

# Магнитное поле

*Индуктивность контура.*

*Взаимная индукция.*

*Трансформатор.*

*Явление самоиндукции.*

*Переходные процессы в моменты включения  
и выключения электрической цепи.*

*Энергия магнитного поля.*

*Колебательный контур.*

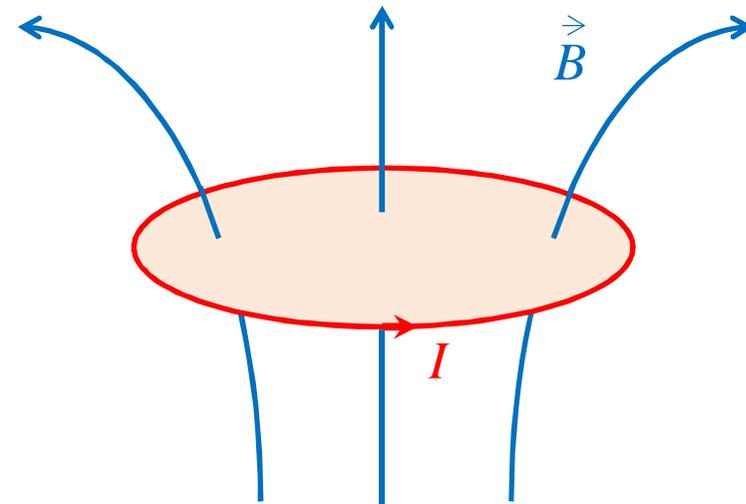
# Индуктивность контура

$$\Phi = \oint (\vec{B}, \vec{n}) dS$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [d\vec{l} \times \vec{r}]$$

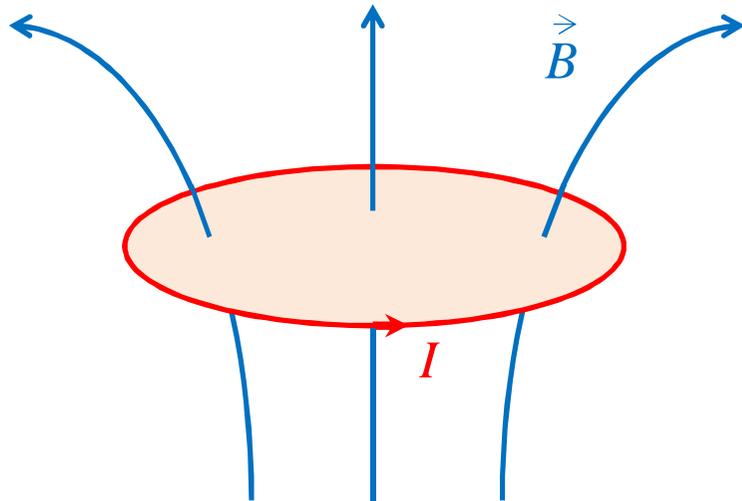
$$\Phi = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \oint \left( \oint \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \vec{n} \right) dS$$

$$L = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \oint \left( \oint \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \vec{n} \right) dS$$



$$\Phi = LI$$

# Индуктивность контура



$$\Phi = LI$$

Индуктивность контура равна магнитному потоку, сцепленному с ним, когда сила тока равна одному Амперу.

Индуктивность контура зависит от его геометрической формы и размеров, а также от свойств среды, в которой контур находится.

Единица измерения индуктивности - Генри,  $[Гн]=[Вб]/[А]$ .

# Индуктивность соленоида

Потокоцепление - суммарный магнитный поток, пронизывающий витки соленоида.

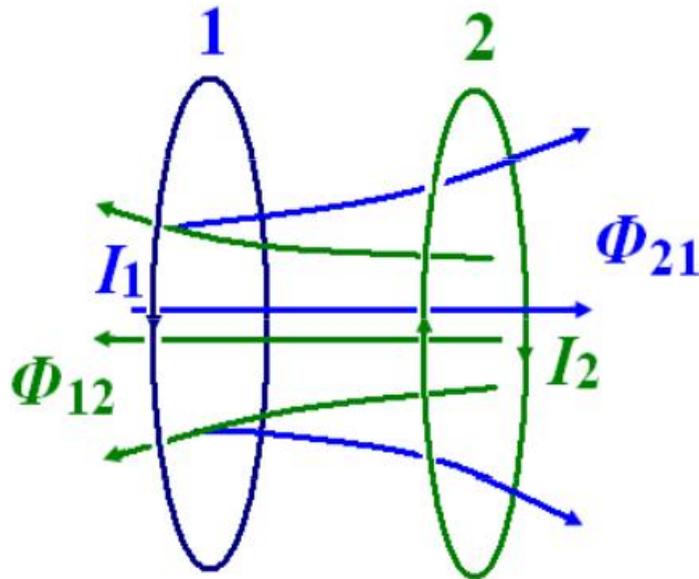
$$\Psi = N\Phi$$

$$\Psi = LI = NBS$$

$$B = \mu\mu_0 nI$$

$$L = \mu\mu_0 nNS = \mu\mu_0 n^2 V = \mu\mu_0 N^2 S/l$$

# Взаимная индуктивность



Между контуром 1 и контуром 2 имеется магнитная связь. Магнитная связь изменяется при сближении или удалении одного контура от другого, или же изменении их взаимного расположения.

Полный магнитный поток, пронизывающий каждый контур, складывается из магнитных потоков самоиндукции и взаимоиндукции.

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

# Взаимная индуктивность

$$\Phi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$\Phi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

$$L_{21} = L_{12}$$

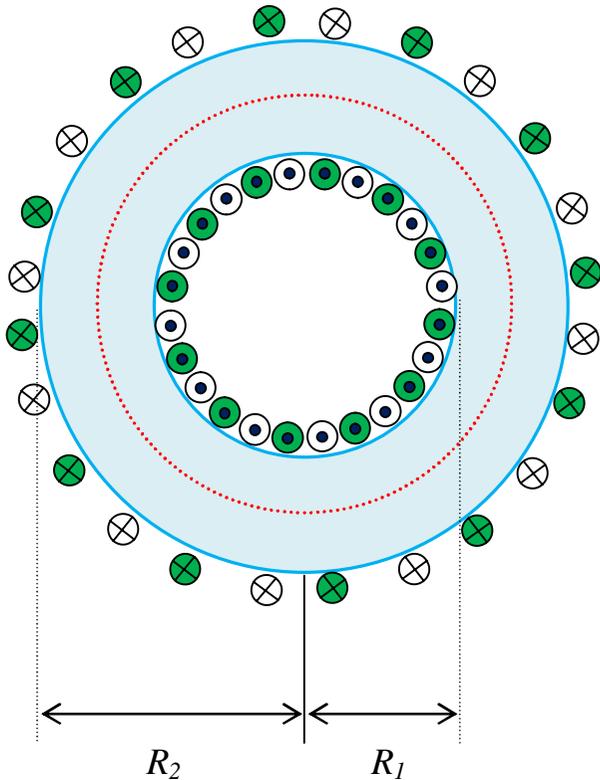
Взаимная индуктивность – величина, характеризующая магнитную связь контуров.

$$L_{21} = k\sqrt{L_1L_2}$$

*Коэффициент связи контуров*

$$0 < k < 1$$

# Взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на тороид



$$Bl = \mu_0 N_1 I_1$$

$$\Psi_2 = L_{21} I_1$$

$$\Psi_2 = N_2 BS = I_1 \mu_0 N_1 N_2 S/l$$

$$L_{21} = \mu_0 N_1 N_2 S/l$$

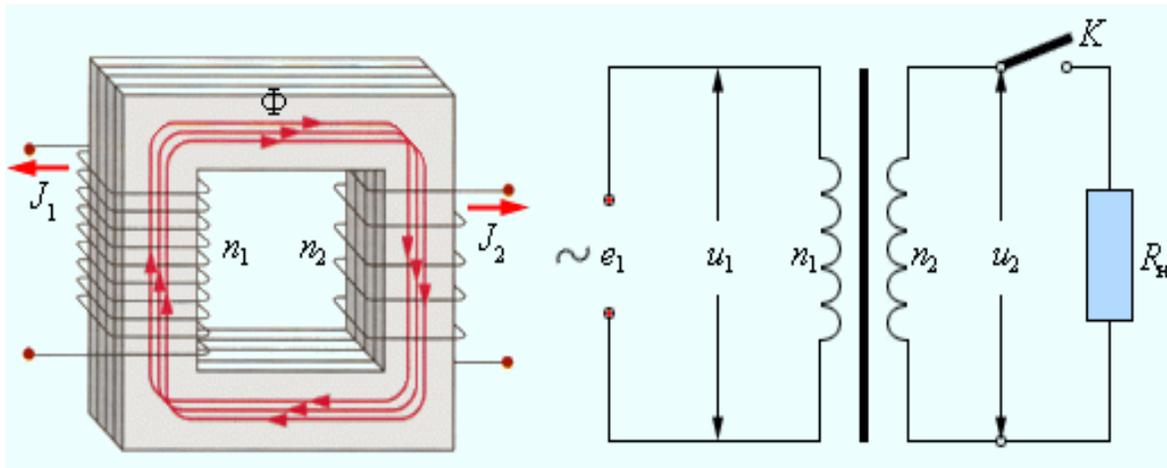
$$L_2 = \mu_0 N_2^2 S/l$$

$$L_1 = \mu_0 N_1^2 S/l$$

$$L_{21} = \sqrt{L_1 L_2}$$

# Идеальный трансформатор

Трансформатор — устройство, имеющее индуктивно связанные обмотки и предназначенное для преобразования напряжения переменного тока без изменения частоты.

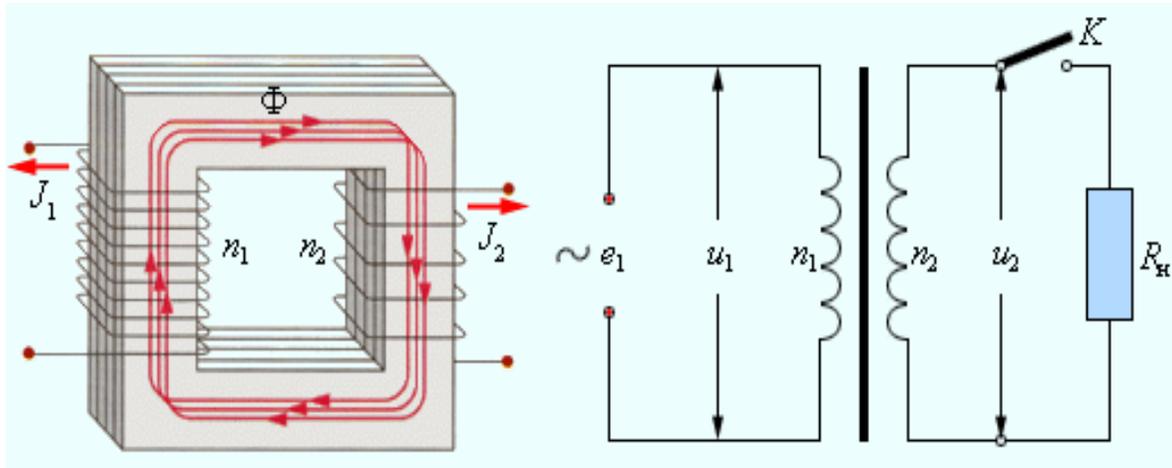


Взаимоиндукция — возникновение ЭДС в одном из контуров при изменении силы тока в другом.

Идеальный трансформатор:

- отсутствуют потери энергии (сопротивления обмоток и потери в магнитопроводе равны нулю);
- все линии магнитной индукции проходят целиком по магнитопроводу, и каждая линия сцепляется со всеми витками первичной и вторичной обмоток.

# Идеальный трансформатор



$$\varepsilon_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt} = I_1 R_1$$

$$\varepsilon_2 - N_2 \frac{d\Phi}{dt} = I_2 R_2$$

$I_1 R_1 \approx 0$  падение напряжения мало по сравнению с ЭДС и ЭДС самоиндукции

$I_2 = 0$  режим холостого хода

$$\varepsilon_2 / \varepsilon_1 = N_2 / N_1$$

Коэффициент трансформации  $\left\{ \begin{array}{l} N_2 / N_1 > 1 \quad \text{повышающий трансформатор} \\ N_2 / N_1 < 1 \quad \text{понижающий трансформатор} \end{array} \right.$

# Самоиндукция

**Самоиндукция** – возникновение ЭДС индукции в контуре в результате изменения тока в нем. В цепи появляются дополнительные токи, называемые **экстратоками самоиндукции**.

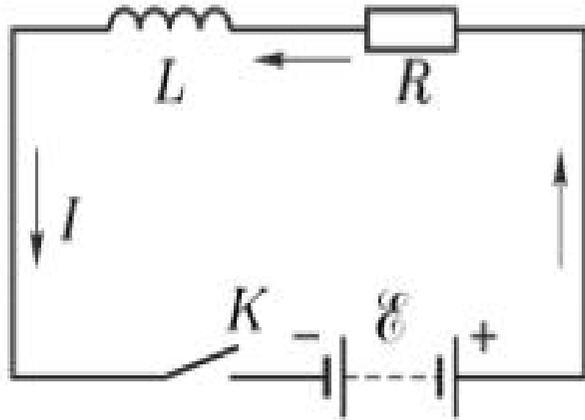
$$\Phi = LI \qquad \varepsilon_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \qquad I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_c}{R}$$

$$IR - \varepsilon = -L\frac{dI}{dt} \qquad \frac{dI}{IR - \varepsilon} = -\frac{dt}{L} \qquad \ln(IR - \varepsilon) = -\frac{R}{L}t + C$$

$$I(0) = I_0 \qquad C = \ln(I_0R - \varepsilon) \qquad \tau = L/R$$

$$I = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{\varepsilon}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

# Замыкание электрической цепи

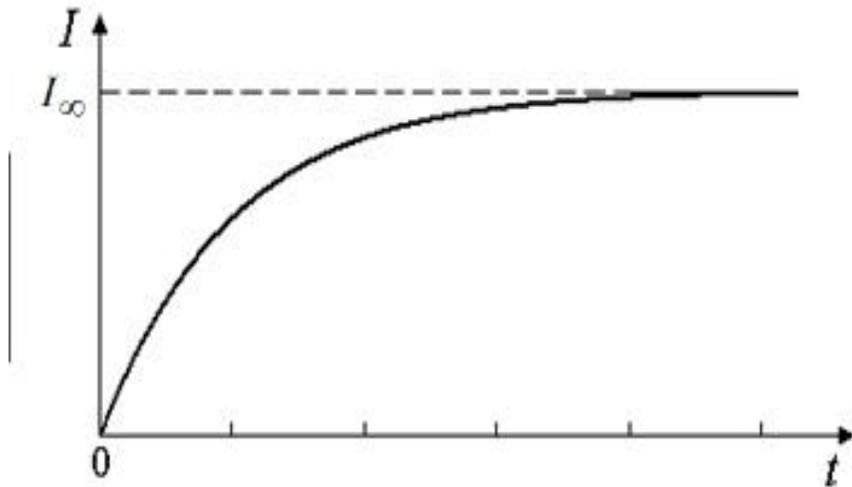


$$I = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

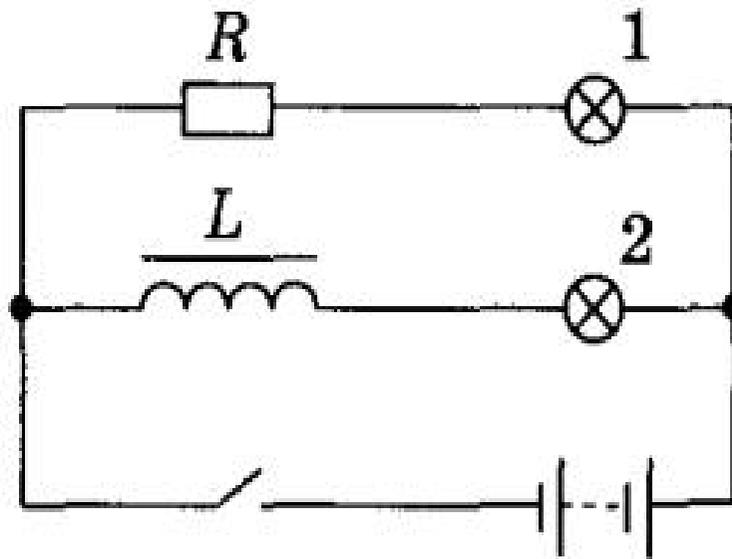
$$I_0 = 0$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$I_\infty = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

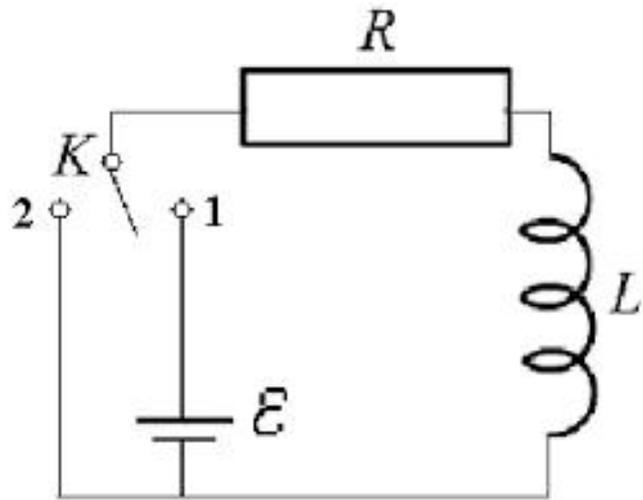


## Замыкание электрической цепи



При замыкании цепи первая лампа загорается сразу, вторая — позже. Сила тока на этом участке цепи не сразу достигает своего максимального значения.

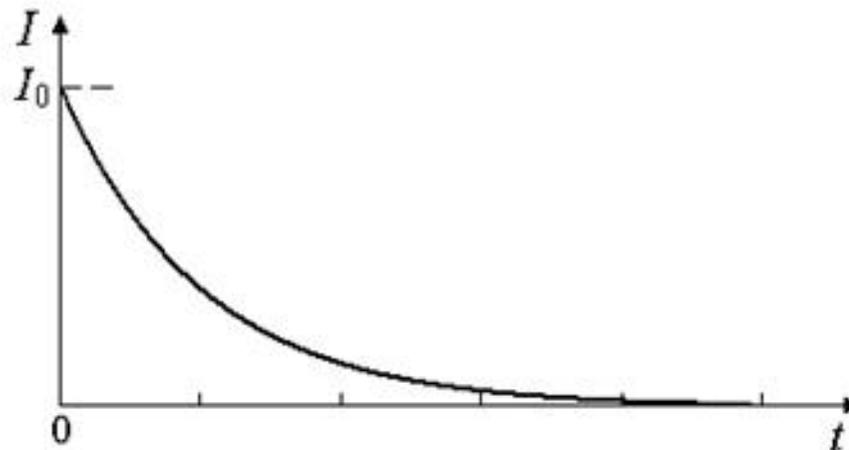
## Отключение ЭДС



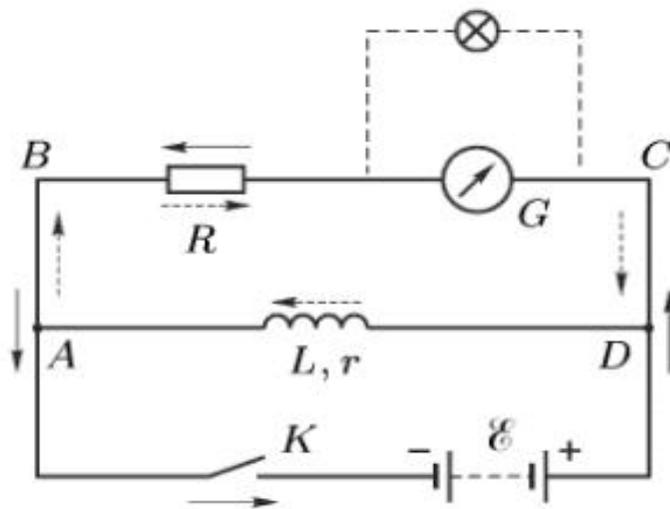
$$I = I_0 e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\mathcal{E}(0) = 0$$

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

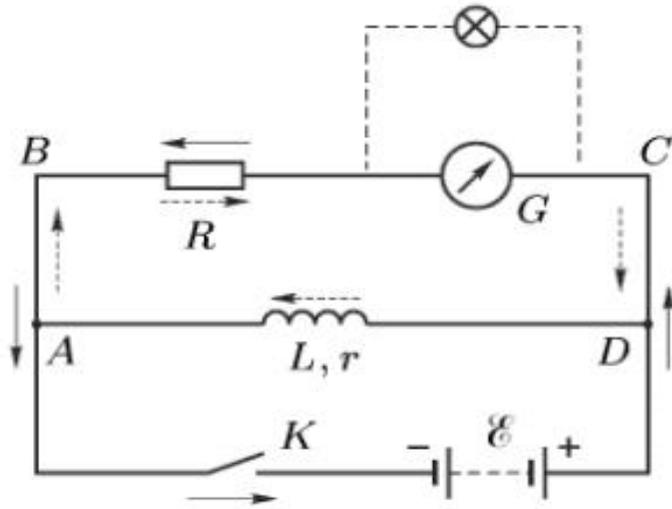


## Размыкание электрической цепи



При замкнутой цепи лампочка светит тускло. Основной ток идет через индуктивность. В момент размыкания цепи лампочка ярко вспыхивает.

# Размыкание электрической цепи



$$R \gg r$$

$$I_0 = \varepsilon / r$$

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = L/R$$

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} = \frac{R}{r} \varepsilon e^{-t/\tau}$$

$$\varepsilon_c \gg \varepsilon$$

# Энергия магнитного поля

Запишем закон Ома  $I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_c}{R}$   $\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt}$

Домножим уравнение  $\varepsilon = IR + L \frac{dI}{dt}$  на  $I dt$

$$\varepsilon I dt = I^2 R dt + L I dI$$

$dA_g = \varepsilon I dt$  работа сторонних сил, работа источника тока

$dQ = I^2 R dt$  джоулево тепло

$dA_m = L I dI$  работа, затраченная на создание магнитного поля

$$A_m = L \int_0^I I dI = \frac{LI^2}{2}$$

## Энергия магнитного поля

Пусть электрическая цепь состоит из бесконечного соленоида и источника, тогда

$$B = \mu\mu_0 nI$$

$$L = \mu\mu_0 n^2 V$$

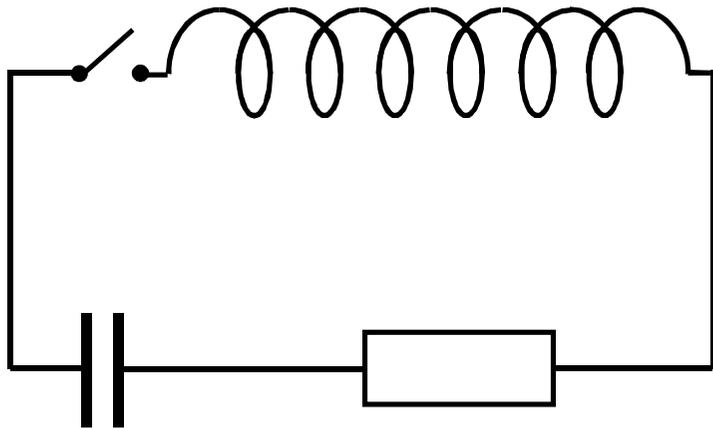
$$A = W_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{1}{2} \mu\mu_0 n^2 V I^2 \quad \longrightarrow \quad W_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V$$

$w = W_m / V$  - объемная плотность энергии (энергия единицы объема).

$$B = \mu\mu_0 H$$

$$w = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{BH}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$$

## Колебательный контур



Колебательный контур - электрическая цепь, состоящая из последовательно соединенных: конденсатора, катушки индуктивности и резистора.

$$W_E = \frac{q^2}{2C}$$

$$W_M = \frac{L\dot{q}^2}{2}$$

$$W = W_E + W_M$$

$$Q = \dot{q}^2 R$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -\dot{q}^2 R$$

## Колебательный контур

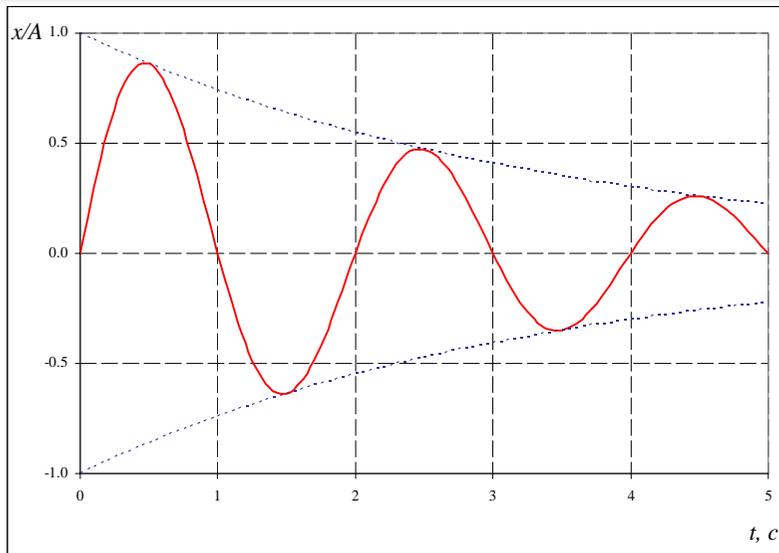
$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{L\dot{q}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = -\dot{q}^2 R$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$$

$$\omega_0^2 = (LC)^{-1} \quad R/L = 2\beta$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

# Колебательный контур



$$q(t) = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

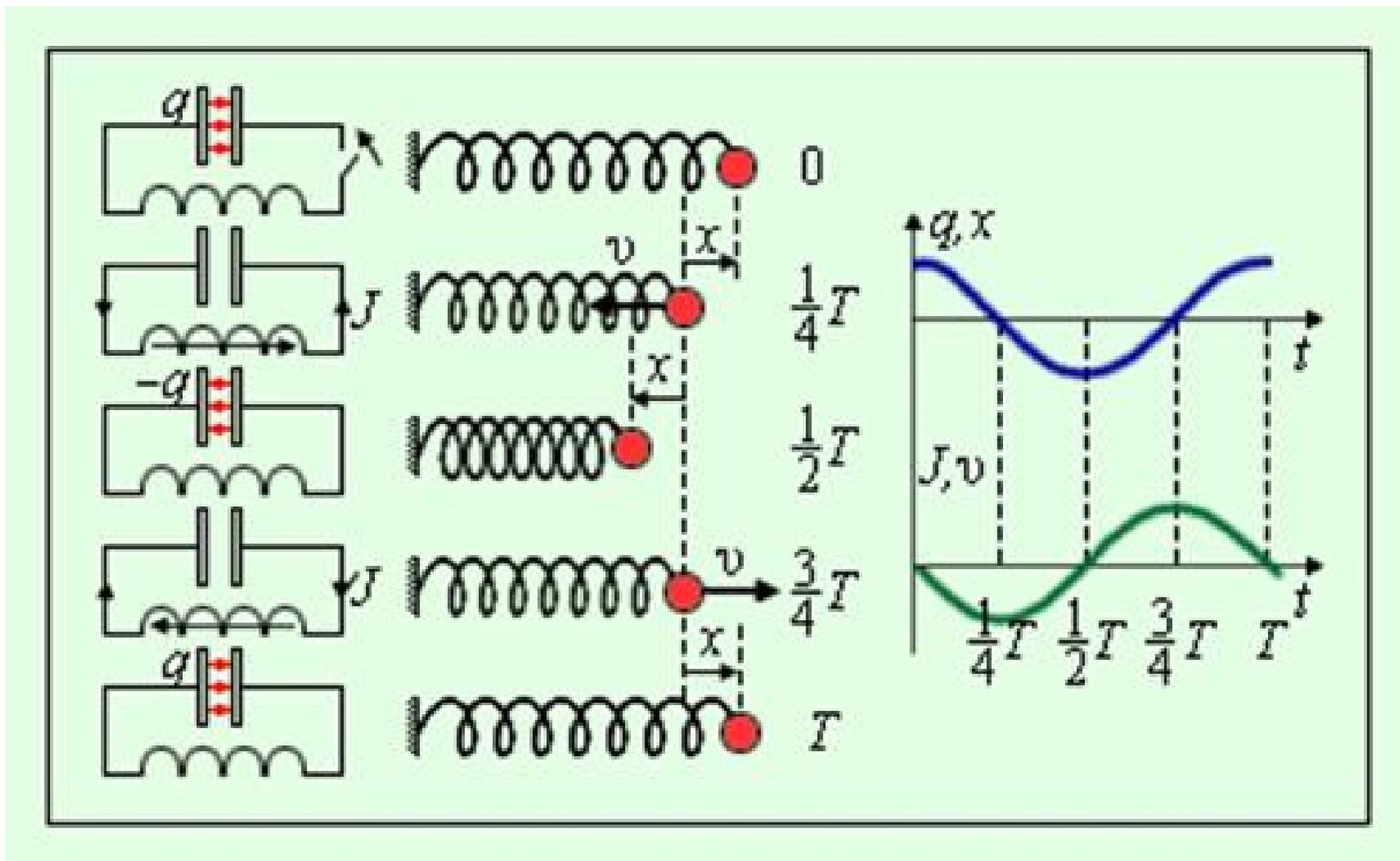
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \left( \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

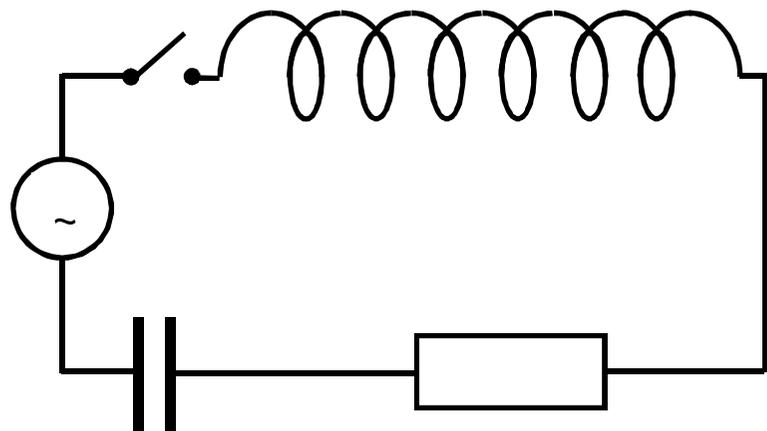
$$R_K = 2\sqrt{L/C}$$

Апплет

# Колебательный контур



## Вынужденные колебания



$$U_R = IR$$

$$U_C = q / C$$

$$E_L = -LdI / dt$$

$$E_{\Gamma} = E_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$U_C + U_R = E_L + E_{\Gamma}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_m \cos(\omega t + \varphi)$$

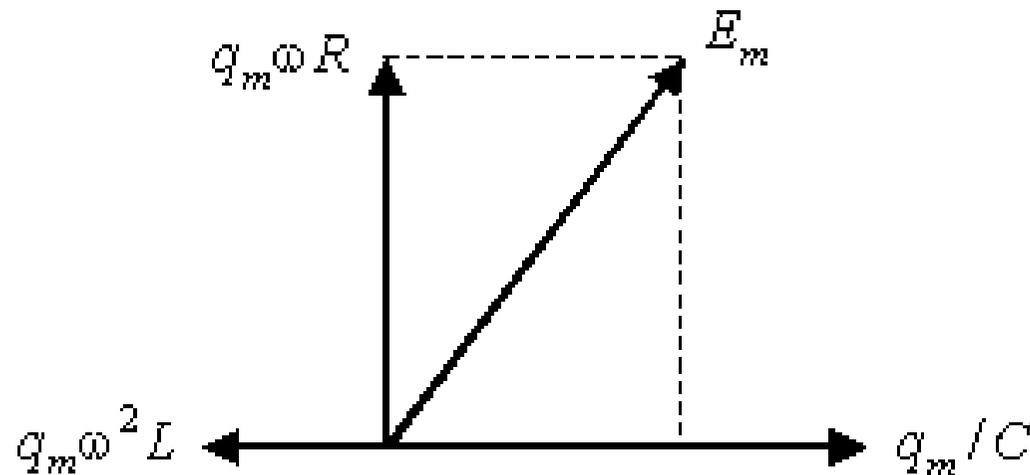
$$q(t) = q_m \cos(\omega t)$$

## Вынужденные колебания

$$q / C = (q_m / C) \cos(\omega t)$$

$$R dq / dt = -R q_m \omega \sin(\omega t) = q_m \omega R \cos(\omega t + \pi / 2)$$

$$L(d^2 q / dt^2) = -L q_m \omega^2 \cos(\omega t) = q_m \omega^2 L \cos(\omega t + \pi)$$



$$((q_m / C) - q_m \omega^2 L)^2 + (q_m \omega R)^2 = (E_m)^2$$

## Вынужденные колебания

$$((q_m / C) - q_m \omega^2 L)^2 + (q_m \omega R)^2 = (E_m)^2$$

$$q_m = \frac{E_m}{L \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$U_C = \frac{q_m}{C} = \frac{\omega_0^2 E_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

# Резонанс

$$U_C = \frac{q_m}{C} = \frac{\omega_0^2 E_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

