулю. Тогда $\alpha = 0$, а β – разность фаз этих колебаний.

Построим траекторию результирующего колебания, исключив время из уравнений колебаний. Поскольку $\sin \omega t = x/A$, то $\cos \omega t$.

Запишем, используя тригонометрические соотношения,

$$y/B = \sin \omega t \cdot \cos \beta + \cos \omega t \cdot \sin \beta.$$

Подставим полученные выражения для $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, тогда

$$y/B = x/A \cdot \cos \beta + \sqrt{1 - (x/A)^2} \cdot \sin \beta.$$

Возведя в квадрат и приведя подобные, получаем уравнение кривой второго порядка

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 2 \frac{xy}{AB} \cos \beta + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \sin^2 \beta.$$

В общем случае траектория результирующего колебания представляет собой эллипс, располагающийся в прямоугольнике со сторонами A и B , как показано на Рис. 14. Такие колебания называют эллиптически поляризованными

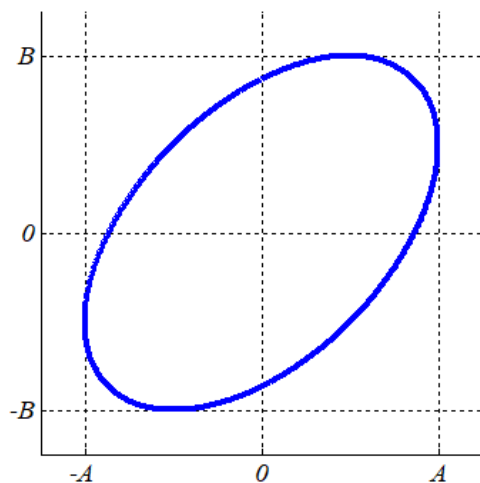


Рис. 14

Если разность фаз кратна π , то есть выполняется условие $\beta = m\pi$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то уравнение сводится к

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 \pm 2\frac{xy}{AB} + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 0.$$

Полученное выражение есть не что иное как уравнение прямой $y = \pm \frac{B}{A}x$, проходящей через начало координат. Знак в уравнении определяется разностью фаз. Траектории таких колебаний приведены на Рис. 15. Не трудно видеть, что их амплитуда равна $C = \sqrt{A^2 + B^2}$.

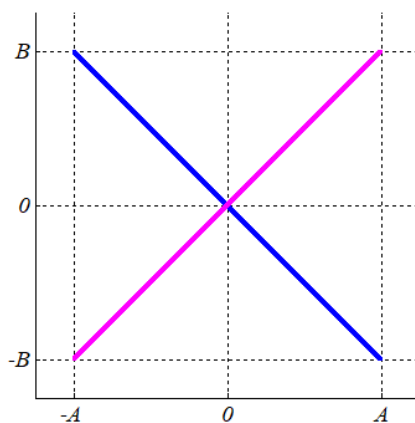


Рис. 15

Такие колебания называются линейно поляризованными.

Если $\beta = (m + 1/2)\pi$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то полуоси эллипса совпадают с осями декартовой системы координат, в соответствии с уравнением и Рис. 16

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1.$$

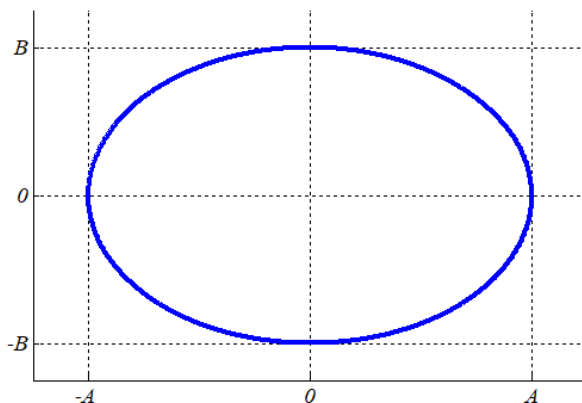


Рис. 16

Если амплитуды складываемых колебаний совпадают, $A=B$, то траектория результирующего колебания – окружность. Такие колебания называют циркулярно-поляризованными.

10. Фигуры Лиссажу

В общем случае при сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний различных частот траектория движения – сложная незамкнутая кривая. Однако, если частоты взаимно перпендикулярных колебаний кратны, то траектория – замкнутые кривые причудливой формы, называемые фигурами Лиссажу.

Рассмотрим некоторые из них. Пусть n и m целые числа, тогда уравнения взаимно перпендикулярных колебаний запишем в виде

$$x = A \sin(n\omega t + \alpha), \quad y = B \sin(m\omega t + \beta).$$

Вид фигуры Лиссажу определяется кратностью частот и разностью начальных фаз колебаний. На Рис. 17 приведены некоторые частные случаи.

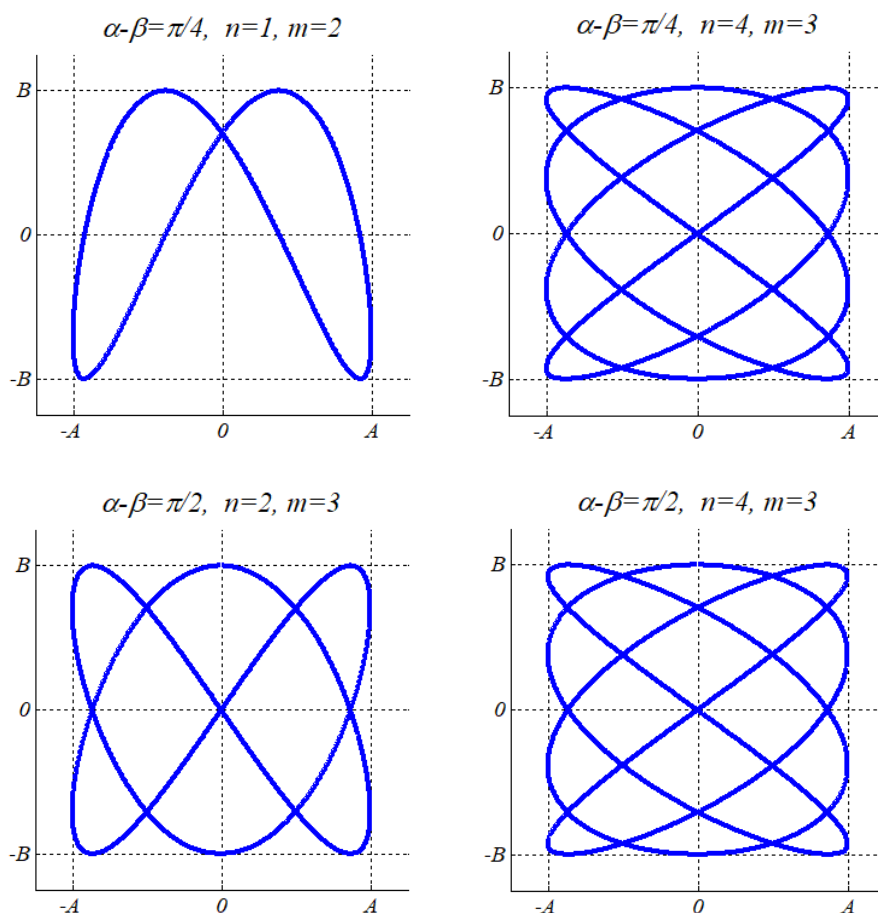


Рис. 17

Правило частот Лиссажу определяет отношение частот двух колебаний. Частоты соотносятся так же, как и количество точек касания фигуры со сторонами прямоугольника A и B , в котором она заключена. В приведенных

примерах выполняется $\frac{m}{n} = \frac{N_x}{N_y}$, где N_x – число пересечений фигуры с осью абсцисс, а N_y – число пересечений фигуры с осью ординат.

Правило частот Лиссажу позволяет измерять частоту неизвестного сигнала путем сравнения его с опорным. Изменяя частоту опорного сигнала, добиваются устойчивого воспроизведения фигуры Лиссажу на экране осциллографа. Тогда частота неизвестного сигнала кратна частоте опорного сигнала, а кратность определяется визуально.

11. Затухающие колебания

В отличие от идеализированных маятников реальные системы в процессе совершения колебаний теряют часть своей энергии. Диссипативные силы, прежде всего силы трения, неизбежно присутствуют в таких системах. Это приводит к тому, что рано или поздно без подпитки энергией от внешнего источника любой реальный маятник останавливается.

В дальнейшем будем полагать, что затухание не слишком велико. Такое ограничение требует некоторого пояснения. Абсолютное значение в физике редко когда бывает информативно. Чаще в физике значимо соотношение параметров. Важно, мал параметр или велик в сравнении с другим параметром. Поэтому, говоря о том, что затухание маятника мало, будем полагать, что потерянная за один период энергия мала по сравнению с полной энергией маятника.

Для механических колебаний, будь то пружинный или математический маятник, затухание проще всего моделировать путем помещения маятника в вязкую жидкость. Диссипация энергии в такой среде обусловлена вязким трением.

На тело, движущееся в вязкой среде, действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости этого тела и направленная против нее. Коэффициент пропорциональности зависит от вязкости среды и геометрических характеристик тела. Тогда,

$$F_{mp} = -rV = -r\dot{x},$$

где $r > 0$ – коэффициент сопротивления.

Преобразуя второй закон Ньютона для пружинного маятника

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x},$$

получаем однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4)$$

где $\delta = r/2m$ – коэффициент затухания, а $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – циклическая частота.

Уравнение (4) называется дифференциальным уравнением свободных затухающих колебаний. Решение этого уравнения будем искать, исходя из следующих соображений.

При отсутствии затухания, $\delta = 0$, решение определяется выражением (2). Можно предположить, что в случае малого затухания решение изменится незначительно. Тогда представим решение в таком виде

$$x(t) = s(t) \sin(\omega t + \varphi_0),$$

где под s будем понимать уже не константу, а некую функцию времени $s(t)$.

Для того чтобы упростить выкладки, в дальнейшем будем полагать, что $\varphi_0 = 0$. Тогда

$$\dot{x} = \dot{s} \sin \omega t + \omega s \cos \omega t, \text{ а } \ddot{x} = \ddot{s} \sin \omega t + 2\omega \dot{s} \cos \omega t - \omega^2 s \sin \omega t.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение (4), получаем

$$\left(\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + (\omega_0^2 - \omega^2) s \right) \sin \omega t + 2\omega (\dot{s} + \delta s) \cos \omega t = 0.$$

Такое возможно лишь при условии, что и $\dot{s} + \delta s = 0$, и $\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + (\omega_0^2 - \omega^2) s = 0$.

Разделим переменные в первом условии, тогда $ds/s = -\delta dt$. Интегрируя, а затем потенцируем, получаем, что $s = Ae^{-\delta t}$. Подставляя полученное выражение в первое условие, имеем $\delta^2 s - 2\delta^2 s + (\omega_0^2 - \omega^2) s = 0$, отсюда $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$.

Итак, решение дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2. \quad (5)$$

Такие колебания, строго говоря, не являются гармоническими, их амплитуда монотонно убывает со временем. Через время $\tau = 1/\delta$, его называют временем релаксации, амплитуда уменьшается в e раз.

Зависимость смещения маятника от времени приведена на Рис. 18. Время нормировано на период собственных колебаний маятника. В расчетах полагалось, что $\omega_0 = \pi \text{ с}^{-1}$, а $\delta = \pi/10 \text{ с}^{-1}$. Пунктирными линиями обозначены экспоненциальные огибающие $s(t)$ и $-s(t)$.

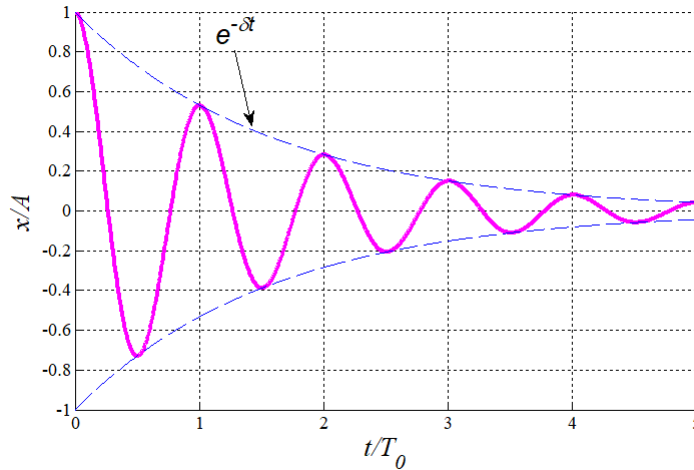


Рис. 18

Период затухающих колебаний определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \quad (6)$$

тогда количество колебаний, которые совершит маятник за время релаксации, $N = \tau/T$.

Решение (5) получено в предположение малости затухания. Сделаем количественную оценку этого требования. Запишем выражение для потенциальной энергии маятника

$$E_p(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} e^{-2\delta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0).$$

Тогда рассеянную за период энергию можно записать как

$$\Delta E = E_p(t) - E_p(t+T) = E_p(t) \left(1 - e^{-2\delta T}\right).$$

И из требования $\Delta E \ll E_p$ следует, что затухания можно считать малыми, если выполняется условие $\delta \ll \omega_0$.

Определим отношение запасенной энергии маятника к рассеянной за период энергии

$$Q = 2\pi E_p / \Delta E.$$

Этот безразмерный параметр называется добротность. Чем больше добротность маятника, тем дольше маятник совершает колебания. В случае малого затухания добротность $Q \approx \pi\tau/T = \pi N$.

Если затухание не является малым, но выполняется условие $\delta < \omega_0$, решение (5) остается справедливым.

Пусть пружинный маятник совершает колебания в вязкой жидкости, например, в глицерине. С понижением температуры вязкость глицерина существенно возрастает, а это приводит и существенному росту затухания. Математически этот процесс соответствует переходу $\delta \rightarrow \omega_0$, при этом, как следует из (6), период колебаний $T \rightarrow \infty$.

Режим движения маятника называется критическим, если $\delta = \omega_0$. В этом случае решение дифференциального уравнения свободных затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\delta t}.$$

Константы A и B определяются из начальных условий. Если маятник отклонили и отпустили, то $x(0) = A$. Тогда, поскольку

$$\dot{x}(t) = e^{-\delta t}(B - \delta(A + Bt)), \text{ а } \dot{x}(0) = 0, \text{ то } B = \delta A.$$

Окончательно получаем, что

$$x(t) = A(1 + \delta t)e^{-\delta t}, \text{ а } \dot{x}(t) = -A\delta^2 t e^{-\delta t}.$$

Зависимость смещения маятника от времени в критическом режиме приведена на Рис. 19. Маятник возвращается к равновесию, асимптотически, не совершая колебаний. По истечению времени, равному периоду собственных колебаний, движение маятника практически полностью прекратится.

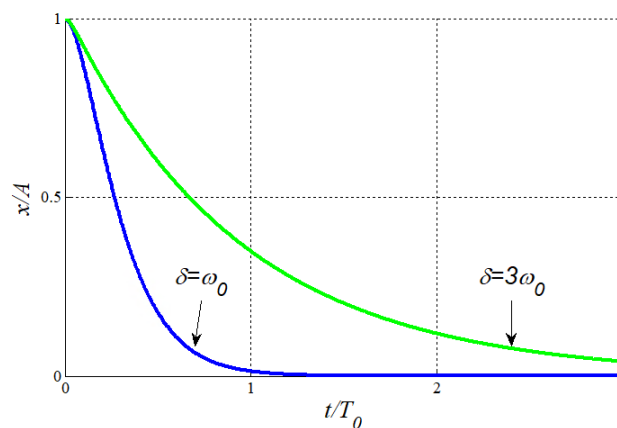


Рис. 19

Если $\delta > \omega_0$, то маятник, выведенный из состояния равновесия, так же, не совершая колебаний, возвращается в положение равновесия асимптотически. Такой режим называется закритическим, или аperiodическим. Отклонение маятника в аperiodическом режиме приведены там же. Расчеты проведены для $\delta = 3\omega_0$. Время движения маятник не менее чем три периода собственных колебаний.

Некоторые технические системы проектируются таким образом, чтобы колебательный режим был минимален. Дверной доводчик, стрелка измерительного прибора не должны совершать длительных колебаний. Демпфирование – это набор приемов, методик и технических средств принудительного гашения колебаний.

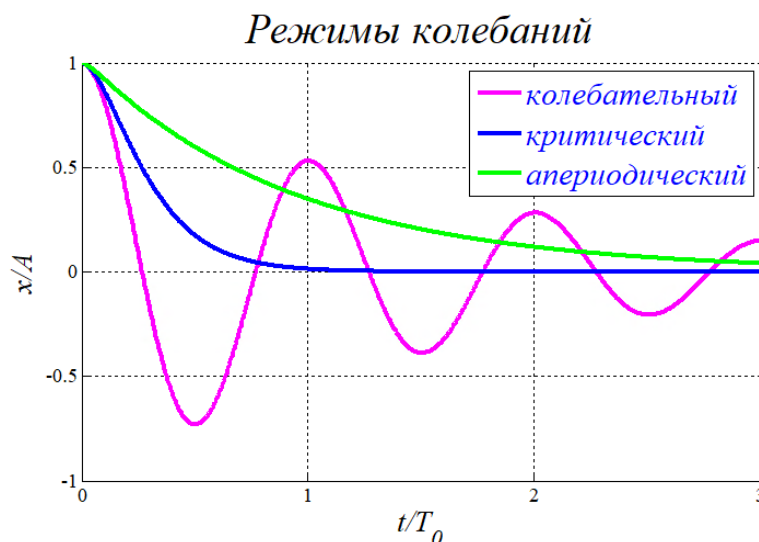


Рис. 20

Сводный график режимов колебаний свидетельствует о том, что система, находящаяся в критическом режиме, быстрее всего вернется в состояние равновесия. Понимание физики явления позволяет делать процесс демпфирования осмысленным.

12. Вынужденные колебания. Резонанс.

В практике на систему, совершающую колебания, может воздействовать внешняя периодическая сила. Такие колебания не являются свободными, их называют вынужденными. Энергия маятника, рассеиваемая диссипативной силой, возобновляется за счет работы вынуждающей силы. Такие колебания могут совершаться бесконечно долго. Рассмотрим более подробно такой вид колебаний.

Рассмотрим находящийся в состоянии покоя пружинный маятник, на который начинает действовать внешняя гармоническая сила $F_0(t) = A \cos \omega t$. Частота внешней силы – ω . Внешняя сила, сила Гука и сила трения сообщат маятнику ускорение, определить которое можно, записав второй закон Ньютона,

$$m\ddot{x} = -kx + r\dot{x} + F_0(t).$$

Путем несложных преобразований, получаем уравнение движения

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t), \text{ где } f_0 = A/m,$$

которое классифицируется как неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Общим решением такого уравнения является сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения – затухающие колебания, поэтому по истечении некоторого времени, сравнимого со временем релаксации $\tau = 1/\delta$, его вклад будет ничтожно малым. Движение маятника примет установившийся характер вынужденных колебаний.

Установившееся движение будет гармоническим с частотой колебаний, совпадающей с частотой вынуждающей силы.

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi_0),$$

при этом фаза колебаний будет сдвинута относительно силы на φ_0 .

Рассчитаем амплитуду и начальную фазу маятника, совершающего вынужденные колебания. Для этого запишем скорость и ускорение маятника

$$\dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t - \varphi_0) = \omega x_0 \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi/2),$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \varphi_0) = \omega^2 x_0 \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi).$$

Формулы приведения использованы для того, чтобы все слагаемые, входящие в уравнение вынужденных колебаний, были выражены через функцию косинус.

Умножив смещение на ω_0^2 , а скорость на 2δ , отобразим их вместе с ускорением на векторной диаграмме. Поскольку смещение отстает по фазе относительно скорости на $\pi/2$, а от ускорения на π , то в любой момент времени эти три вектора будут расположены, как показано на Рис. 21.

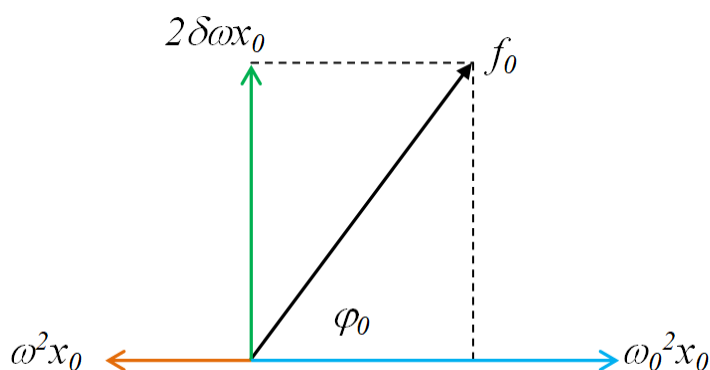


Рис. 21

В сумме эти три вектора равны вектору с модулем равным f_0 , причем этот вектор опережает смещение по фазе на φ_0 . Это следует из дифференциального уравнения вынужденных колебаний.

Как видно из рисунка, для начальной фазы справедливо

$$\operatorname{tg}(\varphi_0) = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Для расчета амплитуды применим к векторной диаграмме теорему Пифагора

$$x_0^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2 \right) = f_0^2.$$

Тогда амплитуда маятника, совершающего вынужденные колебания,

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}.$$

И амплитуда колебаний маятника, и его начальная фаза зависят как от частоты вынуждающей силы, так и от собственной частоты маятника.

На Рис. 22 приведена зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты. Такая зависимость называется амплитудно-частотной характеристикой.

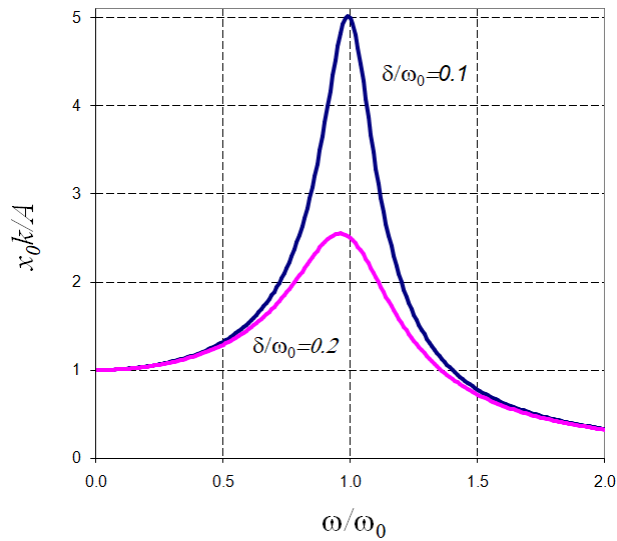


Рис. 22

Если частота вынуждающей силы мала по сравнению с собственной частотой маятника, $\omega/\omega_0 \ll 1$, то маятник колеблется синхронно с вынуждающей силой, $\varphi_0 = 0$, а амплитуда колебаний не зависит от массы маятника $x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{A}{k}$.

Такие колебания называются квазистатическими.

Если частота вынуждающей силы велика по сравнению с собственной частотой маятника, $\omega/\omega_0 \gg 1$, то смещение и вынуждающая сила колеблются в противофазе, $\varphi_0 = -\pi$, а амплитуда колебаний стремится к нулю.

Амплитуда колебаний резко возрастает, когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте маятника. Это явление называется резонансом.

Резонансную частоту нетрудно найти, исследовав функцию $x_0(\omega)$ на экстремум. Из условия $dx_0/d\omega = 0$ следует уравнение

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\delta^2\omega = 0.$$

Тогда для резонансной частоты получаем выражение $\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$. Резонансная частота незначительно смещена относительно собственной частоты маятника.

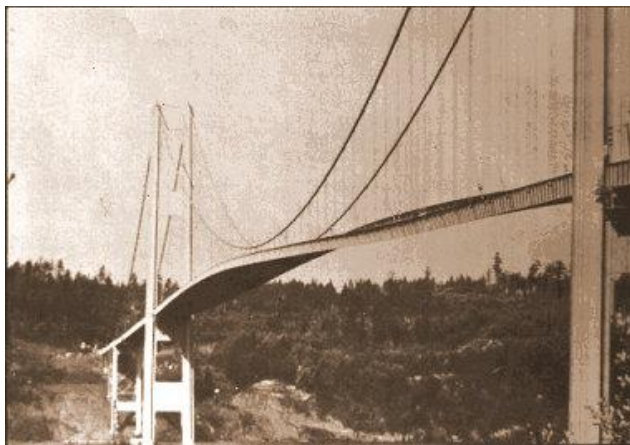
Амплитуда колебаний в состоянии резонанса имеет вид

$$x_0(\omega_p) = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Если затухание пренебрежимо мало, то формально амплитуда маятника становится бесконечно большой. Разумеется, прежде колебания перестанут быть гармоническими. Пренебрегая квадратичными слагаемыми δ/ω_0 , можно показать, что возрастание амплитуды резонансных колебаний относительно амплитуды квазистатических колебаний пропорционально добротности маятника $x_0(\omega_p) \approx Q f_0/\omega_0^2$.

Колебания и резонанс широко используются в технике и технологиях. Вместе с тем любая конструкция должна быть защищена от нежелательных колебаний большой амплитуды, способных ее разрушить.

Наиболее известным случаем разрушения инженерной конструкции вследствие резонанса считается катастрофа с мостом через пролив Такома-Нарроуз (США). Такомский мост был третьим по величине в мире на момент открытия. Он представлял собой подвесную конструкцию с центральным пролётом длиной 854 м. В соответствии с проектом мост должен был выдерживать статическую ветровую нагрузку до скорости ветра 50 м/с. Однако, возможность возбуждения колебаний ветровым потоком не была учтена проектировщиками. Через пять месяцев после открытия, 7 ноября 1940 года, при скорости ветра всего 19 м/с мост разрушился.



Источник *Wikimedia Commons*



Рис. 23

Исследования позволили установить причину катастрофы. При воздействии ветрового потока на мост на элементах конструкции зарождались воздушные вихри. Срыв воздушных вихрей (явление называется срывным флаттером) обеспечивал динамическое воздействие на мост, которое к тому же носило периодический характер. Периодический момент сил возбуждал изгибно-крутильные колебания моста, Рис. 23. Поскольку частота схода вихрей совпала с собственной частотой конструкции, возникшие колебания достигли значительных амплитуд, разрушивших мост.

Похожие проблемы возникли 20 мая 2010 года с автомобильным мостом через реку Волгу в городе Волгограде, который был открыт для движения всего за семь месяцев до этого. В течение часа пролеты моста совершали колебания, размах которых достигал почти одного метра. К счастью, разрушений удалось избежать, однако инцидент с наглядной очевидностью показал, что пренебрежение физикой явлений при проектировании и эксплуатации сложных инженерных конструкций недопустимо.

13. *Спектральное представление колебательных процессов*

Колебания, исследованные ранее, являются гармоническими. Разумеется, это далеко не единственный класс возможных типов колебаний. Рассмотрим периодическую возбуждающую силу, действующую на маятник. Ее график приведен на Рис. 24.

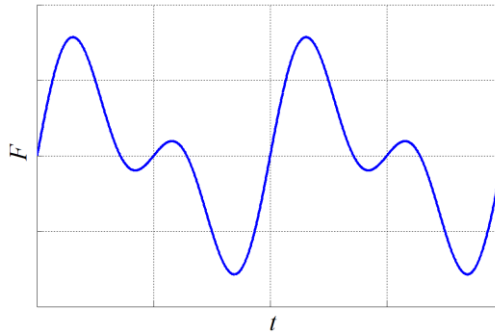


Рис. 24

Очевидно, что сила не является гармонической и выводы, сделанные ранее, не справедливы. Что делать? Строить новую теорию?

Анализ существенно упрощается, если использовать теорему французского математика Фурье о том, что любая периодическая функция может быть представлена в виде ряда гармонических функций. Пусть функция $u(t)$ имеет период T , тогда

$$u(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n).$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \operatorname{tg} \frac{a_n}{b_n}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Гармонические колебания, участвующие в суммировании, имеют частоты, кратные частоте исходного негармонического колебания (сигнала). Эти колебания называются гармониками. Тогда A_n – амплитуда гармоники, φ_n – фаза. Те из них, период которой равен периоду негармонического сигнала, называют первой или

основной гармоникой. В общем случае негармонический сигнал раскладывается на бесконечное число гармоник.

Приведенный на Рис. 24 сконструированный сигнал можно представить следующим образом:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = \sin(\omega t) + 0.75 \sin(2\omega t), \quad \omega = 1c^{-1}.$$

В данном примере первой гармоникой является функция u_1 , а u_2 представляет собой вторую гармонику сигнала. Других гармоник разложение этой функции не содержит. На Рис. 25 приведен периодический сигнал и его две гармоники.

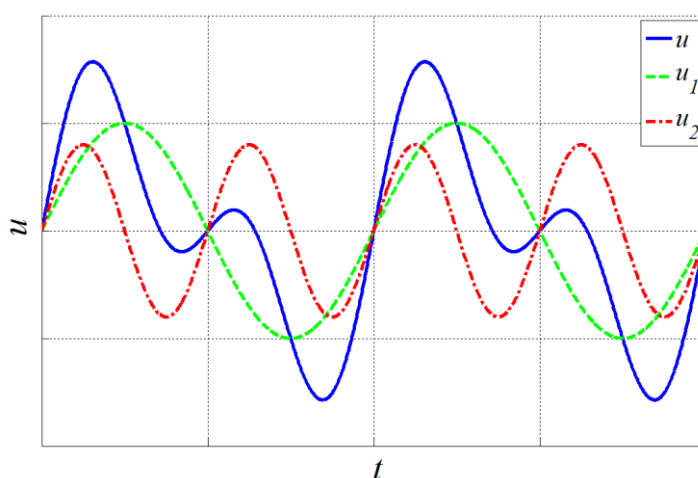


Рис. 25

Спектр сигнала – это совокупность всех гармонических составляющих негармонического сигнала. Спектр бывает амплитудным и фазовым:

- амплитудный спектр – совокупность амплитуд всех гармоник, из которых складывается негармонический сигнал;
- фазовый спектр сигнала – совокупность начальных фаз всех гармоник.

Обычно спектр изображается в виде диаграммы, состоящей из набора вертикальных линий определенной длины (длина определяется амплитудой гармоники). На оси абсцисс диаграммы откладываются частоты или номера гармоник.

Амплитудный спектр исследуемого сигнала, состоящий из двух гармоник, приведен на Рис. 26. Такой спектр, состоящий из отдельных линий, называется

линейчатым. Частоты гармоник различаются в два раза, а амплитуды имеют значения 1 и 0.75.

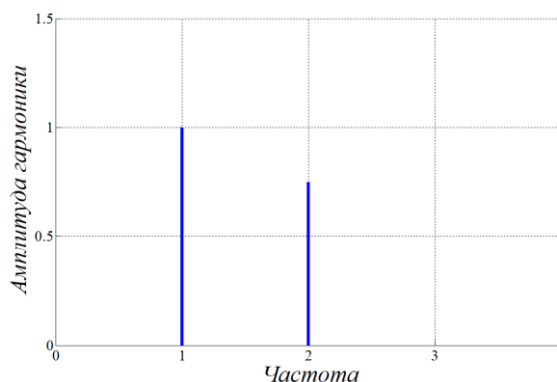


Рис. 26

Для более сложного сигнала дискретный ряд гармоник образует непрерывную функцию. В этом случае спектр называется сплошным.

Амплитудно-частотная характеристика

Пружинный маятник, совершающий вынужденные колебания, можно рассматривать как некоторую систему, на вход которой подается сигнал (колебания), а на выходе в общем случае регистрируется измененный сигнал.

Такой системой (устройством) может быть не только механический осциллятор, но и акустические, оптические и радиотехнические устройства. Важнейшая характеристика таких устройств – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – зависимость амплитуды выходного сигнала от частоты входного сигнала. Построенная резонансная кривая является АЧХ пружинного маятника.

На Рис. 27 представлена характерная для многих устройств АЧХ.

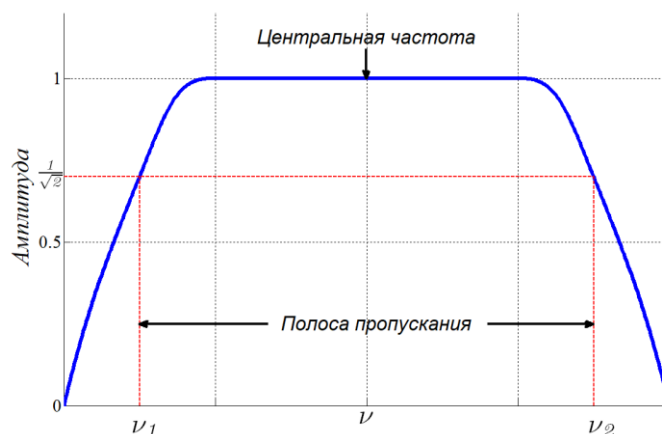


Рис. 27

На частотах ν_1 и ν_2 амплитуда выходного сигнала уменьшается в ~ 0.7 раза относительно центральной частоты. Ослабление амплитуды колебаний в $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ раза эквивалентно ослаблению мощности в $1/2$ раза от максимальной. Между этими частотами располагается полоса пропускания – диапазон частот, в пределах которого АЧХ устройства достаточно равномерна для того, чтобы обеспечить передачу сигнала без существенного искажения его формы.

14. Связанные маятники

Два идентичных физических маятника соединены между собой невесомой пружиной, как показано на Рис. 28. Выведем из равновесия эту конструкцию. Как она будет двигаться?

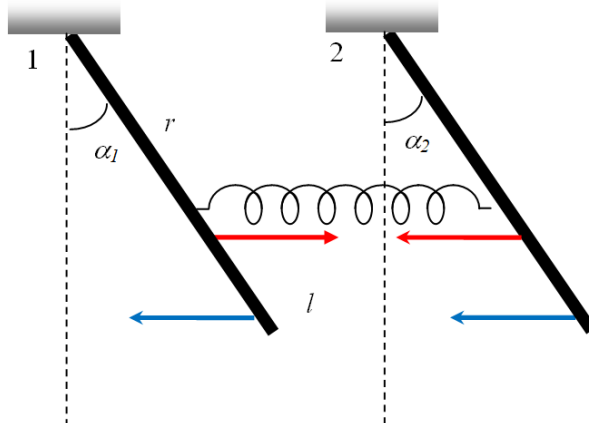


Рис. 28

Введем обозначения: l – расстояние от оси вращения до центра масс, k – жесткость пружины, r – расстояние от оси вращения до пружины, J – момент инерции маятника.

Первоначально рассмотрим движение одного маятника. Для этого удалим пружину и отклоним маятник на малый угол α . Под действием момента силы тяжести он начнет двигаться. Это движение будет вращательным.

Запишем момент силы тяжести $M = mgl \sin \alpha \approx mgl\alpha$ и основное уравнение динамики вращательного движения $M = J\ddot{\alpha}$. Объединяя эти выражения, получим дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \text{ где } \omega_0^2 = \frac{mgl}{J}.$$

Вернем пружину на место и отклоним левый маятник на угол α_1 , а правый на угол α_2 . Пусть для определенности $\alpha_2 > \alpha_1$, что отвечает растянутой пружине.

Предыдущий анализ остается в силе, но теперь на маятники действует еще и момент упругой силы со стороны пружины. Величина этого момента

$$M = k\Delta x \cdot r,$$

а растяжение пружины $\Delta x = r \sin \alpha_2 - r \sin \alpha_1 \approx r(\alpha_2 - \alpha_1)$.

Угол в этой постановке отсчитывается от вертикали против часовой стрелки, возвращающая сила направлена в противоположном направлении. Упругие силы обозначены стрелками вдоль пружины. Добавим в основное уравнение динамики вращательного движения момент упругих сил с учетом их направления. Тогда для левого и правого маятников имеем

$$\begin{cases} J\ddot{\alpha}_1 = -mgl\alpha_1 + k(\alpha_2 - \alpha_1)r^2 \\ J\ddot{\alpha}_2 = -mgl\alpha_2 - k(\alpha_2 - \alpha_1)r^2 \end{cases} .$$

Если предположить, что $\alpha_1 > \alpha_2$, то пружина сжата, но вид уравнения получается прежним (проделайте этот вывод самостоятельно).

Обозначим $\delta^2 = kr^2/J$, тогда дифференциальные уравнения, описывающие совместное движение маятников, сведутся к виду

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 + \omega_0^2\alpha_1 - \delta^2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \\ \ddot{\alpha}_2 + \omega_0^2\alpha_2 + \delta^2(\alpha_2 - \alpha_1) = 0 \end{cases} .$$

Очевидным образом построенные уравнения отличаются от дифференциальных уравнений гармонических колебаний, а следовательно, они описывают более сложные режимы движения.

Сложим первое уравнение со вторым, а затем из второго вычтем первое. Определив новые переменные $\varphi_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\varphi_2 = \alpha_2 - \alpha_1$, получаем

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_1^2\varphi_1 &= 0, \quad \omega_1 = \omega_0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_2^2\varphi_2 &= 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2} . \end{aligned}$$

Введенные переменные называются нормальными координатами, в этих координатах колебательная система совершает гармонические (нормальные) колебания. Нормальные координаты играют роль ортонормированного базиса. Любые колебания в системе являются линейными суперпозициями нормальных колебаний.

$$\varphi_1 = A_1 \cos \omega_1 t, \quad \varphi_2 = A_2 \cos \omega_2 t.$$

В общем случае колебания являются негармоническими. Однако в нескольких частных случаях они определяются начальными условиями, в системе возникнут простейшие колебательные движения – гармонические колебания.

Синфазные колебания

Пусть $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$. Оба маятника отведены на одинаковый угол в одну сторону. Тогда $\varphi_2(0) = A_2 = 0$, а $\varphi_1(0) = A_1 = 2\alpha_0$. Возвращаясь к исходным координатам, поскольку

$$2\alpha_1 = \varphi_1 + \varphi_2, \quad 2\alpha_2 = \varphi_1 - \varphi_2,$$

получаем, что

$$\alpha_1(t) = \alpha_2(t) = \alpha_0 \cos \omega_0 t.$$

Маятники колеблются по гармоническому закону на собственной частоте. Углы, на которые отклонены маятники, остаются одинаковыми в любой момент времени. Поэтому такие колебания называются синфазными. Пружина не работает, не оказывает никакого влияния на движение.

Противофазные колебания

Пусть $\alpha_1(0) = -\alpha_2(0) = -\alpha_0$. Маятники разведены на одинаковый угол в разные стороны. Тогда $\varphi_1(0) = A_1 = 0$, а $\varphi_2(0) = A_2 = 2\alpha_0$. Возвращаясь к исходным координатам, получаем

$$\alpha_1(t) = -\alpha_0 \cos \omega_2 t, \quad \alpha_2(t) = \alpha_0 \cos \omega_2 t.$$

Маятники совершают гармонические колебания на частоте ω_2 , большей, чем собственная частота. Фазы колебаний сдвинуты на π , такие колебания называются противофазными.

Биения

Оставив левый маятник в положении равновесия, отклоним правый против часовой стрелки. Начальные условия запишутся следующим образом:

$$\alpha_1(0) = 0, \quad \alpha_2(0) = \alpha_0.$$

Тогда $\varphi_2(0) = A_2 = \alpha_0$, а $\varphi_1(0) = A_1 = \alpha_0$.

Возвращаясь к исходным координатам, получаем, что колебания каждого маятника будут линейной суперпозицией двух гармонических колебаний

$$\alpha_1(t) = \frac{\alpha_0}{2}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t), \quad \alpha_2(t) = \frac{\alpha_0}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t).$$

Воспользовавшись тригонометрическими соотношениями, преобразуем этот результат к виду

$$\alpha_1(t) = \alpha_0 \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right), \quad \alpha_2(t) = \alpha_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right).$$

В случае слабой связи между маятниками, когда $\omega_0 \gg \delta$, имеем

$$\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2} \approx \omega_0 + \delta^2/\omega_0^2,$$

$$\omega_2 + \omega_1 \approx 2\omega_0, \quad \omega_b = \omega_2 - \omega_1 \approx \delta^2/\omega_0^2.$$

Колебания маятников примут вид гармонических (на собственной частоте) с медленно меняющейся амплитудой.

$$\alpha_1(t) = A_l(t) \sin(\omega_0 t), \quad A_l(t) = \alpha_0 \sin(\omega_b t/2).$$

$$\alpha_2(t) = A_r(t) \cos(\omega_0 t), \quad A_r(t) = \alpha_0 \cos(\omega_b t/2).$$

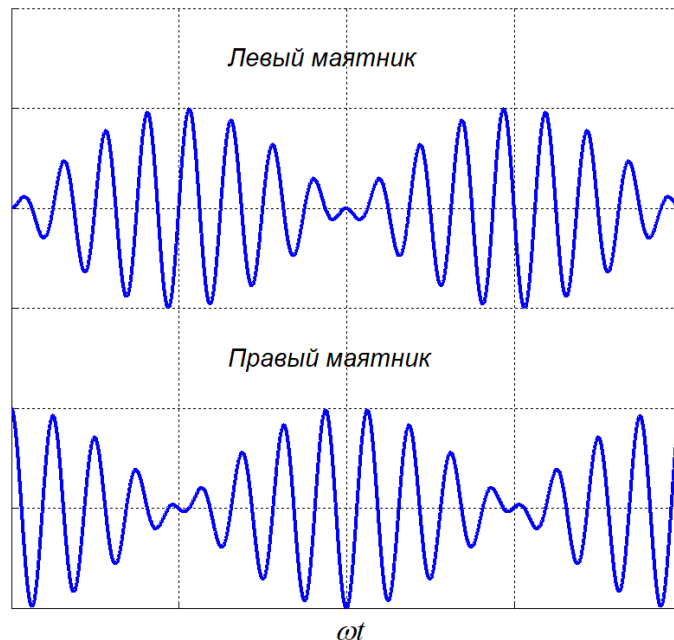


Рис. 29

Графики колебаний правого и левого маятников приведены на Рис. 29. Можно сказать, что колебания на основной частоте модулированы медленно меняющейся гармонической функцией. Такие колебания не что иное, как известные нам биения.

В начальный момент вся энергия системы была сосредоточена в правом маятнике. С течением времени посредством связи через пружину энергия постепенно перейдет к левому маятнику, а правый остановится. Затем процесс передачи энергии повторится в обратном направлении.

15. *Нелинейный осциллятор*

Рассмотрим уже известный нам математический маятник, отбросив предположение о том, что угол, на который отклоняется маятник, мал. В конструкцию маятника внесем изменения, вместо нити используем невесомый стержень. Такое изменение позволит отклонять маятник на углы, превышающие 90 градусов.

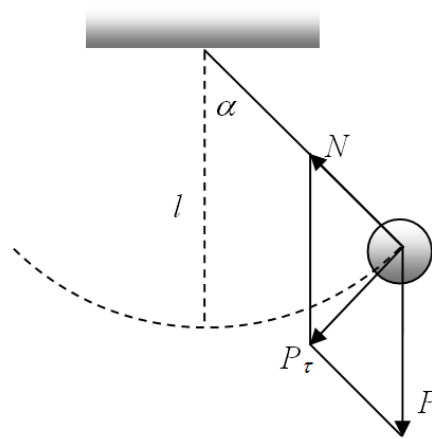


Рис. 30

На отклоненную от положения равновесия на угол α материальную точку, Рис. 30, действует возвращающая сила $P_\tau = -mg \sin \alpha$, под действием которой она приобретает угловую скорость $\dot{\alpha}$. Скорость точки $V = l\dot{\alpha}$, а тангенциальное ускорение $a_\tau = \dot{V} = l\ddot{\alpha}$.

Тогда, записав второй закон Ньютона,

$$ml\ddot{\alpha} = -mg \sin \alpha$$

и определив собственную частоту малых колебаний

$$\omega_0^2 = g/l ,$$

получаем дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника,

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0 .$$

Отличие полученного уравнения от уравнения линейных гармонических колебаний в том, что оно нелинейно.

Решение нелинейного уравнения можно построить, используя специальные функции, но это выходит за рамки данного курса. Приведем лишь выражение для

периода колебаний маятник. Если $K(k)$ – полный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода, то период колебаний маятника определяется следующим образом:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{2}{\pi} K(k), \quad k = \sin \frac{\alpha_0}{2}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где T_0 – период собственных малых колебаний, а α_0 – угол, на который отклонили маятник.

Полный эллиптический интеграл 1-го рода можно представить в виде степенного ряда:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \right)^2 k^{2n},$$

Первые четыре члена этого ряда позволяют рассчитать период в диапазоне углов $0 < \alpha_0 \leq \pi/2$ с точностью 1%

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right)^2 \sin^4 \frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \right)^2 \sin^6 \frac{\alpha_0}{2} + \dots$$

Период колебаний нелинейного маятника всегда превышает период малых колебаний.

Рассчитанная зависимость периода колебаний от амплитуды маятника приведена на Рис. 31.

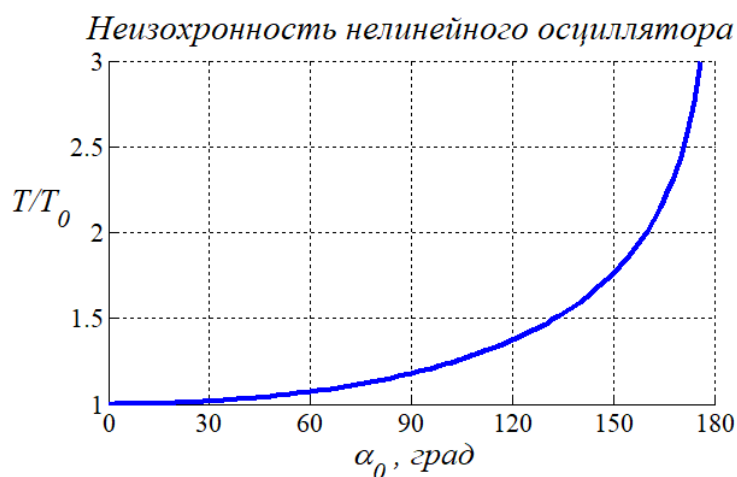


Рис. 31

Линейный гармонический осциллятор обладает важным свойством изохронности, независимости периода собственных колебаний от амплитуды этих колебаний. Обнаруживший эту важную особенность Галилей предложил

использовать маятник для измерения времени. Рис. 31 свидетельствует, что нелинейный осциллятор утрачивает изохронность.

Зависимость $T(\alpha_0)$ сильно нелинейная. В области малых амплитуд построенная кривая становится пологой и выходит на значение, соответствующее малым колебаниям.

Зависимость положения маятника от времени приведена на Рис. 32. Маятник, собственная частота колебаний которого $\omega_0 = 1 \text{ c}^{-1}$, последовательно отклоняется на 10° , 60° и 80° . В целом движение предоставленного самому себе маятника представляет собой колебания. Неизохронность колебаний явно отражается на рисунке, а вот их ангармоничность не так наглядно выражена, хотя периодические функции, приведенные на рисунке, не являются гармоническими.

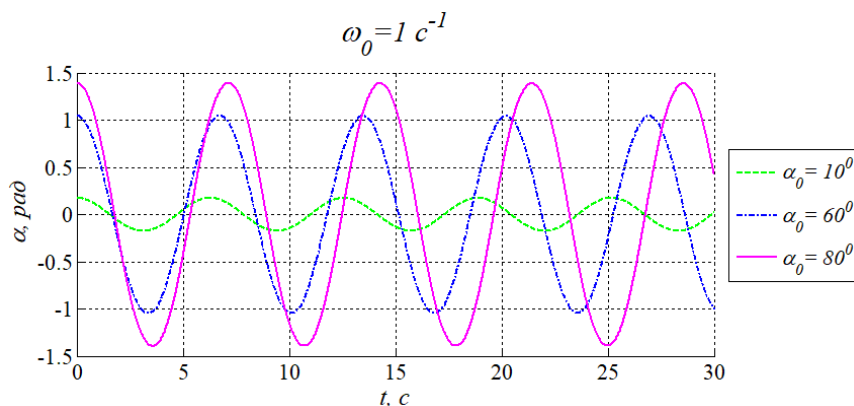


Рис. 32

Визуально это становится заметно при увеличении амплитуды колебаний, Рис. 33.

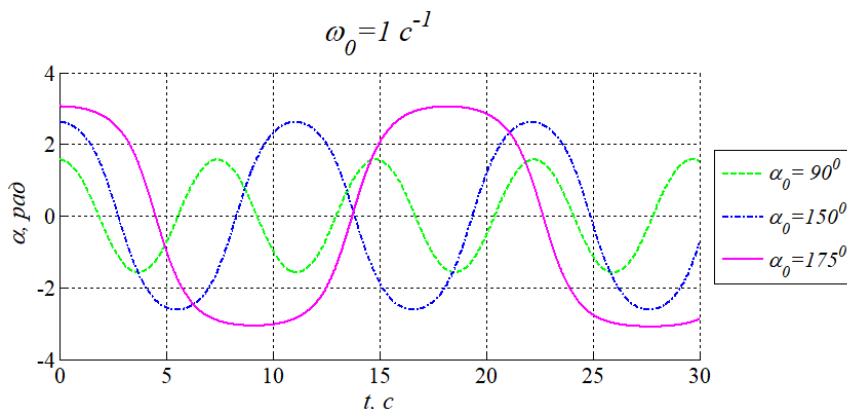


Рис. 33

16. Фазовые траектории

Построение решения дифференциального уравнения колебаний не является завершающим этапом исследования. Анализ решения часто оказывается не самым простым делом. Важнейшим инструментом такого анализа служат фазовые диаграммы (портреты), содержащие информацию о поведении системы в целом. Зачастую фазовую диаграмму можно построить, не решая дифференциальное уравнение.

Пусть две переменные, назовем их фазовыми координатами, однозначно определяют состояние системы. Тогда фазовая плоскость – координатная плоскость, в которой по осям отложены фазовые координаты. Каждая точка фазовой плоскости отражает одно единственное состояние системы. Если система претерпевает изменения, то точка на фазовой плоскости движется, оставляя след, который называется фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий – фазовая диаграмма дает представление обо всех возможных состояниях системы и типах движений в ней.

В случае механических колебаний на оси абсцисс фазовой плоскости откладывается координата, а на оси ординат – первая производная от координаты по времени, по сути, скорость или импульс.

Фазовые траектории линейного осциллятора

Пусть линейный осциллятор совершает колебания согласно уравнению $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$, тогда его скорость $V(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t)$. Запишем для осциллятора закон сохранения полной механической энергии

$$\frac{mV^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} .$$

Разделив это уравнение на правую часть, получаем, что фазовая траектория представляет собой уравнение эллипса, Рис. 34,

$$\left(\frac{V}{A\omega_0} \right)^2 + \left(\frac{x}{A} \right)^2 = 1 .$$

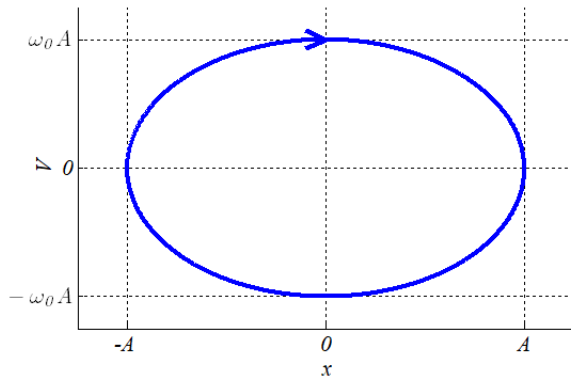


Рис. 34

Маятник движется, не покидая ограниченную часть пространства, такое движение называется финитным. При этом площадь, ограниченная фазовой траекторией, пропорциональна полной механической энергии осциллятора.

Фазовые траектории диссипирующего осциллятора

Рассмотрим затухающие колебания. Зависимости смещения маятника от времени определяется выражением

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Тогда для скорости получаем

$$V(t) = Ae^{-\delta t} (\omega \cos(\omega t) - \delta \sin(\omega t)).$$

Фазовая траектория, приведенная на Рис. 35, превратилась из эллипса в скручивающуюся спираль. Траектория иллюстрирует следующее: энергия маятника диссипирует и он, постепенно замедляясь, останавливается.

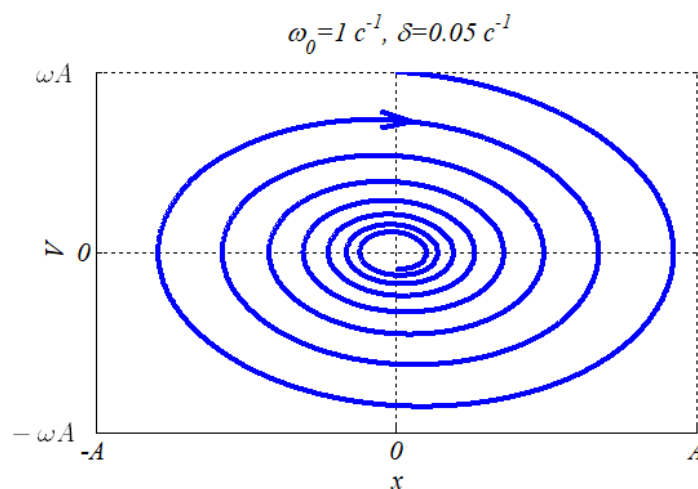


Рис. 35

В критическом режиме, при $\delta = \omega_0$, маятник возвращается к равновесному положению асимптотически, не совершая колебаний. Фазовые координаты в этом случае можно записать в виде

$$x(t) = A(1 + \delta t)e^{-\delta t}, \text{ а } V(t) = -A\delta^2 te^{-\delta t}.$$

Фазовая траектория приведена на Рис. 36

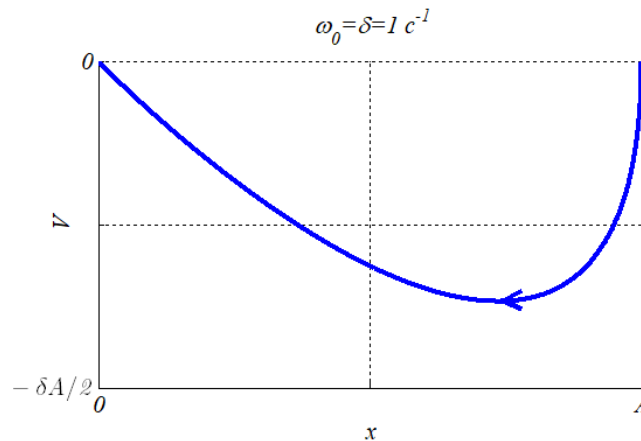


Рис. 36

Фазовые траектории нелинейного осциллятора

Качественные представления о фазовом портрете нелинейного осциллятора можно получить, используя уже известные закономерности.

Под нелинейным осциллятором будем понимать шарнирно подвешенный невесомый стержень, к свободному концу которого прикреплена материальная точка. Это известный нам физический маятник. Систему будем считать консервативной.

Кратковременное приложение силы к свободному концу стержня выведет его из состояния покоя. Маятник, получивший при ударе энергию E_0 , начнет движение. Пусть длина стержня l , а масса материальной точки m . Тогда при выполнении условия $E_0 > 2mgl$ маятник будет вращаться с переменной скоростью.

В качестве фазовых координат будем использовать угловое перемещение α и угловую скорость $\dot{\alpha}$. Совершив полный оборот относительно произвольного положения, маятник вернется к тому же значению угловой скорости, а угловое

перемещение при этом возрастет на 2π . Фазовые траектории окажутся незамкнутыми.

Если $E_0 \ll 2mgl$, то осциллятор будет совершать линейные гармонические колебания. Фазовая траектория линейного гармонического осциллятора – эллипс. Траектории замкнуты.

Если $E_0 < 2mgl$, то колебания будут нелинейные. Фазовые траектории останутся замкнутыми, но перестанут быть эллипсами.

Таким образом, фазовая траектория, соответствующая значению $E_0 = 2mgl$, будет делить фазовую плоскость на две области, в одной фазовые траектории незамкнутые кривые, а в другой – замкнутые.

Точный расчет фазового портрета нелинейного осциллятора можно провести на основе закона сохранения полной механической энергии. Сумма кинетической и потенциальной энергии всегда равняется энергии, полученной маятником при ударе

$$\frac{J\dot{\alpha}^2}{2} + mgl(1 - \cos \alpha) = E_0 .$$

Момент инерции такого маятник равен $J = ml^2$, а собственная частота малых колебаний $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. Тогда

$$\dot{\alpha} = \pm \sqrt{2}\omega_0 \sqrt{\frac{E_0}{mgl} - 1 + \cos \alpha} .$$

$$\omega_0 = 1 \text{ c}^{-1}$$

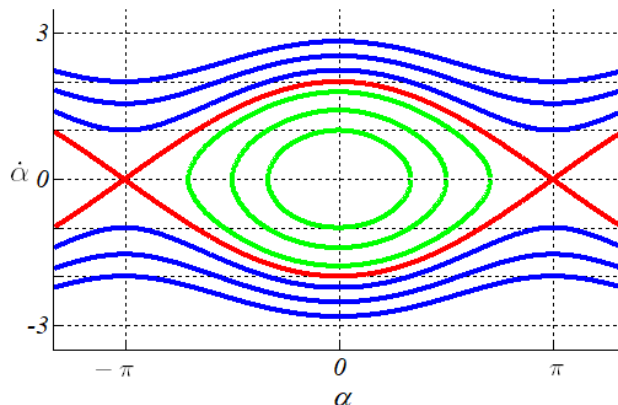


Рис. 37

Фазовый портрет нелинейного осциллятора приведен на Рис. 37. Результаты расчета соответствуют качественному анализу. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость на области с различными типами движения. На рисунке сепаратриса – это кривые, проходящие через точки с координатами $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$.

Состояние устойчивого равновесия осциллятора реализуется в особых точках (центрах). Они расположены на оси абсцисс при значениях $\alpha = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. В точках на оси абсцисс со значениями $\alpha = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$ реализуется состояние неустойчивого равновесия. Эти точки называются седлами.

17. Волны на струне

Во многих музыкальных инструментах источником звука являются туго натянутые струны. Эти инструменты так и называют – струнные. Арфа, скрипка, гитара – всем известные представители этой обширной группы инструментов. Музыканты, воздействуя на струны пальцами, смычком, медиатором, заставляют струны колебаться и издавать при этом звуки.

Рассмотрим такой вид колебаний. Пусть имеется туго натянутая струна (нить). Струну будем полагать тонкой и однородной. Ее линейная плотность $\rho = const$. В состоянии покоя струна прямая. Расположим струну так, чтобы ось Ox совпала со струной. Тогда уравнение, описывающее форму струны, имеет вид $y = 0$.

Если, приложив силу, незначительно изменить форму струны, а затем отпустить ее, то струна начнет колебаться. Будем полагать, что колебания осуществляются только в одной плоскости ux . Каждая точка струны перемещается перпендикулярно оси Ox . Тогда в некоторый момент времени отклонение струны от прямой представим в виде уравнения $y = U(x)$. Колебания будем считать малыми, форма струны искажается незначительно.

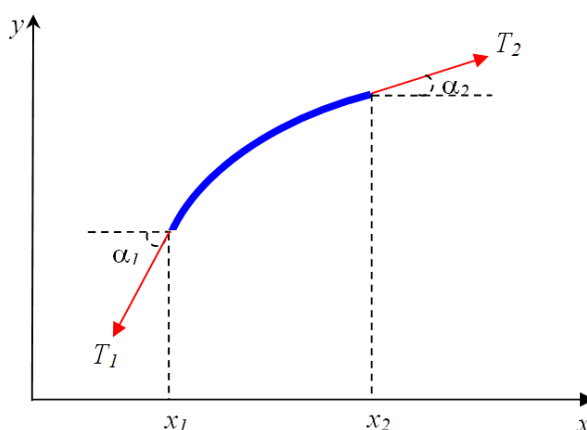


Рис. 38

Выделим малый участок струны с координатами от x_1 до x_2 , Рис. 38, и построим силы, действующие на него. Если струна натянута туго, силой тяжести

можно пренебречь. Сила натяжения струны направлена по касательной в каждой точке струны. Запишем силу, действующую на выделенный малый участок,

$$F_y = T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1, \quad F_x = T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1.$$

Силу натяжения можно считать постоянной вдоль струны $T_0 = T_1 = T_2$, а углы отклонения малыми, $\alpha_1 \ll 1$, $\alpha_2 \ll 1$. Тогда, поскольку $\lim_{x_1 \rightarrow x_2} F_x = 0$, действующая в каждой точке струны сила направлена вдоль оси Oy .

Производная функции в точке есть тангенс угла наклона касательной к графику этой функции в этой точке. С учетом малости угла α_1 получаем для левой границы участка

$$\sin \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_1 = \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_1}.$$

Аналогичные построения справедливы и для правой границы участка

$$\sin \alpha_2 \approx \operatorname{tg} \alpha_2 = \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_2}.$$

Тогда силу, приложенную к выделенному участку, можно записать как

$$F_y = T_0 \left(\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_2} - \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_1} \right),$$

а его массу без учета кривизны струны как $m \approx \rho(x_2 - x_1)$.

Составив отношение силы к массе, осуществим предельный переход, устремляя точку x_1 к точке x_2 и используя определение производной, получим,

$$\frac{F_y}{m} = \lim_{x_1 \rightarrow x_2} \frac{T_0 \left(\left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_2} - \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x_1} \right)}{\rho(x_2 - x_1)} = c^2 \frac{d^2 U}{dx^2}, \quad (7)$$

где $c = \sqrt{T_0/\rho}$.

Поскольку положение струны изменяется с течением времени, то функция, описывающая ее форму, зависит от двух переменных $U = U(x, t)$. Обобщая понятие производной на случай функции нескольких переменных, далее будем

использовать частные производные. Тогда ускорение любой точки струны можно записать как $a = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, а согласно второму закону Ньютона $a = F/m$. Учитывая выражение (7), получаем, что изменение формы струны описывается дифференциальным уравнением второго порядка,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (8)$$

которое называется уравнением колебаний струны.

Гармоническая функция вида

$$U(x, t) = U_0 \sin(\omega t \pm kx), \quad \omega = kc, \quad (9)$$

при подстановке в уравнение (8) превращает его в тождество, т.е. является его решением. Рассмотрим полученное решение подробнее.

Пусть точка струны с координатой $x=0$ под действием внешней силы совершает гармонические колебания $U(0, t) = U_0 \sin \omega t$. Говорят, что в начале координат расположен источник колебаний. Тогда точка с координатой x_1 также будет совершать гармонические колебания с той же самой частотой $U(x_1, t) = U_0 \sin \omega t'$. Однако эти колебания происходят с запаздыванием по времени $t' = t - x_1/c$. Колебания точки x_1 отстают от колебаний в начале координат на время распространения возмущения от источника до нее. Тогда константа c в уравнении (8) есть ни что иное как скорость распространения колебаний по струне.

Такой процесс распространения колебаний в струне называется волновым процессом или просто волной. Поэтому уравнение (8) также называется волновым уравнением или дифференциальным уравнением плоских волн, а константа k из уравнения (9) - волновым числом.

Источник колебаний порождает две волны. Одна распространяется в области $x > 0$, ей соответствует знак минус в решении (9), другая в области $x < 0$, ей соответствует знак плюс. Поскольку полагалось, что диссипация энергии отсутствует, то амплитуда волны U_0 остается постоянной.

Гармоническая функция – периодическая, поэтому точки струны, удовлетворяющие условию $kx = \pm 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, колеблются в одной фазе с источником. Минимальное расстояние λ между двумя точками, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны. Очевидно, что $\lambda = 2\pi/k = c 2\pi/\omega = cT$. Поэтому длина волны – это расстояние, которое проходит волна за период, а волновое число показывает, сколько длин волн укладывается на отрезке 2π метров.

Рассмотренные бегущие волны на струне являются частным случаем широкого класса волновых явлений, и многие понятия и сделанные выводы распространяются на эти явления. В частности справедливо, что:

- для любого волнового процесса справедливо соотношение $\lambda\nu = c$,
- колебания участков струны осуществляются перпендикулярно направлению распространения волны,
- бегущая волна не переносит массу, но переносит энергию, полученную от источника.

18. Стоячие волны

Рассмотрим наложение двух бегущих навстречу друг другу волн одинаковой частоты и амплитуды

$$y_1(x,t) = A \sin(\omega t - kx), \quad y_2(x,t) = A \sin(\omega t + kx).$$

Наложение волн подчиняется принципу суперпозиции – при распространении нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частиц равно геометрической сумме смещений. Тогда, используя тригонометрическое выражение для суммы синусов, получаем

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos(kx) \sin(\omega t).$$

Выражение содержит два множителя. Один из них – синус, являющийся функцией только времени и задающий гармонические колебания на частоте бегущих волн. Второй – косинус, зависящий только от координаты. Каждая точка струны колеблется, но амплитуда этих колебаний изменяется вдоль направления распространения волн.

Волны называются когерентными, если разность их фаз не зависит от времени. Когерентными могут быть только монохроматические волны, т.е. волны одной частоты. Именно такие волны мы и рассматриваем. В нашем случае, разность фаз – это аргумент косинуса, и волны являются когерентными.

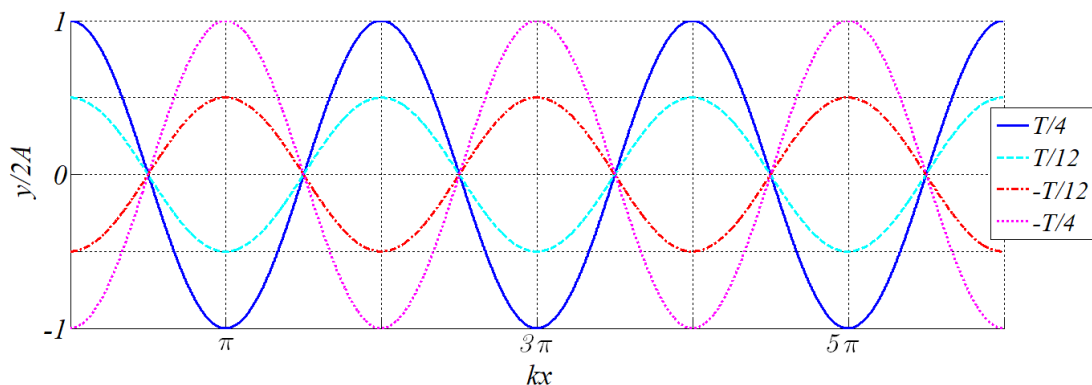


Рис. 39

Интерференция волн – явление наложения когерентных волн, при котором происходит устойчивое во времени переопределение энергии в пространстве.

Таким образом, на струне в результате интерференции двух бегущих волн образовалась стоячая волна, изображенная на Рис. 39 в моменты времени $t = T/4; -T/4; T/12; -T/12$, где T – период колебаний.

Амплитуда стоячей волны максимальна, когда аргумент косинуса кратен π . Эти точки называются пучностями. Поскольку волновое число и длина волны связаны соотношением $\lambda = 2\pi/k$, то из уравнения стоячей волны, получаем условие для пучности

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_m = \pm m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Некоторые точки струны покоятся. Эти точки называются узлами. Амплитуда колебаний в узлах равняется нулю. Условие для нахождения узлов очевидно $\cos(kx) = 0$, но тогда

$$\frac{2\pi}{\lambda} x_m = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Расстояние между соседними узлами или соседними пучностями называется длиной стоячей волны. Поскольку

$$\lambda_s = x_{m+1} - x_m = \lambda/2,$$

то длина стоячей волны равняется половине длины бегущей волны.

Все точки струны, заключенные между двумя соседними узлами, колеблются синфазно, а лежащие по разные стороны от узла – противофазно.

Бегущие навстречу друг другу волны переносят энергию, но в разных направлениях. Поэтому усредненный в любом сечении поток энергии равен нулю. Стоячая волна не переносит энергию. В ней два раза за период происходит превращение потенциальной энергии в кинетическую энергию.

Рассмотрим натянутую струну длиной L , закрепленную на концах. Источник колебаний, расположенный на струне, возбуждает две бегущие волны. Достигнув концов струны, каждая из них отразится, и, двигаясь навстречу друг другу, они сформируют стоячую волну.

Амплитуда колебаний закрепленных концов струны равняется нулю, следовательно, там располагаются узлы. Пусть других узлов на струне нет, тогда

на длине струны укладывается половина длины бегущей волны. В любом случае колебание струны в режиме стоячей волны предполагает, что на длине струны укладывается целое число длин полуволен бегущей волны или целое число длин стоячей волны.

$$L = \lambda_{sn} n, n = 1, 2, \dots$$

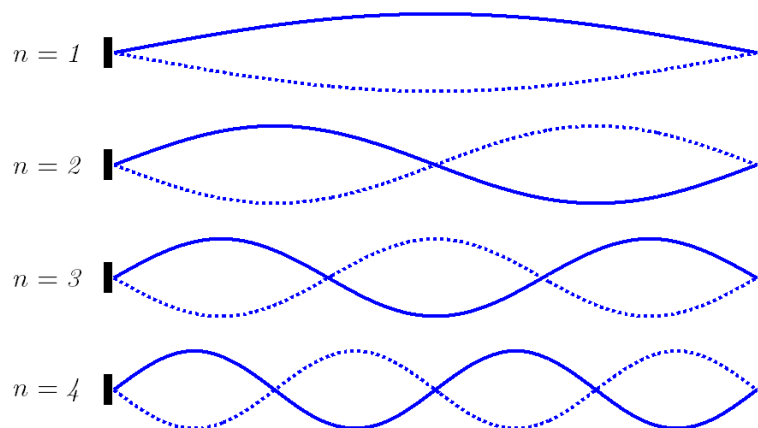


Рис. 40

Рис. 40 демонстрирует колебания струны в тех случаях, когда на ее длине укладывается одна, две, три и четыре длины стоячей волны. Сплошная и пунктирная линии соответствуют положению струны в моменты времени, различающиеся на половину периода.

Набору стоячих волн, допустимых на данной струне, соответствует набор частот

$$\nu_n = c/\lambda_n = cn/(2L).$$

Стоячие волны других частот на такой струне существовать не могут.

Эти частоты называются гармониками. Номер гармоники соответствует количеству длин волн стоячей волны, укладывающихся на струне. Первая гармоника называется основной тон. Вторая, третья, четвертая и все последующие гармоники носят общее название обертонов.

Любое кратковременное воздействие на струну, а именно так взаимодействует музыкант со струнным инструментом, приводит к возникновению на струне большого числа стоячих волн. Основная доля энергии приходится на основной тон, с увеличением номера гармоники энергия колебаний

уменьшается. Но наличие большого числа обертонов делает звук окрашенным, придавая ему индивидуальное звучание – тембр. Именно тембром различается звучание различных музыкальных инструментов.

19. Волны в упругих средах

Любое изменение состояния среды (возмущение), которое распространяется в пространстве, называется волной. Волны, распространяющиеся по струне, являются частным случаем целого класса явлений. Упругие волны, волны на поверхности, звуковые и электромагнитные волны, имея различную физическую природу, тем не менее подчиняются общим закономерностям. Их распространение описывается волновым уравнением, однако для волн в однородном пространстве оно несколько усложняется, в правой части появляется сумма вторых производных по трем координатам, носящая название оператор Лапласа $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \Delta U .$$

Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе. Волновой фронт – волновая поверхность, первой приходящая в невозмущенную область пространства. Волновых поверхностей можно построить бесконечное множество. Волновой фронт в каждый момент времени один. По форме волновой поверхности волны бывают плоские, сферические и цилиндрические.

Волновые поверхности плоской волны – параллельные плоскости, в этом случае характеристики волны определяются одной декартовой координатой, а уравнение плоской волны имеет вид

$$U(x, t) = A \sin(\omega t \pm kx) .$$

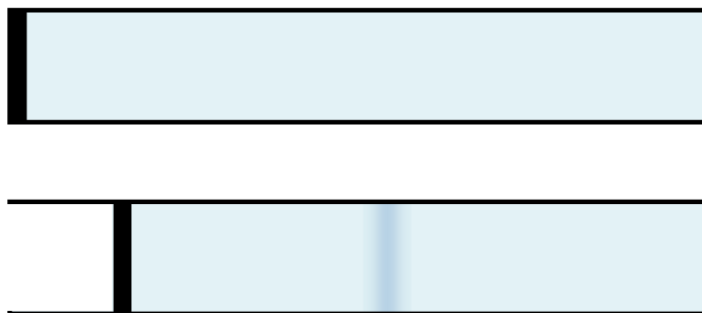


Рис. 41

Плоскими являются рассмотренные ранее волны на струне. Поршень, сместившийся в цилиндре с газом, создает зону повышенной плотности. Перемещающаяся вдоль цилиндра зона также является плоской волной, Рис. 41.

Волновые поверхности сферической волны – концентрические сферы. Уравнение сферической волны

$$U(r,t) = \frac{A}{r} \sin(\omega t \pm kr) .$$

Амплитуда сферической волны уменьшается по мере удаления от источника как r^{-1} . Это уменьшение амплитуды не связано с диссипативными процессами. Оно называется геометрическим расхождением, энергия, излученная источником, распределяется по все большей и большей волновой поверхности.

Смещение колеблющейся струны происходит перпендикулярно (поперек) направлению распространения волны. Оно искажает форму струны. Такие волны называются поперечными. Если же смещение точек среды происходит вдоль направления распространения волны, то такие волны называются продольными. Вдоль направления распространения волны в среде возникают уплотнения и разрежение. Характер движения частиц среды в продольной и поперечной волне приведен на Рис. 42.

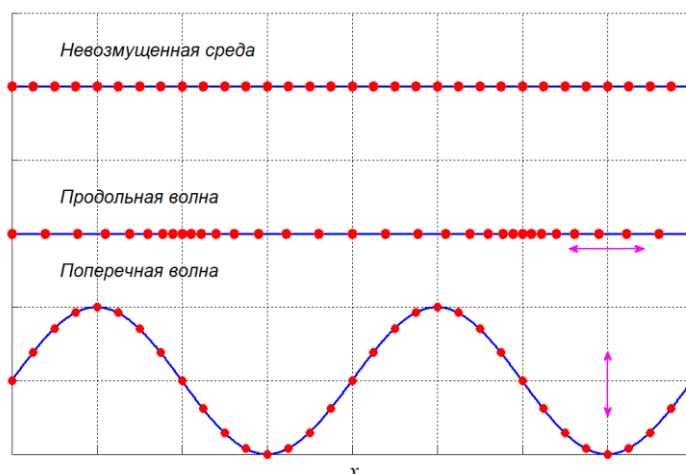


Рис. 42

Продольные волны в сплошных средах есть распространяющиеся в ней колебания плотности среды. Поперечные волны не распространяются в жидкостях и газах, а существуют лишь в твердых телах и струнах.

Упругие волны не переносят массу. Распространяясь, волна заставляет частицы среды совершать колебательные движения, но при этом поступательное движение в направлении движения волны отсутствует.

Звуковые волны – это колебания плотности среды, частоты которых лежат в диапазоне 20 Гц – 20 кГц. Инфразвуковыми волнами называются волны, частота которых меньше, чем 20 Гц, а ультразвуковыми – чья частота превышает 20 кГц.

Скорость звука в воздухе составляет ~330 м/с. В воде скорость звука 1500 м/с, а в железе почти 6000 м/с. Общее правило следующее: чем больше плотность, тем больше скорость.

Исследование закономерностей распространений сейсмических волн (упругих волн с частотой 5—250 Гц) в толще Земли позволили установить ее строение. Источник, а это может быть как рукотворный взрыв на поверхности Земли, так и землетрясение, порождает волны. Продольные волны от такого источника регистрируются на всей поверхности Земли, а вот поперечные лишь на ее части. Схема распространения поперечных волн в толще Земли приведена на Рис. 43. Значительная по размеру зона тени образуется вследствие экранирования оболочкой ядра. Наличие такой зоны считается доказательством того, что ядро имеет жидкую оболочку, состоящую из расплавленного железа и никеля.

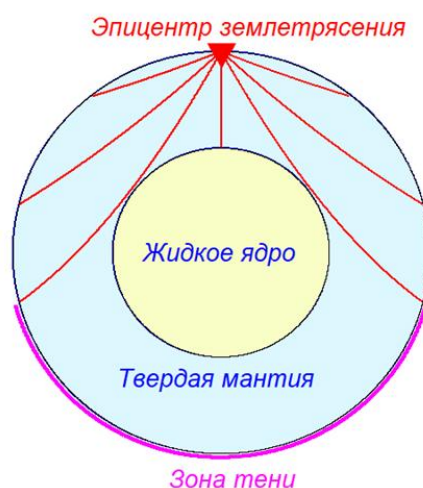


Рис. 43

Использование сейсмических волн позволяет не только «заглянуть» в самую сердцевину земного шара, но и решать прикладные задачи по разведке месторождений полезных ископаемых.

Аналогичная технология применяется и в совершенно иной области человеческой деятельности. Системы медицинской ультразвуковой диагностики позволяют изучать строение внутренних органов человека и животных, не подвергая их никакой опасности. Современные ультразвуковые аппараты используют частоты колебаний от 2 до 10 МГц.

Любая среда, в том числе и ткани организма, обладает различным акустическим сопротивлением, величина которого зависит от их плотности и скорости волн. На границе двух сред с различным акустическим сопротивлением упругие волны отражаются. Регистрируя отраженные волны от внутренних границ, можно установить глубину их залегания и построить изображение внутренних органов, Рис. 44 (Источник *Wikimedia Commons*).

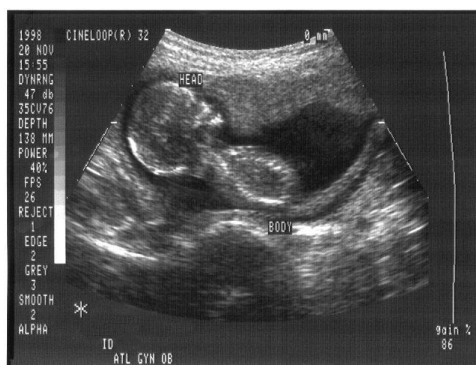


Рис. 44

Приведенные примеры, иллюстрирующие применение волновых процессов, лишь малая часть того, что используется в науке и технике. Значимость изучения физических основ этих процессов трудно переоценить.

20. Звуковые волны

Диапазон частот колебаний плотности среды 20 Гц – 20 кГц, ограничивающий звуковые волны, определяется не физическими причинами, а физиологическими особенностями органов слуха человека. Принципиальных различий между звуковыми, ультразвуковыми и инфразвуковыми волнами не существует. У многих животных слуховой диапазон гораздо шире. Так дельфин способен воспринимать частоты звуковых колебаний до 150 кГц.

Звуковые волны создаются вибрацией некоторого объекта в воздухе. Это может быть, например, струна и корпус музыкального инструмента или голосовые связки речевого аппарата человека. Плотность и давление окружающего воздуха локально изменяется. Области сжатия и разрежения, распространяясь, достигают органов слуха человека. Там механические колебания преобразуются в электрические, которые передаются в мозг для обработки и анализа.

Изменение давления при распространении звуковой волны в газе происходит существенно быстрее, чем сопутствующий этому процессу процесс теплообмена. Лаплас, предположив, что процесс сжатия – разрежения газа в звуковой волне можно считать адиабатическим, рассчитал скорость звука в газе. Согласно его расчетам, если γ – показатель адиабаты, μ – молярная масса, а T – термодинамическая температура

$$V_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}.$$

Для воздуха, полагая $\gamma = 1.4$, а $\mu = 29 \text{ г/моль}$ при нормальных условиях получаем

$$V_{зв} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.4 \cdot 8.31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}) \cdot 273 \text{ К}}{29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}}} \approx 331 \text{ м/с},$$

что хорошо согласуется с опытными данными.

Физиологические особенности человека делают восприятие им звука весьма субъективным. Громкость звука, его высота и тембр – базовые характеристики

звука, воспринимаемые человеком и позволяющие ему идентифицировать звуки. Субъективным характеристикам звука можно сопоставить точные количественные характеристики.

Восприятие человеком громкости звука базируется на его интенсивности. Интенсивность (сила звука) – средняя по времени энергия, переносимая через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения звуковой волны. Единица измерения в СИ – [Вт/м²].

Минимальное значение интенсивности звуковых волн, воспринимаемых человеком, называется порогом слышимости. Порог слышимости зависит от частоты и на частоте 1 кГц, составляет $\sim 10^{-12}$ Вт/м². Болевые ощущения возникают, если интенсивность звуковых волны достигает ~ 10 Вт/м². Такая интенсивность называется болевым порогом.

Порог слышимости и болевой порог определяют весьма широкий диапазон громкости звуков, воспринимаемых человеком. В такой ситуации удобно использовать логарифмическую шкалу, которая дает более наглядное представление величины, изменяющейся в очень широких пределах.

Уровень интенсивности звука определяется как

$$D = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}, \text{ где } I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2.$$

Измеряется уровень интенсивности в децибелах, дБ. Тогда порогу слышимости соответствует уровень интенсивности 0 дБ, а болевому порогу – 130 дБ. Уровень интенсивности звука 30 дБ означает, что интенсивность звука в 1000 раз превышает порог слышимости. Уровень интенсивности звука тиканья часов или шелеста бумаги – 30 дБ, обычного разговора – 60 дБ, работающего пневматического молотка – 90 дБ.

Гармоническая звуковая волна называется чистым тоном. Слуховые субъективные ощущения человека, возникающие при прослушивании чистых тонов и позволяющие различать звуки, называется высотой звука. Высота чистого тона определяется его частотой. Высокий тон – звуки высокой частоты, низкий – звуки низкой частоты.

Высота звука сложного спектрального состава зависит от распределения энергии по частотам. Так струна музыкального инструмента излучает целый спектр волн с кратными частотами. Наряду с основным тоном, вносящим самый существенный вклад в восприятие высоты звука, присутствуют обертоны, задающие индивидуальную «окраску» звучания.

Сложный, субъективно ощущаемый параметр, позволяющий отличить звучание скрипки от звучания гитары, называется тембром. На Рис. 45 показаны спектры звуковых волн различного происхождения. По оси ординат отложены относительные интенсивности гармоник спектра, а на оси абсцисс – частоты.

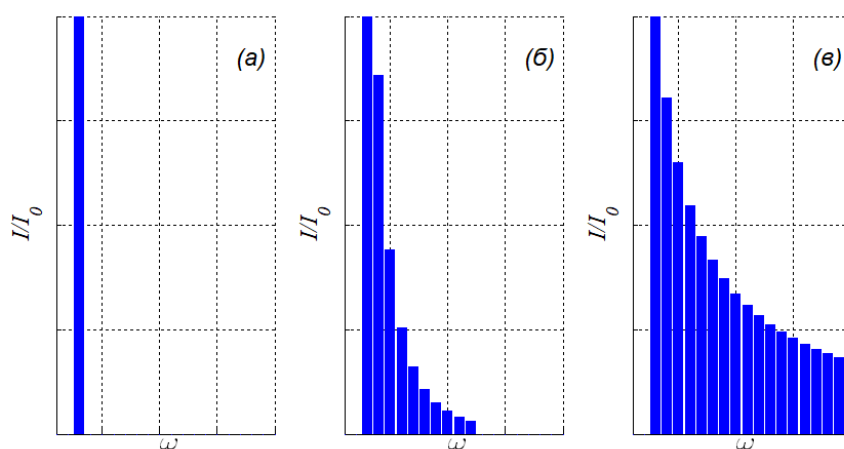


Рис. 45

Вариант (а) – это чистый тон, издаваемый камертоном или звуковым генератором. Линеичатый спектр колебаний струны музыкального инструмента включает основной тон и набор обертонов кратной частоты. Количество и амплитуда обертонов зависят от материала струны, способа воздействия на нее, силы натяжения, корпуса музыкального инструмента (резонатора) и целого ряда других параметров. Основной тон вариантов (б) и (в) совпадает с чистым тоном, издаваемым камертоном, но спектры различаются структурой обертонов. Субъективно звучание различается «окраской» – тембром. Тембр звучания варианта (в) богаче и шире, чем тембр варианта (б).

21. Эффект Доплера

Если источник волн движется относительно неподвижного наблюдателя, то регистрируемая им картина отличается от той, которая наблюдается в случае неподвижного источника. Пусть два неподвижных наблюдателя и движущийся источник волн расположены, как показано на Рис. 46.

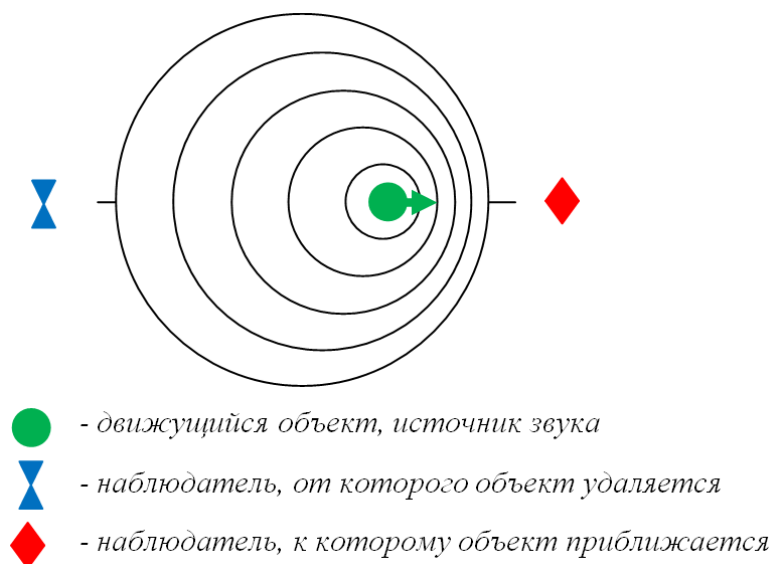


Рис. 46

Источник волн, двигаясь в направлении наблюдателя, догоняет испущенный ранее гребень волны. Расстояние между гребнями, которое регистрирует наблюдатель, уменьшится. А это означает, что длина регистрируемой волны уменьшается. Такое уменьшение эквивалентно увеличению частоты регистрируемой волны.

Для наблюдателя, от которого источник удаляется, картина обратная. Удаление источника от испущенного гребня приводит к разрежению гребней. Такой наблюдатель регистрирует уменьшение частоты волны.

Изменение частоты волны, воспринимаемое наблюдателем, вследствие движения источника относительно наблюдателя называется эффектом Доплера.

Пусть неподвижный источник испускает волны, частота которых – ν , а скорость распространения в среде c . Тогда длина волны $\lambda = cT$, где $T = 1/\nu$ – период колебаний. Для наблюдателя расстояние между приходящими гребнями равняется длине волны, как показано в верхней части на Рис. 47.

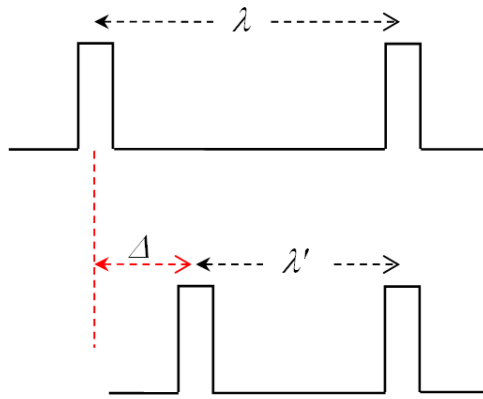


Рис. 47

Если источник движется к наблюдателю со скоростью u , то перед тем, как испустить следующий гребень, источник пройдет расстояние равное $\Delta = uT$. Тогда расстояние между соседними гребнями $\lambda' = \lambda - \Delta$ или же $\lambda' = T(c - u)$. Поскольку наблюдатель регистрирует волновой процесс, параметры которого $\lambda' \nu' = c$, то наблюдаемая частота возрастает

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \nu \frac{c}{c - u}.$$

Аналогичный расчет для наблюдателя, от которого источник удаляется, показывает, что наблюдаемая частота уменьшается

$$\nu' = \nu \frac{c}{c + u}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда источник неподвижен, а наблюдатель движется. Пусть наблюдатель приближается к источнику со скоростью u . Скорость распространения волны относительно наблюдателя изменится, в этом случае она станет равной $c + u$. Если наблюдатель удаляется от источника, то скорость распространения волны – $c - u$. Тогда регистрируемая наблюдателем частота

$$\nu' = \frac{c \pm u}{\lambda} = \nu \frac{c \pm u}{c}.$$

Обобщая результаты анализа, запишем выражение для частоты, регистрируемой наблюдателем. Пусть u_r – скорость наблюдателя, u_s – скорость источника, тогда

$$v' = v \frac{c \pm u_r}{c \mp u_s}$$

Верхний знак берется, когда наблюдатель и источник сближаются, нижний, когда удаляются.

Эффект Доплера нашел широкое применение в технических приложениях. Сонар (гидролокатор) – устройство для обнаружения в воде объектов посредством отраженных звуковых волны. При этом сонар не только локализует объект (подводную лодку, дрон, аквалангиста), но и измеряет его скорость. С помощью эффекта Доплера бесконтактно измеряют скорость потока жидкости и газа. Бесконтактно – не размещая датчик непосредственно в потоке. Преимущество бесконтактного метода особенно актуально в медицине при исследовании кровотока.

22. *Сонар*

Сонар (гидролокатор) – устройство для обнаружения объектов в воде посредством отраженных звуковых волны. SONAR от англ. SOund NAvigation and Ranging (звуковая навигация и дальность).

Раздел акустики, изучающий излучение, приём и распространение звуковых волн в водной среде называется гидроакустика. Разработано множество устройств, функциональные возможности которых основаны на законах гидроакустики: эхолот, эхоледомер, шумопеленгаторная станция, гидроакустический буй, гидроакустический телефон. Однако в этом человек следует за природой. Дельфины, киты, летучие мыши в процессе эволюции обрели возможность использовать звук для общения и обнаружения объектов.

Общий принцип работы сонара иллюстрирует Рис. 48.

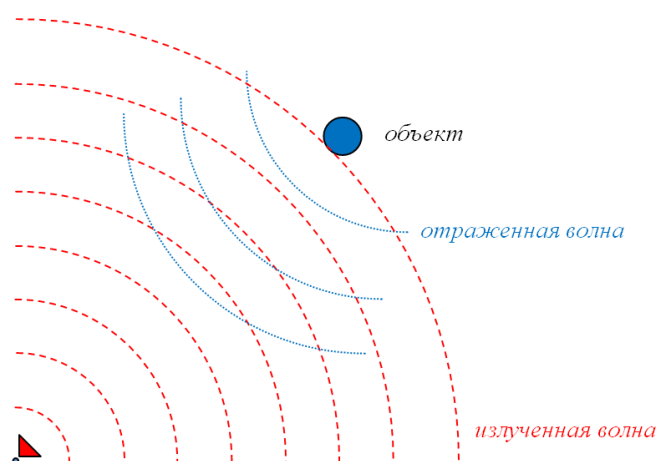


Рис. 48

Излучать гармонические волны при работе сонара не самая разумная идея. Излучаемый сигнал будет мешать регистрации слабого эхо-сигнала. Поэтому сонар последовательно переходит из режима излучения в режим приема и излучает последовательность импульсов (пингов). Между пингами есть временной промежуток, во время которого сонар слушает эхо. Пинг похож на ограниченную синусоиду, но синусоидой не является. Это волновой пакет, который состоит из суммы гармонических сигналов.

Характерный пинг сонара подводной лодки приведен на Рис. 49, а прослушать его можно по [ссылке](#).

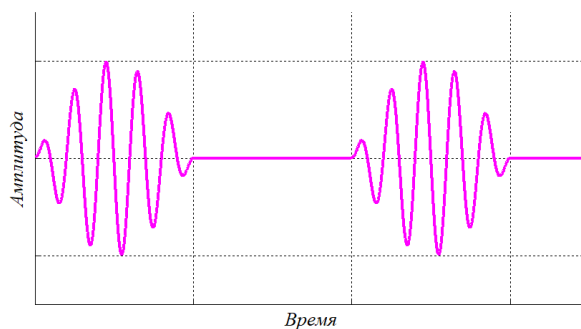


Рис. 49

Передающая антенна сонара излучает импульс с частотой от 14 до 22 кГц. Импульс, достигая некоторого объекта в толще воды, отражается и возвращается назад к сонару. Сонар же, ожидая возвращения импульса, переходит в пассивный режим. Длительность импульса должна быть короче времени, которое, как предполагается, будет затрачено на движение импульса от сонара к цели и обратно, иначе на приемнике результат будет суммироваться с исходящими волнами.

Поворачивая приёмопередатчик, можно определить направление, с которого приходит отраженный сигнал, а значит направление на цель. Временной интервал между пингом и эхом позволяет определить расстояние до обнаруженного объекта. Разумеется, для этого нужно знать скорость звука. Средняя скорость звука в воде – 1480 метров в секунду, граничные скорости – от 1450 до 1540 м/с. Скорость звука зависит от температуры, солености воды, давления.

Вызванное доплеровским сдвигом изменение частоты эхо-сигнала относительно исходного позволяет рассчитать скорость обнаруженного объекта.

23. Примеры решения задач

Математический маятник

Стальной шар массой 7.8 кг подвешен на стальной струне длиной 10 м. Шар отклонили на 1 м и отпустили. Определить параметры движения маятника.

Введем обозначения для параметров задачи. Пусть масса шара $m=7.8$ кг, длина струны $L=10$ м, отклонение шара $A=1$ м. На Рис. 50 изображен шар, отклоненный вправо. Не обозначенная на чертеже ось x направлена вправо. Положение шара однозначно определяет расстояние A , на которое его отклонили от положения равновесия. Также однозначно положение шара определяет высота, на которую при этом поднялся центр масс шара, и угол между струной и вертикалью. На чертеже они обозначены как h и α .

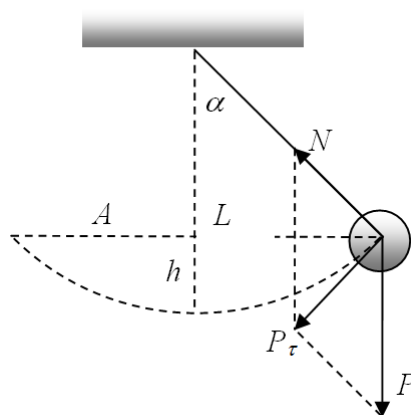


Рис. 50

Проанализируем геометрию задачи. Из чертежа следует, что $\sin \alpha = A/L = 1\text{ м}/10\text{ м} = 0.1$. Тогда угол $\alpha = \arcsin 0.1 \approx 0.100167$. Значения угла и синуса отличаются меньше, чем на 0.2%, т.е. $\sin \alpha \approx \alpha$. Выраженный в градусах угол $\alpha \approx 5.7^\circ$. Малым принято считать угол менее 10 градусов. Таким образом, можно считать, что струна отклонена на малый угол.

Из прямоугольного треугольника следует, что

$$h = L - \sqrt{L^2 - A^2} = L(1 - \sqrt{1 - b}), \quad b = (A/L)^2.$$

Разлагая полученную функцию в ряд Тейлора по малому параметру b , а он мал, поскольку $(A/L)^2 \ll 1$, получаем, что $\sqrt{1-b} \approx 1-b/2$, а высота, на которую подняли центр масс шара, $h \approx Lb/2 \approx A^2/2L$.

Плотность стали $\rho = 7.8 \text{ г/см}^3$. Поскольку объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а его масса $m = \rho V$, то радиус шара $R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7.8 \cdot 10^3 \text{ г}}{4\pi \cdot 7.8 \text{ г/см}^3}} \approx 10 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \text{ см} \approx 6.2 \text{ см}$.

Таким образом, выполняется условие $2R \ll L$, то есть размером шара в данной задаче можно пренебречь и считать его материальной точкой.

Пусть шар подвешен на третьей гитарной струне. Ее диаметр равен 0.4 мм, а радиус $r = 0.2 \text{ мм}$. Массу струны узнаем, умножив ее плотность на объем

$$m_s = \rho \pi r^2 L = 7.8 \text{ г/см}^3 \cdot \pi \cdot 0.02^2 \text{ см}^2 \cdot 1000 \text{ см} \approx 9.8 \text{ г}.$$

Поскольку $m_s \ll m$, то струну можно считать невесомой, а под действием указанной нагрузки и нерастяжимой.

Математический маятник – это материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити, совершающая малые колебания в однородном поле силы тяжести. Как показал проведенный анализ, описанная в условии задачи конструкция является математическим маятником.

На шар действует сила тяжести и сила натяжения нити. Их сумма отлична от нуля, поэтому отклоненный от положения равновесия шар начинает двигаться.

Это движение, являясь по сути гармоническим колебанием, описывается выражением

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) .$$

Начальную фазу φ_0 можно найти из начальных условий. Положение маятника в начальный момент времени определяется условием $x(0) = A$, тогда $\varphi_0 = \pi/2$.

Собственная частота и период математического маятника определяются выражениями

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{9.81 \text{ м/с}^2}{10 \text{ м}}} \approx 0.98 \text{ с}^{-1}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 6.41 \text{ с}.$$

Скорость маятника, а она есть производная по времени от смещения, также изменяется по гармоническому закону

$$x'(t) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

С максимальной скоростью маятник движется в момент времени $t = T/4$. В этот момент маятник проходит положение равновесия. Максимальная скорость составляет

$$x'\left(\frac{T}{4}\right) = \omega_0 A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\omega_0 A \approx -0.98 \text{ с}^{-1} \cdot 10 \text{ м} \approx -9.8 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Возвращающая сила $\vec{P}_\tau = \vec{P} + \vec{N}$, согласно второму закону Ньютона равняется произведению массы на ускорение $P_\tau = mx''$. Ускорение – вторая производная по времени от смещения

$$x''(t) = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Тогда максимальное значение возвращающей силы

$$P_\tau^{\max} = m\omega_0^2 A \approx 7.8 \text{ кг} \cdot 0.98^2 \text{ с}^{-2} \cdot 0.1 \text{ м} \approx 0.75 \text{ Н}.$$

Разберемся с энергией маятника. Максимальное значение потенциальной энергии маятника достигается в крайне правом и левом положении маятника. Тогда

$$U_{\max} = mgh \approx \frac{mgA^2}{2L} \approx \frac{7.8 \text{ кг} \cdot 9.81 \text{ м/с}^2 \cdot 1 \text{ м}^2}{2 \cdot 10 \text{ м}} \approx 3.8 \text{ Дж}.$$

Поскольку максимальная скорость маятника $V_{\max} = x'(T/4)$, то

$$T_{\max} = \frac{mV_{\max}^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2} = \frac{mgA^2}{2L}.$$

Заметим, что $T_{\max} = U_{\max}$. Этот результат закономерен. В консервативной системе полная механическая энергия сохраняется и в начальный момент времени, когда кинетическая энергия равна нулю, потенциальная максимальна и равной полной. Через четверть периода потенциальная энергия обнулится, а кинетическая достигнет максимального значения и станет равной полной.

Физический маятник

Найти период колебаний диска, имеющего отверстие. Ось колебаний перпендикулярна плоскости диска и проходит через точку O , Рис. 51. Радиус диска 50 см, радиус отверстия 25 см.

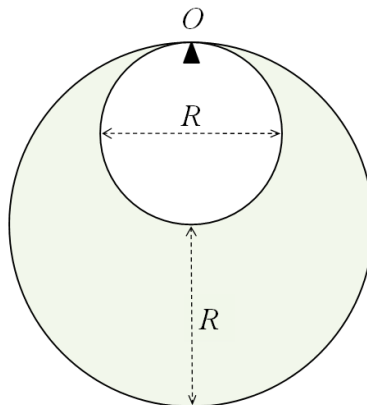


Рис. 51

Физический маятник – это твёрдое тело, совершающее колебания относительно горизонтальной неподвижной оси, не проходящей через центр масс. Приведенная на Рис. 51 конструкция фактически является физическим маятником.

Радиус отверстия в два раза меньше чем радиус диска, который обозначим как R . Горизонтальная ось ортогональна плоскости рисунка и проходит через точку O . Если отклонить такую конструкцию на малый угол (меньше 10°) и отпустить, то маятник будет совершать гармонические колебания. Период гармонических колебаний не зависит от амплитуды.

Собственная частота колебаний физического маятника определяется его массой m , ускорением свободного падения g , расстоянием между центром масс и точкой подвеса L и моментом инерции J . Период и собственная частота связаны следующим образом.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{mgL}{J}.$$

Ни один из этих параметров, кроме ускорения свободного падения, нам неизвестен и требует расчёта.

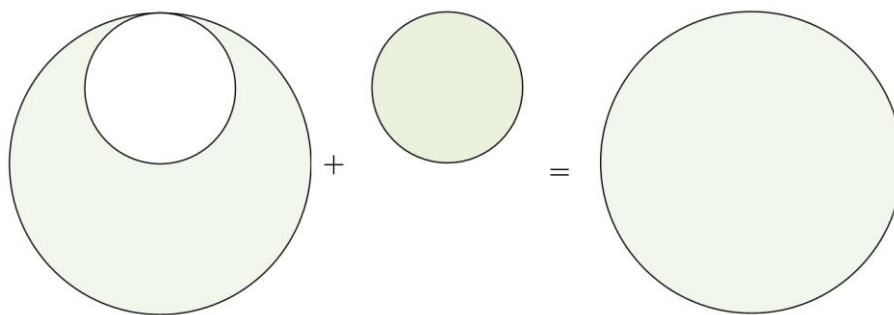


Рис. 52

Дополним диск с отверстием малым диском, радиус которого $R/2$, поместив его в отверстие. В результате получится сплошной диск. Схематично эта операция изображена на Рис. 52.

Пусть масса большого сплошного диска m_0 , масса малого m_1 , а масса диска с отверстием m . Тогда, поскольку масса аддитивна, $m_0 = m + m_1$.

Полагаем, что диски однородны и сделаны из одного и того же материала. Если ρ – поверхностная плотность материала (масса единицы поверхности), то

$$m_0 = \rho\pi R^2, \quad m_1 = \frac{1}{4}\rho\pi R^2, \quad \text{а} \quad m_0/m_1 = 4.$$

Момент инерции также аддитивен. Поэтому момент инерции большого диска складывается из момента инерции маятника и момента инерции малого диска $J_0 = J + J_1$, но аддитивность момента инерции сложнее, чем аддитивность массы. Если масса – это свойство, присущее телу, то момент инерции определяется не только свойствами тела (массой, формой и размерами), но и положением оси.

Поэтому моменты инерции тел, составляющих систему, должны быть пересчитаны относительно одной (общей) оси. Это позволяет сделать теорема Штейнера, которая гласит, что момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси есть сумма момента инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс, и произведения массы на квадрат расстояния между осями.

$$J = J_c + ma^2$$

Момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр масс, равен $J = mR^2/2$. Центр масс большого диска смещен относительно точки O на R , а малого на $R/2$. Тогда момент инерции большого диска относительно оси маятника

$$J_0 = \frac{1}{2}m_0R^2 + m_0R^2 = \frac{3}{2}m_0R^2 ,$$

а малого

$$J_1 = \frac{1}{2}m_1 \frac{R^2}{4} + m_1 \frac{R^2}{4} = \frac{3}{8}m_1R^2 .$$

Рассчитаем отношение массы и момента инерции физического маятника. Поскольку момент инерции физического маятника $J = J_0 - J_1$, а его масса $m = m_0 - m_1$, то

$$\frac{m}{J} = \frac{m_0 - m_1}{\frac{3}{2}m_0R^2 - \frac{3}{8}m_1R^2} = \frac{8(m_0/m_1 - 1)}{3R^2(4m_0/m_1 - 1)} = \frac{8}{15R^2}$$

Остаётся определить последний неизвестный параметр – расстояние от центра масс маятника до точки подвеса, обозначенной как O .

Радиус-вектор центра масс твердого тела определяет интеграл по объему тела

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \rho(\vec{r}) \cdot \vec{r} dV .$$

Однако прямое вычисление интеграла в нашем случае не самая простая задача.

Весьма полезными при расчете центра масс являются следующие утверждения: если тело имеет центр симметрии, то центр масс расположен в центре симметрии; если тело имеет ось симметрии, то центр масс расположен на этой оси; если имеется система тел, то нужно найти центр масс каждого тела, поместить в найденные центры масс материальные точки с массами, равными массам соответствующих тел, а потом найти центр масс системы материальных точек.

Воспользуемся последним утверждением. Заменяем большой и малый диски материальными точками, расположенными в их центрах. Центр масс системы материальных точек – это воображаемая точка, положение которой определяется выражением

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{m} .$$

Масса маятника $m = m_0 - m_1$, что можно трактовать следующим образом: система состоит из двух материальных точек, при этом масса одной из них отрицательная. Разумеется, это всего лишь математический прием.

Центр масс всей конструкции расположен на оси симметрии, поэтому для расчета достаточно одной координатной оси. Начало координат разместим в центре большого диска, а ось x направим к точке O .

Тогда

$$x_c = \frac{m_0 \cdot 0 - m_1 \cdot R/2}{m_0 - m_1} = \frac{1}{-m_0/m_1 + 1} \cdot \frac{R}{2} = \frac{1}{-4 + 1} \cdot \frac{R}{2} = -\frac{R}{6}$$

Знак минус говорит о том, что центр масс конструкции смещен вниз по отношению к центру масс большого диска.

Рассмотрим еще один способ нахождения центра масс. Обратимся к понятию центра тяжести. Центром тяжести называется точка, относительно которой суммарный момент сил тяжести, действующих на систему, равен нулю. В однородном поле силы тяжести центр масс и центр тяжести совпадают.

Развернём конструкцию на 90° . И закрепим две материальные точки массой m_0 и m_1 на невесомом стержне. Расстояние между материальными точками $R/2$. Слева от материальной точки с массой m_0 на расстоянии x поместим опору. Если суммарный момент сил, действующих на стержень, равен нулю, то стержень находится в равновесии.

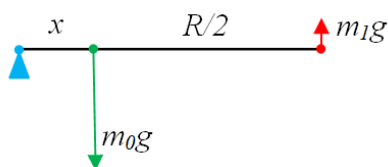


Рис. 53

Сила тяжести, приложенная к материальной точке с массой m_0 , направлена вертикально вниз, как показано на Рис. 53, а вот приложенная к материальной точке с массой m_1 , вверх. Ведь ее масса отрицательна. Рассчитаем моменты, умножая силу тяжести на соответствующее плечо. Тогда условие равновесия имеет вид

$$m_0 g x - m_1 g (x + R/2) = 0 \quad .$$

Разрешая уравнение, получаем, что

$$x = \frac{m_1 R}{2(m_0 - m_1)} = \frac{R}{2(m_0/m_1 - 1)} = \frac{R}{2(4 - 1)} = \frac{R}{6}.$$

Разумеется, результат совпал с полученным ранее.

Расстояние от центра масс физического маятника до оси складывается из найденного расстояния x и радиуса большого диска $L = x + R = 7R/6$.

Все параметры, необходимые для расчета собственной частоты, найдены, перейдем к заключительному этапу. Расчет дает следующее значение

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{J} = \frac{8g}{15R^2} \frac{7}{6} R = \frac{28}{45} \frac{g}{R}, \quad \omega_0^2 = \frac{28}{45} \frac{9.81 \text{ м/с}^2}{0.5 \text{ м}} = 12.2 \text{ с}^{-2},$$

Тогда собственная циклическая частота $\omega_0 \approx 3.5 \text{ с}^{-1}$, а период малых колебаний физического маятника $T \approx 2 \cdot \pi / 3.5 \text{ с} \approx 1.8 \text{ с}$.

Сложение перпендикулярных колебаний

Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = 2\sin(\pi t - \pi/2)$ и $y = \sin(\pi t)$. Построить траекторию движения. Определить направление движения точки.

Запишем уравнения движения в канонической форме, определив циклическую частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi_{0x}), \text{ где } A = 2, \varphi_{0x} = -\pi/2, \omega_0 = \pi,$$

$$y(t) = B \sin(\omega_0 t + \varphi_{0y}), \text{ где } B = 1, \varphi_{0y} = 0, \omega_0 = \pi.$$

Циклическая частота взаимно перпендикулярных колебаний совпадает в общем случае, как было показано ранее, траектория представлять собою эллипс.

Покажем это явным образом. С точки зрения механики уравнения колебаний – это кинематические уравнения, а траектория – это линия, которую движущаяся точка описывает в пространстве. Уравнение траектории получается исключением времени из кинематических уравнений.

Воспользуемся формулами приведения. Тогда

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t - \pi/2) = -A \cos(\omega_0 t),$$

Затем, возведя в квадрат и сложив

$$x/A = -\cos(\omega_0 t) \text{ и } y/B = \sin(\omega_0 t),$$

получаем, что уравнение траектории это – эллипс ориентированный полуосями вдоль осей координат, Рис. 54

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1.$$

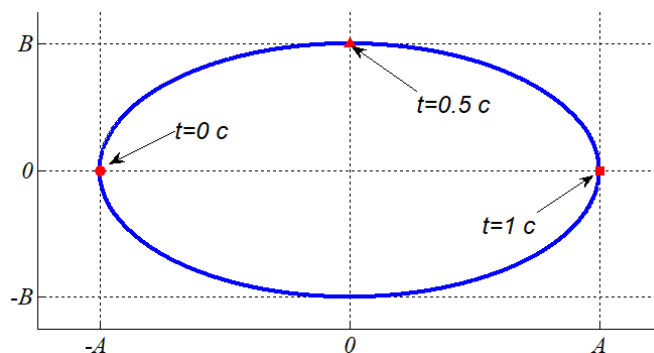


Рис. 54

Определим направление движения. Начнем с ответа на простой вопрос. Откуда движение началось? Ответ очевиден из точки с координатами

$$x(0) = -2, \quad y(0) = 0 .$$

Она помечена на Рис. 54 круглым маркером. Для установления направления движения нужно определить, где будет материальная точка в следующий момент времени. Но в какой конкретно момент времени? Произвола здесь быть не может. Возьмем, например, момент времени $t = 1 \text{ с}$. Координаты точки в этот момент – $x(1) = 2$ и $y(1) = 0$ соответственно (на Рис. 54 она помечена квадратным маркером), но оказаться там точка могла, двигаясь как по часовой стрелке, так и против нее. Абсолютное значение времени не позволяет однозначно судить о ситуации.

Однако, если взять время, равное (или меньшее) четверти периода, то ситуация будет вполне прозрачной. Период колебаний $T = 2\pi/\omega_0 = 2\text{с}$, тогда $\Delta t = T/4 = 0.5\text{с}$.

Положение точки определяют координаты $x(\Delta t) = 0$ и $y(\Delta t) = 1$ (на Рис. 54 она помечена треугольным маркером). Следовательно, материальная точка движется по часовой стрелке.

Затухающие колебания

К вертикально расположенной пружине прикрепили груз 100 г. Пружина растянулась на 4 см. Сместили груз еще на 3 см вниз и отпустили. После пяти колебаний смещение составило 1 см (в ту же сторону). Найти скорость при первом прохождении положения равновесия.

На Рис. 55 изображен маятник в трех различных состояниях. В крайнем левом положении изображена распложенная вертикально пружина, верхний конец которой закреплен. После того, как к нижнему концу пружины прикрепил груз массой m , она под действием силы тяжести растянулась. Удлинение пружины обозначим как x_1 . В крайнем правом положении изображена пружина после того, как груз дополнительно сместили вниз. Это удлинение обозначим как x_2 .

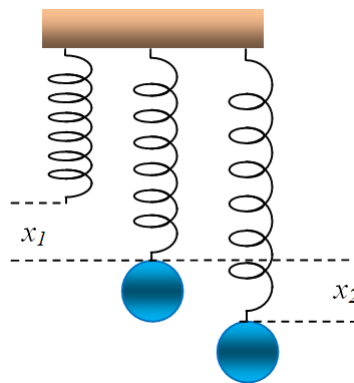


Рис. 55

Предоставленный самому себе пружинный маятник будет совершать колебания. Эти колебания будут затухающими. По условию задачи амплитуда колебаний уменьшается.

В среднем состоянии пружина находится в равновесии, обусловленном балансом силы тяжести и силой Гука

$$mg = kx_1 .$$

Это условие позволяет найти жесткость пружины

$$k = \frac{mg}{x_1} \approx \frac{10^{-1} \text{ кг} \cdot 9.8 \text{ м/с}^2}{4 \cdot 10^{-2} \text{ м}} \approx 25 \frac{\text{Н}}{\text{м}} .$$

Частота и период собственных колебаний такого маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25 \text{ Н/м}}{10^{-1} \text{ кг}}} \approx 16 \text{ с}^{-1}, T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 0.4 \text{ с}.$$

Наличие диссипативных сил приводит к тому, что колебания перестают быть гармоническими. Уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2.$$

Гармоническая функция модулируется экспонентой, а частота колебаний ω сдвинута относительно собственной частоты.

Запишем смещение маятника в начальный момент времени и через пять периодов. Они заданы условием задачи

$$x_2 = x(0) = A \sin(\varphi_0), \quad x_3 = x(5T) = Ae^{-\delta 5T} \sin(\omega 5T + \varphi_0).$$

Поскольку $\frac{x_2}{x_3} = \frac{3 \text{ см}}{1 \text{ см}} = 3$, то $\frac{x(0)}{x(5T)} = e^{\delta 5T} = 3$. Выразим коэффициент затухания

$$\delta = \frac{\ln 3}{5T} = \omega \frac{\ln 3}{10\pi} = \omega b, \quad \text{где } b = \frac{\ln 3}{10\pi} \approx 0.035.$$

Подставим найденное значение в выражение для частоты $\omega^2 = \omega_0^2 - (\omega b)^2$.

Тогда, используя разложение в ряд по малому параметру $b \ll 1$, получаем, что

$$\omega = \omega_0 (1 + b^2)^{-1/2} \approx \omega_0 (1 - b^2/2).$$

Продифференцировав смещение по времени, получим скорость

$$x'(t) = -\delta Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

В начальный момент времени маятник неподвижен, поэтому

$$x'(0) = -\delta A \sin(\varphi_0) + \omega A \cos(\varphi_0) = 0.$$

Отсюда следует, что $\text{tg}(\varphi_0) = \frac{\omega}{\delta} = \frac{1}{b}$, но тогда начальная фаза колебаний

$$\varphi_0 = \arctan\left(\frac{10\pi}{\ln 3}\right) \approx 88^\circ.$$

Теперь, когда параметры движения вычислены, можно построить, Рис. 56, графики зависимостей смещения и скорости маятника от времени. Время на них нормировано на период собственных колебаний.

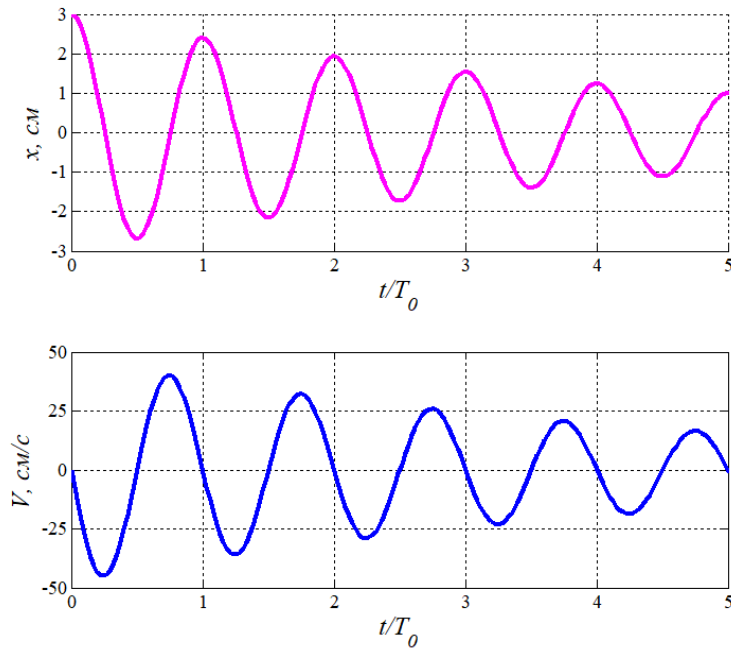


Рис. 56

Первому прохождению маятника положения равновесия соответствует момент времени $t = T/4$. Учтя, что $\omega T/4 = \pi/2$, получаем

$$x'(T/4) = Ae^{-\delta T/4} \left(-\delta \sin(\pi/2 + \varphi_0) + \omega \cos(\pi/2 + \varphi_0) \right).$$

Воспользуемся формулами приведения, тогда

$$x'(T/4) = Ae^{-\delta T/4} \left(-\delta \cos(\varphi_0) - \omega \sin(\varphi_0) \right).$$

Преобразуем это выражение к виду

$$x'(T/4) = -Ae^{-\delta T/4} \omega \sin(\varphi_0) \left(1 + \frac{\delta \cos(\varphi_0)}{\omega \sin(\varphi_0)} \right) = -Ae^{-\delta T/4} \omega \sin(\varphi_0) \left(1 + \left(\frac{\delta}{\omega} \right)^2 \right).$$

Замечаем, что $\omega = \omega_0(1 - b^2/2)$, а $\delta/\omega = b$. Тогда

$$x'(T/4) = -e^{-\delta T/4} x_2 \omega_0 (1 - b^2/2) (1 + b^2).$$

Поскольку $b \ll 1$, то слагаемыми $\sim b^4$ можно пренебречь, тогда

$$x'(T/4) \approx -e^{-\delta T/4} x_2 \omega_0 (1 + b^2/2).$$

Если $e^{5\delta T} = 3$, то $e^{-\frac{\delta T}{4}} = 3^{-\frac{1}{20}} \approx 0.95$ и окончательно получаем искомую скорость

$$x'(T/4) \approx 0.95 \cdot 3 \text{ см} \cdot 16 \text{ Гц} \cdot (1 + 0.035^2/2) \approx 46 \text{ см/с}$$

Сонар

Условие задачи. Гидроакустическая станция испускает импульсы частотой 30 кГц. Отраженный сигнал приходит через 2 секунды. Частота отраженного сигнала 30.2 кГц. На каком расстоянии находится объект? Приближается или удаляется объект? Какова его скорость?

Пусть L – расстояние от станции до объекта. Если скорость ультразвука в воде $c=1500$ м/с, то отраженный пинг достигнет станции через время $\Delta t = 2L/c$. Тогда $L = c \cdot \Delta t / 2 = 1500 \text{ м/с} \cdot 2 \text{ с} / 2 = 1500 \text{ м}$.

Для любого волнового процесса справедливо $\lambda \nu = c$. Тогда длина волны излучения станции составляет $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{1500 \text{ м/с}}{30 \cdot 10^3 \text{ Гц}} = 5 \text{ см}$, что позволяет идентифицировать малоразмерные цели, такие как подводный дрон или аквалангист.

Объект движется, поэтому происходит изменение частоты эхо-сигнала, обусловленное доплеровским сдвигом. Если объект (источник эхо-сигнала) приближается к наблюдателю (станции), то частота ν увеличивается до ν' . Величина доплеровского сдвига позволяет рассчитать скорость объекта u .

$$\nu' = \frac{c}{\lambda'} = \nu \frac{c}{c - u} .$$

Тогда скорость объекта

$$u = c \cdot \left(1 - \frac{\nu}{\nu'} \right) = 1500 \frac{\text{м}}{\text{с}} \left(1 - \frac{30}{30.2} \right) = 9.93 \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{9.93 \cdot 60 \cdot 60 \text{ км}}{1000 \text{ ч}} = 35.8 \frac{\text{км}}{\text{ч}} .$$

В мореходной и авиационной практике применяется внесистемная единица измерения скорости – узел. Один узел равен 1852 м/ч. Тогда объект движется со скоростью $u = 35.8 / 1.852 \text{ уз} \approx 19.3 \text{ уз}$.

24. Варианты задач для самостоятельного решения

Гармонические колебания

1. Точка совершает гармонические колебания. Максимальная скорость точки $V=10$ см/с, максимальное ускорение $a=100$ см/с². Найти циклическую частоту колебаний, их период и амплитуду. Написать уравнение колебаний.
2. Материальная точка массой $m=0,1$ г колеблется согласно уравнению $x=5 \sin 20t$ см. Определить максимальные значения возвращающей силы и кинетической энергии точки.
3. Написать уравнение гармонических колебаний материальной точки массой 52 г, если максимальная сила, действующая на точку равна 65 Н, период колебаний 4 сек и смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени 100 мм.
4. Материальная точка массой $m=0,05$ кг совершает гармонические колебания, уравнение которых имеет вид: $x=0,1 \sin 5t$ м. Найти силу, действующую на точку: 1) в момент, когда фаза колебаний $\varphi=30^\circ$; 2) в положении наибольшего отклонения точки.
5. Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, достигла $1/5$ максимальной. Каково отношение потенциальной энергии точки к полной энергии в этот момент времени?
6. Груз массой 2 г, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A=10$ см. Определить жесткость пружины, если известно, что максимальное ускорение груза составляет $0,5$ м/с².
7. Материальная точка массой $m=20$ г совершает гармонические колебания по закону $x=0,1 \cos(4\pi t + \pi/4)$ м. Определить полную энергию и максимальное ускорение точки.
8. При смещении точки от положения равновесия, равном 2,5 см, скорость точки равна 4 см/с, а при смещении, равном 3,8 см, скорость равна 2 см/с. Найти амплитуду и период этого колебания. Начальная фаза гармонического колебания равна нулю.

9. Полная энергия гармонически колеблющейся точки равна 10 мкДж , а максимальная сила, действующая на точку, равна $-0,5 \text{ мН}$. Написать уравнение движения этой точки, если период колебаний равен 4 с , а начальная фаза $-\pi/6$.
10. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu=1 \text{ Гц}$, в момент времени $t=0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0=5 \text{ см}$, со скоростью $V_0=15 \text{ см/с}$. Определить амплитуду колебаний.

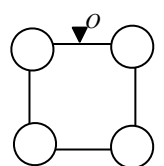
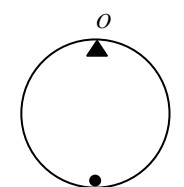
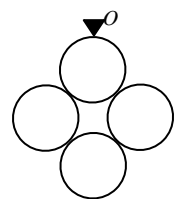
Сложение колебаний

1. Точка одновременно совершает два гармонических колебания, происходящих по взаимно перпендикулярным направлениям и выражаемых уравнениями $x=0,5 \sin t \text{ см}$ и $y=2 \cos t \text{ см}$. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже; показать направление движения.
2. Материальная точка участвует в двух колебаниях, происходящих по одной прямой и выражаемых уравнениями $x_1=\cos t \text{ см}$ и $x_2=2 \sin t \text{ см}$. Найти амплитуду A результирующего колебания, его частоту ν и начальную фазу φ . Написать уравнение движения.
3. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=0,02 \sin(5\pi t + \pi/2) \text{ м}$ и $x_2=0,03 \sin(5\pi t + \pi/4) \text{ м}$.
4. В результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковыми амплитудами и одинаковыми периодами получается результирующее колебание с тем же периодом и той же амплитудой. Найти разность фаз складываемых колебаний.
5. Колебание дано в виде уравнения $x=A \sin(2\pi\nu_1 t)$, при этом амплитуда A изменяется со временем по закону $A=A_0(1+\cos(2\pi\nu_2 t))$. Здесь $A_0=\text{const}$. Из каких гармонических колебаний состоит данное колебание? Построить график составляющих и результирующего колебаний для случая $A_0=4 \text{ см}$, $\nu_1=1 \text{ с}^{-1}$, $\nu_2=0,1 \text{ с}^{-1}$.

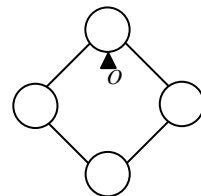
6. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравнением вида $x=A\cos(t)\cos(45t)$ (t в секундах). Определить: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующих колебаний.
7. Складываются два гармонических колебания одного направления, имеющие одинаковые амплитуды и одинаковые начальные фазы, с периодами $T_1=2$ с и $T_2=2,02$ с. Определить период результирующего колебания и период биений.
8. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного сложением одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $x_1=4\sin(\pi t + \pi/2)$ м и $x_2=-\sin(\pi t + \pi)$ м. Написать уравнение результирующего колебания.
9. Написать уравнение результирующего колебания, получающегося в результате сложения двух взаимно-перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой $\nu_1=\nu_2=3$ с⁻¹ и с одинаковой начальной фазой $\varphi_1=\varphi_2=\pi/2$. Амплитуда одного из колебаний равна 0,15 м, амплитуда другого 0,1 м.
10. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями $x_1=5\sin(\pi t + \pi/3)$ м и $x_2=3\sin(\pi t + \pi/5)$ м.

Физический маятник

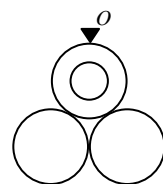
- 1 Физический маятник состоит из шаров. Центры шаров образуют квадрат. Радиус каждого шара $R=50$ см. Определить период колебаний относительно точки O .
- 2 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Радиус обруча $R=50$ см, масса $M=500$ г, масса материальной точки $m=350$ г.
- 3 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . В вершинах невесомого квадрата со стороной $L=100$ см закреплены диски радиусом $R=20$ см.



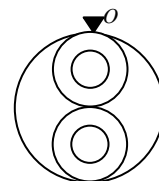
4 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . В вершинах невесомого квадрата со стороной $L=120$ см закреплены шары радиусом $R=25$ см.



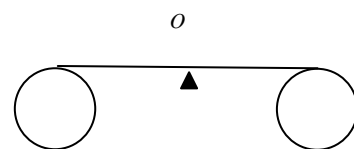
5 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Внешний радиус кольца $R=50$ см, внутренний – $r=25$ см, масса $M=500$ г. Радиус дисков $R_1=50$ см, масса каждого $M_1=500$ г. Центры кольца и дисков образуют равносторонний треугольник.



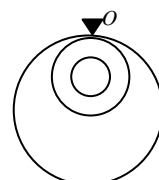
6 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Радиус обруча $R=1$ м, масса $M=500$ г. Внешний радиус кольца $R=50$ см, внутренний – $r=25$ см, масса $m=450$ г.



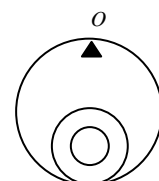
7 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Длина стержня $L=1$ м, масса $m=100$ г, радиус каждого обруча $R=30$ см, масса – $M=700$ г.



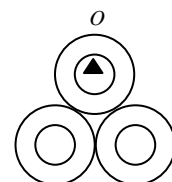
8 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Радиус обруча $R=1$ м, масса $M=500$ г. Внешний радиус кольца $R=50$ см, внутренний – $r=25$ см, масса $m=450$ г.



9 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Радиус обруча $R=1$ м, масса $M=500$ г. Внешний радиус кольца $R=50$ см, внутренний – $r=25$ см, масса $m=450$ г.



10 Определить период колебаний физического маятника относительно точки O . Внешний радиус колец $R=50$ см, внутренний – $r=25$ см, масса $M=500$ г. Центры колец лежат в вершинах равностороннего треугольника.



Затухающие колебания

1. Математический маятник длиной $1,5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 10 см, а при третьем (в ту же сторону) — на 8 см. Определить скорость маятника через одну минуту после начала колебаний.
2. Амплитуда затухающих колебаний равна 5 см, частота колебаний $\pi/2$ с⁻¹, коэффициент затухания $0,01$ с⁻¹. Найти скорость колеблющейся точки в моменты времени: $0, T, 2T, 3T$.
3. Математический маятник длиной $0,5$ м, выведенный из положения равновесия, отклонился при первом колебании на 5 см, а при втором (в ту же сторону) — на 4 см. Найти время релаксации, т. е. время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз, где e — основание натуральных логарифмов.
4. Логарифмический декремент затухания математического маятника равен $0,02$. Во сколько раз уменьшится амплитуда за десять колебаний маятника?
5. Удлинение вертикально висящей пружины с грузом составляет 12 см. Оттянув груз вниз и, отпустив его, заставляют маятник колебаться. При каком коэффициенте затухания через 15 секунд амплитуда колебаний составит 5% от первоначальной?
6. Удлинение в состоянии покоя вертикально висящей пружины с грузом составляет 8 см. Коэффициент жесткости пружины 20 Н/м. Под воздействием внешней гармонической силы с частотой 20 Гц груз колеблется с амплитудой 5 см. Определить амплитуду колебаний груза, если частота внешней силы уменьшится в два раза.
7. Удлинение вертикально висящей пружины с грузом в состоянии покоя составляет 8 см. Коэффициент жесткости пружины 15 Н/м. На груз действует внешняя гармоническая сила с частотой 3 Гц и амплитудой 25 Н. Определить амплитуду установившихся колебаний груза.

8. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 2 минуты уменьшилась в 3 раза. Определить, во сколько раз она уменьшится за 5 минут.
9. Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника 5 см. По истечении минуты амплитуда уменьшилась до 2 см. Определить, в какой момент времени амплитуда колебаний станет равной 0,5 см.
10. Тело массой 15 г совершает затухающие колебания. В течение минуты тело потеряло 40% своей энергии. Определить коэффициент сопротивления.

Волны

1. Какую длину должна иметь медная струна диаметром 0,1 мм, чтобы при натяжении в 10 кН она издавала звук с основным тоном 435 Гц.
2. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 10 см от источника колебаний, в момент времени $t=T/2$ равно $1/3$ амплитуды. Найти длину бегущей волны.
3. Определить скорость распространения волн в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на 10 см, равна 60° . Частота колебаний 25 Гц.
4. Колебания, имеющие частоту 500 Гц и амплитуду 0,2 мм, распространяются в среде. Длина бегущей волны 50 см. Найти: 1) скорость распространения колебаний, 2) максимальную скорость частиц среды.
5. Определить длину волны колебаний, если расстояние между первой и седьмой пучностями стоячей волны равно 33 см.
6. Натянутая платиновая струна издавала основной тон с частотой 350 Гц. Определить частоту основного тона стальной струны в тех же условиях.
7. Вдоль прямой со скоростью 350 м/с распространяется бегущая. Период колебаний – 0,02 с и. Спустя 30 с после возникновения колебаний на расстоянии 12 м от источника колебаний смещение оказалось равным 3 см. Определить в тот же момент времени смещение и фазу колебаний в точке, отстоящей от источника на 20 м.

8. Натянутую медную струну заменили серебряной. Диаметр струны и сила натяжения остались прежними. Во сколько раз нужно изменить длину струны, чтобы частота основного тона не изменилась?
9. Длина бегущей волны $0,56$ м, частота $0,5$ кГц. Как скоро после начала колебаний приемник, находящийся на расстоянии 2 км от источника, зарегистрирует колебания?
10. Платиновая струна длиной $0,5$ м и диаметром $0,05$ мм, натянута силой 25 кН. Определить частоту основного тона и третьей гармоники.