

Моделирование движения космических объектов. Небесная механика.

Реактивное движение

Летательный аппарат,двигающийся вследствие выброса части собственной массы, называется ракетой. Такой вид движения называется реактивным. Топливо, сгорая в реактивном двигателе, образует газы, истекающие в пространство с большой скоростью через сопла ракеты. Рассмотрим закономерности движения такого аппарата.

Пусть в замкнутой системе, в отсутствии силовых полей от неподвижного тела массой m , которое будем рассматривать как материальную точку, со скоростью u отделяется частица массой dm . В силу закона сохранения импульса тело также приходит в движение, причем

$$\vec{u}dm = (m - dm)d\vec{V} ,$$

где V – скорость тела. Пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, можно записать, что изменение импульса

$$d\vec{P} \approx m d\vec{V} - \vec{u}dm = 0 .$$

В присутствии силовых полей, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} ,$$

но тогда уравнение движения, в том числе и в неподвижной системе координат, имеет вид

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt} .$$

Принцип относительности Галилея и закон сложения скоростей позволяют под V понимать скорость тела относительно неподвижной системы координат.

Движение материальной точки осуществляется таким образом, как будто на нее действует не только внешнее силовое поле, но и добавочная реактивная сила T . Назовем ее тягой, тогда

$$\vec{T} = \vec{u} \frac{dm}{dt} .$$

Поскольку $\frac{dm}{dt} < 0$, то тяга, действующая на материальную точку, направлена против скорости отделяющейся частицы.

Запишем уравнение динамики тела переменной массы (уравнение Мещерского) в окончательном виде

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} + \vec{T} .$$

На ракету вблизи поверхности Земли действуют различные силы. Ограничимся силой всемирного тяготения и силой лобового сопротивления со стороны атмосферы Земли. Расположим начало координат на поверхности Земли, направив ось y вертикально вверх. Тогда сила всемирного тяготения, направленная к центру Земли, имеет вид:

$$F_g = -G \frac{Mm}{(R+y)^2} ,$$

где M и R – масса и радиус Земли, G – постоянная всемирного тяготения, а m – масса ракеты.

На поверхности сила всемирного тяготения проявляется как сила тяжести, тогда

$$mg = G \frac{Mm}{R^2}, \text{ а } F_g = -\frac{gR^2 m}{(R+y)^2},$$

где g – ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Силу лобового сопротивления со стороны атмосферы Земли будем полагать квадратичной относительно скорости и направленной против скорости движения. Тогда,

$$\vec{F}_D = -\beta |\vec{V}| \vec{V} , \quad \beta = CS\rho/2 ,$$

где C – коэффициент лобового сопротивления, определяемый формой тела, S – характерная площадь тела, ρ – плотности среды.

Итак, при заданных ограничениях уравнение динамики тела переменной массы имеет вид

$$m(t) \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_D + \vec{T} .$$

Вертикальный взлет одноступенчатой ракеты

Разделив уравнение движения на массу, получим, что

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{u}{m} \frac{dm}{dt} - \frac{\beta}{m} V^2 - \frac{gR^2}{(R+y)^2} , \quad \frac{dy}{dt} = V .$$

Будем полагать, что ракета, имеющая стартовую массу m_0 , в процессе полета сжигает топливо равномерно. Если время работы двигателя t_0 , а m_1 – масса ракеты без топлива (сухая масса), то функция изменения массы ракеты от времени имеет вид

$$m(t) = \begin{cases} m_0 - \alpha t & , t \leq t_0 \\ m_1 & , t > t_0 \end{cases} \quad t_0 = (m_0 - m_1)/\alpha ,$$

где α – расход топлива в единицу времени.

Тогда, тяга в единицу времени – удельная тяга,

$$\tau(t) = \frac{T}{m} = -\frac{m'}{m}u = \begin{cases} \alpha u / (m_0 - \alpha t) & , t \leq t_0 \\ 0 & , t > t_0 \end{cases} .$$

Уравнение движения ракеты сведено к дифференциальному уравнению второго порядка

$$y'' = \tau(t) - g(1 + y/R)^{-2} - \gamma(t, y)(y')^2 ,$$

где коэффициент $\gamma(t, y) = \beta/m = CS\rho(y)/2m(t)$ является функцией времени и высоты. Зависимость плотности воздуха от высоты определяется задаваемой моделью атмосферы Земли.

Первая в мире баллистическая ракета «Фау-2», Рис. 1, разработана немецким конструктором Вернером фон Брауном. Во время второй мировой войны использовалась вермахтом для обстрела территории Великобритании. Пуски начались в 1942 году. В 1944 году «Фау-2» во время первого в истории суборбитального полета достигла высоты 188 километров. Ракета стартовала вертикально, была одноступенчатой и имела жидкостный реактивный двигатель. В качестве двухкомпонентного топлива (горючее – окислитель) применялся этиловый спирт и жидкий кислород.

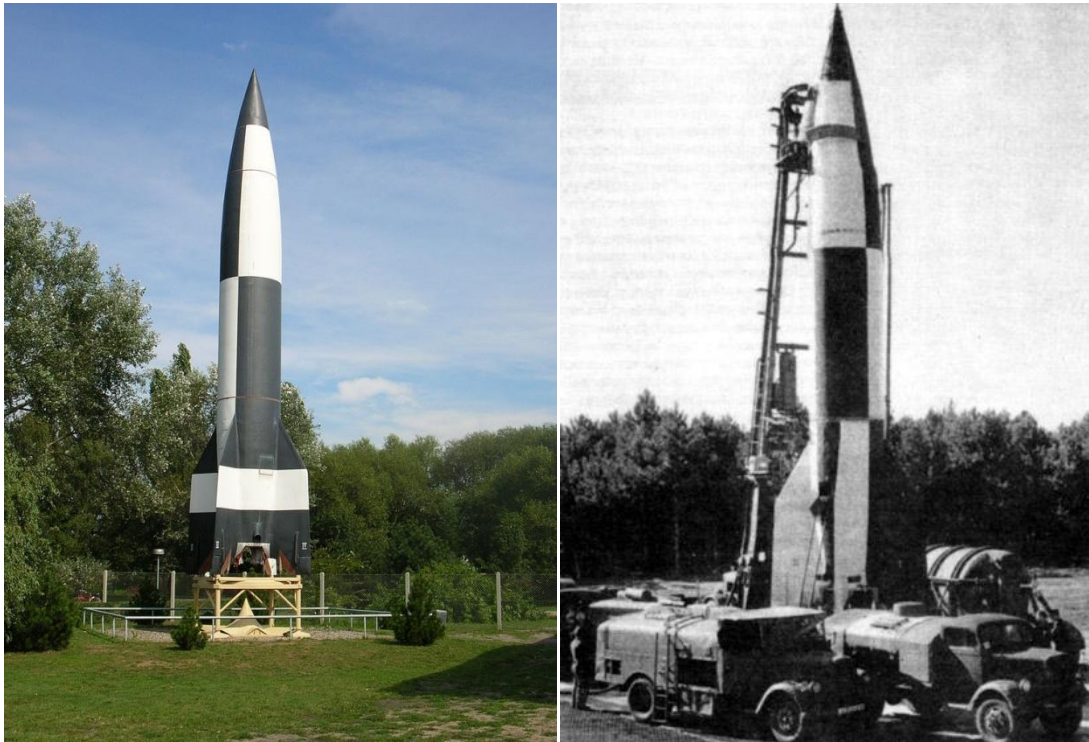


Рис. 1

Основные характеристики ракеты приведены в таблице.

Основные параметры ракеты «Фау-2»	
Масса стартовая, кг	12500
Масса незаправленной ракеты с боевой частью, кг	4000
Время работы двигателя, с	65
Скорость истечения топлива, м/с	2050
Скорость ракеты в конце работы двигателя, м/с	1450
Диаметр корпуса, мм	1650
Общая длина ракеты, мм	14030

Рассчитаем некоторые важные параметры такой ракеты, а именно: средний расход топлива в единицу времени и долю топлива в стартовой массе ракеты

$$\alpha = (m_0 - m_1)/t_0 \approx 131 \text{ кг/с} , \quad \kappa = 1 - m_1/m_0 \approx 0.68 .$$

Заметим, что расход топлива современных тяжелых ракет нередко превышает 10000 кг/с.

Построим уравнение движения ракеты «Фау-2». Заменой переменной сведем дифференциальное уравнение второго порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, разрешённому относительно производной. Пусть

$$z = \begin{pmatrix} y \\ V_y \end{pmatrix}, \text{ тогда } \frac{dz}{dy} = f(y), \text{ а } \begin{cases} z_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 0 \end{cases} .$$

Численное решение данной системы построим, используя солвер Matlab. Листинг программы *fau2.m*, реализующий это решение, приводится ниже. Сделаем несколько замечаний по тексту программы.

Плотность атмосферы Земли рассчитывается с использованием барометрического уравнения. Для наших целей точность такой модели вполне достаточна.

Направление силы лобового сопротивления, противоположное скорости, определяется посредством функции *sign()* из библиотеки математических функций Matlab.

Солверы Matlab позволяют отслеживать события и обрабатывать их в процессе решения. Функция *odeset* определяет структуру *options*. Опция *Events*, установленная в структуре *options*, позволяет зафиксировать момент, когда какая-либо из указанных в функции событий переменных принимает значение равное нулю. Там же определяется ссылка на функцию событий — *@eventsM*.

В этом случае набор из трех переменных - `[value, isterminal, direction]`, передается солверу функцией события:

`value` – содержит вектор величин, зависящих от времени и состояния, равенство нулю которых регистрируется как событие;

`isterminal` – вектор той же длины, состоящий из значений 0 и 1, компоненты которого отвечают за остановку процесса численного интегрирования. Численное интегрирование прекращается, если это значение равно 1, а для соответствующей функции наступило событие. В противном случае, когда значение равно 0, численное интегрирование продолжается;

`direction` – вектор той же длины, состоящий из значений 0, 1 и -1, компоненты которого отвечают за направление изменения величин вектора `value`. При значении 1 событие фиксируется, только если соответствующая функция возрастает, при -1 событие фиксируется, только если функция убывает, при 0 событие фиксируется при любом поведении функции.

Солвер в этом случае наряду со стандартными выходными параметрами (вектором значений моментов времени и матрицей значений переменных в эти моменты времени) имеет дополнительные выходные параметры.

`te` – вектор моментов времени, в которые зафиксированы изменения знака величин `value` в направлении, заданном вектором `direction`; `ye` – матрица значений переменных в эти моменты времени; `ie` – вектор, компоненты которого содержат номера компонент вектора `value`, которые меняют знак в моменты времени `te`.

Приведенный в тексте обработчик событий настроен на регистрацию событий $y=0$ и $V=0$. Событием, условие $y=0$, считается лишь при убывающей функции $y(t)$, а событие $V=0$ – в любом случае. При наступлении события $V=0$ интегрирование продолжается, а при наступлении события $y=0$ интегрирование прекращается.

Листинг программы.

```
function fau2
global g0 StartWeight DryWeight OperatingTime FuelFlowRate Alfa Kappa;
g0=9.80665;           % ускорение свободного падения, м/с2
RadiusEarth=6371000; % радиус Земли, м
StartWeight=12500;    % стартовая масса ракеты, кг
DryWeight=4000;       % масса не заправленной топливом ракеты, кг
OperatingTime=65;     % время работы двигателя, с
FuelFlowRate=2050;    % скорость истечения топлива (этиловый спирт-кислород),
м/с
DiameterCase=1650;    % диаметр корпуса, мм
Cx=0.15;              % коэффициент лобового сопротивления
Ss=pi*(DiameterCase/1000)^2/4; % характерная площадь ракеты
Alfa=(StartWeight-DryWeight)/OperatingTime; % расход топлива, кг/с
Kappa=1-DryWeight/StartWeight; % доля топлива в стартовой массе ракеты
Y0=0;                 % начальная координата
YP0=0;                % вертикальная начальная скорость
T0=0;                 % время начала движения
TN=10000;             % время окончания движения
dT=0.5;               % шаг по времени
```

```

options=odeset('Events',@eventsM); % обработчик события
Gamma=@(t,y) Deceleration(t,y,ss,Cx);
Shot3=@(t,z) [z(2); PullUnit(t)-g0./(1+z(1)/RadiusEarth).^2-
Gamma(t,z(1)).*sign(z(2)).*z(2).^2];
[T,Z,te,ye,ie]=ode23(Shot3,[T0:dT:TN],[Y0 YP0],options); % решение ОДУ

disp(sprintf('Максимальная скорость %f [км/с]',max(Z(:,2)/1000)));
disp(sprintf('Максимальная высота %f [км]',max(Z(:,1)/1000)));
disp(sprintf('Время полета %f [с]',max(T)));
for iCur=1:size(ie,1)
disp(sprintf('Событие n=%d, t=%f с, y=%f км V=%f
км/с',ie(iCur),te(iCur),ye(iCur,1)/1000,ye(iCur,2)/1000));
end

figure('Color',[1 1 1]);
iCur=1;
for jCur=T0:0.1:80
z(iCur)=MassRocket(jCur);
iCur=iCur+1;
end
hL1=plot([T0:0.1:80],z); grid;
ylabel('\itmacca, [км]', 'fontsize',14);
xlabel('\itt, [с]', 'fontsize',14);
set(hL1(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'm');

figure('Color',[1 1 1]);
hL1=plot(T,Z(:,1)./1000); grid; % зависимость координаты от времени
ylabel('\ity, [км]', 'fontsize',14);
xlabel('\itt, [с]', 'fontsize',14);
set(hL1(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'b');

figure('Color',[1 1 1]);
hL2=plot(T,Z(:,2)/1000); grid; % зависимость скорости от времени
ylabel('\itV, [км/с]', 'fontsize',14);
xlabel('\itt, [с]', 'fontsize',14);
set(hL2(1), 'LineWidth', 2, 'Color', 'g');
end
%-----
% расчет удельной тяги ракеты
function pu=PullUnit(t)
global g0 StartWeight DryWeight OperatingTime FuelFlowRate Alfa;
if (t<=OperatingTime)
pu=Alfa*FuelFlowRate./MassRocket(t);
else
pu=0;
end
end
%-----
% расчет массы одноступенчатой ракеты
function mCur=MassRocket(t)
global g0 StartWeight DryWeight OperatingTime FuelFlowRate Alfa Kappa;
if (t<=OperatingTime)
mCur=(StartWeight-Alfa.*t);
else
mCur=DryWeight;
end;
end
%-----
function da=Deceleration(t,y,S,C)
global g0 StartWeight DryWeight OperatingTime FuelFlowRate Alfa;
Mm=0.02896; % молярная масса воздуха, кг/моль

```

```

Rg=8.3144598;           % газовая постоянная
T0=288.15;              % температура на уровне моря, К
ro_air_0=1.225;         % плотность воздуха на уровне моря, кг/м
ro_air_y=ro_air_0.*exp(-y.*(Mm*g0/(Rg*T0))); % барометрическая формула
da=C*S*ro_air_y./(2*MassRocket(t));
end
%-----
function [value,isterminal,direction] = eventsM(t,z)
% Обработка события для солвера
value = [z(1), z(2)]; % определяем событие: y = 0 или V = 0
isterminal = [1, 0]; % при обнаружении события y = 0 остановить счет, при
обнаружении события V = 0 продолжить счет
direction = [-1, 0]; % учитывать событие y = 0 при убывании, учитывать
событие V = 0 в любом направлении
end

```

Результаты расчетов, зависимость скорости ракеты и ее высоты над поверхностью Земли, приведены на Рис. 2.

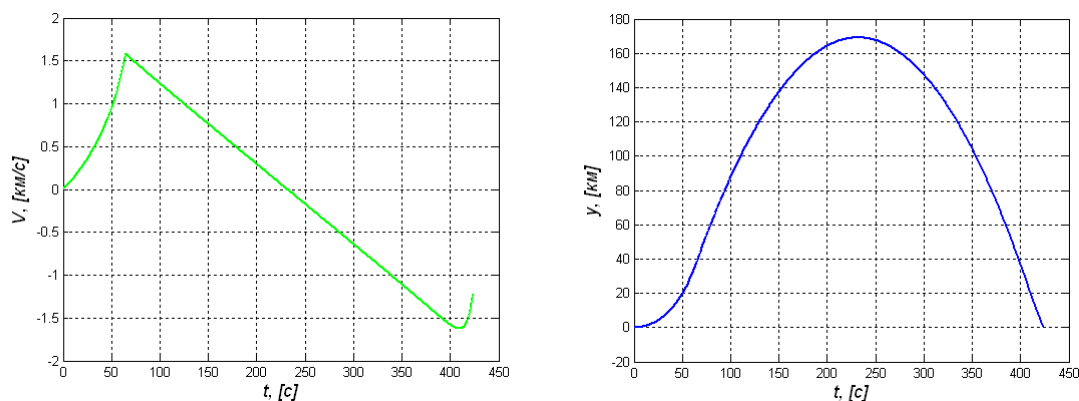


Рис. 2

За первые 65 секунд полета скорость ракеты возрастает от нуля до 1522 м/с. При этом ракета поднимается на высоту ~25 км. Затем, двигаясь по инерции и теряя скорость до нуля, ракета поднимается на высоту 169 км. Это происходит на 232 секунде полета. После этого – падение вниз. Скорость линейно возрастает. При входе в плотные слои атмосферы на высоте ~20 км скорость в абсолютном значении начинает уменьшаться. При выполнении условия $y=0$ интегрирование прекращается.

Протокол работы программы приведен ниже:

Максимальная скорость 1.582113 [км/с]

Максимальная высота 169.558909 [км]

Время полета 424.462902 [с]

Событие $n=2$, $t=0.000000$ с, $y=0.000000$ км $V=0.000000$ км/с

Событие $n=2$, $t=232.250480$ с, $y=169.558929$ км $V=-0.000000$ км/с

Событие $n=1$, $t=424.462902$ с, $y=-0.000000$ км $V=-1.220792$ км/с

Полет многоступенчатой баллистической ракеты

Приведенные выше расчеты показали, что развиваемая ракетой «Фау-2» максимальная скорость далека от первой космической, равной 7.91 км/с, а значит, ракета

не способна стать искусственным спутником Земли. Даже если использовать в качестве топлива смесь гептила и кислорода, со скоростью истечения продуктов горения 3381 м/с, то максимальная скорость ракеты возрастет до значений 3084 м/с, все равно недостаточных для полета. Предельная же скорость истечения газов сгорания ракетного топлива не превышает 4 км/с.

Пусть ракета движется в пустом пространстве в отсутствии внешних сил. Тогда уравнение движения при постоянной скорости истечения газа имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = u \frac{dm}{dt} .$$

Интегрируя, получаем, что предельная скорость ракеты определяется скоростью истечения и соотношением масс, стартовой и сухой

$$V_{\max} = u \ln m_0/m_1 .$$

Эта формула получена Циолковским и носит его имя. Поскольку для «Фау-2» $m_0/m_1 \approx 3$, то формула Циолковского дает значение $V_{\max} \approx 2336$ м/с.

Оценим максимальное значение отношения масс для современных конструкций и материалов $m_0/m_1 \approx 9$. Ограничение обусловлено требованием прочности конструкции ракеты. Например, известная двадцатилитровая канистра для бензина конструкции Грюнфогеля, Рис. 3, разработанная по заказу вермахта и получившая название Wehrmachtskanister («Канистра Вермахта») весит 4 кг, т.е. соотношение масс $m_0/m_1 \approx 5$.



Рис. 3

Тогда предельная скорость простейшей одноступенчатой ракеты окажется в районе 8 км/с, а значит в условиях реального полета первая космическая скорость не достижима.

Для достижения космических скоростей Циолковский предложил делать ракеты многоступенчатыми. В простейшей реализации многоступенчатая ракета представляет собой несколько размещенных друг на друге ракет (ступеней), Рис. 5. Первая ступень, полностью использовав горючее, отделяется и падает на Землю. Затем начинают работать двигатели второй ступени, затем – третьей, и т.д. На орбиту выводится лишь малая часть стартовой массы – полезная нагрузка.

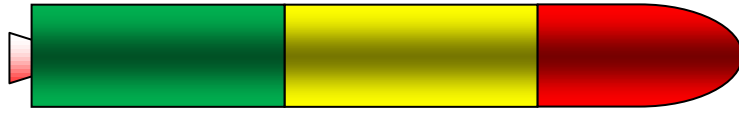


Рис. 4

Запишем уравнение движения многоступенчатой ракеты. Для i -ой ступени оно совпадает с уравнением движения одноступенчатой ракеты

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{T}_i + \vec{F}_{gi} + \vec{F}_{Di} .$$

Рассмотрим трехступенчатую ракету, основные параметры которой соответствуют «Фау-2». Стартовый вес – 12500 кг, расход топлива каждой ступени – $\alpha \approx 131 \text{ кг/с}$, доля топлива в массе ступени – $\kappa \approx 0.68$, полезная нагрузка равна половине сухого веса третьей ступени.

Масса ракеты есть сумма масс ступеней, запишем $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$. Тогда время выгорания топлива i -ой ступени

$$t_i = \kappa m_i / \alpha ,$$

а зависимость массы ракеты от времени имеет вид

$$m(t) = \begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 - \alpha t & , t \leq t_1 \\ m_2 + m_3 - \alpha t & , t_1 < t \leq t_1 + t_2 \\ m_3 - \alpha t & , t_1 + t_2 < t \leq t_1 + t_2 + t_3 \\ m_3(1 - \kappa)/2 & , t > t_1 + t_2 + t_3 \end{cases} .$$

Распределим массу ракеты по ступеням следующим образом: 8000 кг, 4000 кг и 500 кг. Тогда масса полезной нагрузки – 160 кг. Такая нагрузка, выведенная на орбиту, относится к классу малых космических аппаратов. На рисунке приведена зависимость массы такой ракеты от времени

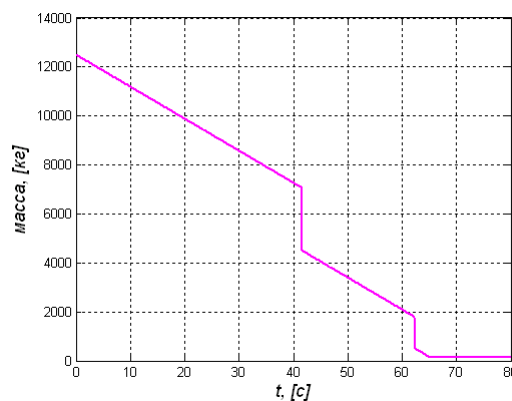


Рис. 5

Модульный принцип построения программы расчета полета одноступенчатой ракеты позволяет фактически изменить только программу расчета массы и определить глобальные переменные.

```

global NumberStages StartWeightStage1 StartWeightStage2 StartWeightStage3;
StartWeightStage1=8000;      % стартовая масса первой ступени, кг
StartWeightStage2=4000;      % стартовая масса второй ступени, кг
StartWeightStage3=500;       % стартовая масса третьей ступени, кг
NumberStages=3;              % количество ступеней
%-----
% расчет массы одноступенчатой и трехступенчатой ракеты
function mCur=MassRocket(t)
global g0 StartWeight DryWeight OperatingTime FuelFlowRate Alfa Kappa;
global NumberStages StartWeightStage1 StartWeightStage2 StartWeightStage3;
switch NumberStages
case 1
    if (t<=OperatingTime)
        mCur=(StartWeight-Alfa.*t);
    else
        mCur=DryWeight;
    end;
case 3
    t1=Kappa*StartWeightStage1/Alfa;
    t2=Kappa*StartWeightStage2/Alfa;
    t3=Kappa*StartWeightStage3/Alfa;
    if (t<=t1) % работа первой ступени
        mCur=StartWeightStage1+StartWeightStage2+StartWeightStage3-
Alfa.*t;
    end;
    if (t>t1) % работа второй ступени
        mCur=StartWeightStage2+StartWeightStage3-Alfa.*(t-t1);
    end;
    if (t>t1+t2) % работа третьей ступени
        mCur=StartWeightStage3-Alfa.*(t-t1-t2);
    end;
    if (t>=t1+t2+t3) % полезная нагрузка
        mCur=StartWeightStage3*(1-Kappa);
    end;
end
end

```

Результаты расчетов для трехступенчатой ракеты, заправленной двухкомпонентным топливом этиловый спирт – кислород, показывают, что ее максимальная скорость возрастает до 4.5 км/с.

Максимальная скорость 4.509768 [км/с]

Максимальная высота 1225.673860 [км]

Время полета 1303.396282 [с]

Событие n=2, t=0.000000 с, y=0.000000 км V=0.000000 км/с

Событие n=2, t=633.293346 с, y=1225.673915 км V=-0.000000 км/с

Событие n=1, t=1303.396282 с, y=-0.000000 км V=-0.091687 км/с

Если же использовать гептил – кислород, то первая космическая скорость достижима. По результатам расчета максимальная скорость составляет 8.1 км/с. Протокол работы программы:

Максимальная скорость 8.122372 [км/с]

Максимальная высота 7580.628992 [км]

Время полета 5035.405452 [с]

Событие n=2, t=0.000000 с, y=0.000000 км V=0.000000 км/с

Событие n=2, t=2503.051933 с, y=7580.629010 км V=-0.000000 км/с

Событие n=1, t=5035.405452 с, y=-0.000000 км V=-0.091728 км/с

Моделирование Солнечной системы

Гелиоцентрическая модель солнечной системы, основанная на представлении о том, что Земля и планеты вращаются вокруг Солнца, окончательно сформулирована польским астрономом Николаем Коперником в книге «О вращении небесных сфер», 1543 г. До него идеи гелиоцентризма встречались в работах целого ряда греческих, арабских и индийских ученых.

Иоганн Кеплер в работе «Новая астрономия», 1609 г., сформулировал законы планетных движений, определив форму орбит и установив математическую связь между их геометрическими параметрами и периодами планетных движений. Его законы были получены как итог большого количества точных астрономических наблюдений. Приведем три закона Кеплера:

1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Параметры орбит планет солнечной системы приведены в таблице. Заметим, что современная классификация относит Плутон к карликовым планетам.

ОРБИТАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЛАНЕТ						
Название	Большая полуось, [а.е.]	Эксцентриситет	Наклон к эклиптике, [град]	Период обращения, [сут]	Наклон оси, [град]	Орбитальная скорость, [км/с]
Меркурий	0.38709831	0.205631752	7.004986389	87.96843362	0.00	47.87
Венера	0.72332982	0.006771882	3.394661944	224.6954354	177.36	35.02
Земля	1.000001018	0.016708617	0	365.24218985	23.45	29.79
Марс	1.523679342	0.09340062	1.849726389	686.92970957	25.19	24.13
Юпитер	5.202603191	0.048494851	1.303269722	4330.595765	3.13	13.06
Сатурн	9.554909596	0.055508622	2.488878056	10746.94044	25.33	9.66
Уран	19.21844606	0.046295899	0.77319611	30588.74035	97.86	6.8
Нептун	30.11038687	0.008988095	1.7699522	59799.90046	28.31	5.44
Плутон	39.5181762	0.245938782	17.12259917	90738.995	122.52	4.74

Планеты делятся на два вида: внутренние и внешние. Различие связано с тем, что орбиты внутренних планет (Меркурия и Венеры) находятся внутри орбиты Земли, в то время как орбиты внешних находятся вне орбиты Земли. При движении по эллипсу расстояние от планеты до Солнца меняется, наиболее удаленная точка орбиты называется афелий, ближайшая к Солнцу — перигелий, Рис. 6.

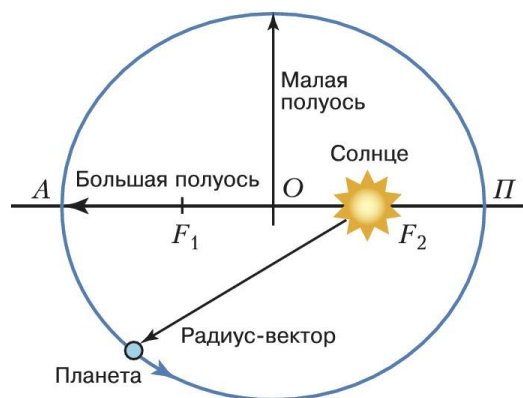


Рис. 6

Предположим, что все планеты движутся в плоскости эклиптики. Тогда в декартовой системе координат параметрические уравнения движения планет имеют вид

$$x(\xi) = a(\cos \xi - e), \quad y(\xi) = a\sqrt{1-e^2} \sin \xi, \quad t(\xi) = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi.$$

где a – большая полуось, e – эксцентриситет, T – период.

Приведем листинг программы, позволяющей начертить орбиты планет.

```
Planet= zeros(9,3);
% Большая полуось (а.е.);   Эксцентриситет; Период обращения (сут)
Planet(1,:)= [0.38709831; 0.205631752; 87.96843362]; % Меркурий
Planet(2,:)= [0.72332982; 0.006771882; 224.6954354]; % Венера
Planet(3,:)= [1.000001018; 0.016708617; 365.24218985]; % Земля
Planet(4,:)= [1.523679342; 0.09340062; 686.92970957]; % Марс
Planet(5,:)= [5.202603191; 0.048494851; 4330.595765]; % Юпитер
Planet(6,:)= [9.554909596; 0.055508622; 10746.94044]; % Сатурн
Planet(7,:)= [19.21844606; 0.046295899; 30588.74035]; % Уран
Planet(8,:)= [30.11038687; 0.008988095; 59799.90046]; % Нептун
Planet(9,:)= [39.5181762; 0.245938782; 90738.995]; % Плутон

Cg= {'m', 'b', 'g', 'r', 'k'};
% рисуем орбиты планет
figure('Color',[1 1 1]);
ksi=linspace(0,2*pi,500);
hold on;
plot(0,0,'ok');
for iCurP=1:9
    a=Planet(iCurP,1);
    e=Planet(iCurP,2);
    T=Planet(iCurP,3);
    t=(0.5*T/pi)*(ksi-e.*sin(ksi));
    x=a.*(cos(ksi)-e);
    y=a*sqrt(1-e^2).*sin(ksi);
    plot(x,y);
    %plot(x,y,Cg{iCurP-4});
    %pause(2)
end
```

На Рис. 7 приведены результаты расчетов и модель солнечной системы. Как видно из рисунка, любая модель такого рода всегда выполняется с нарушением масштаба.

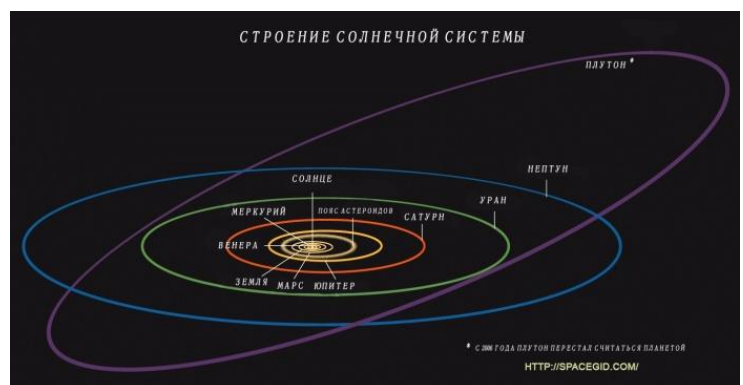
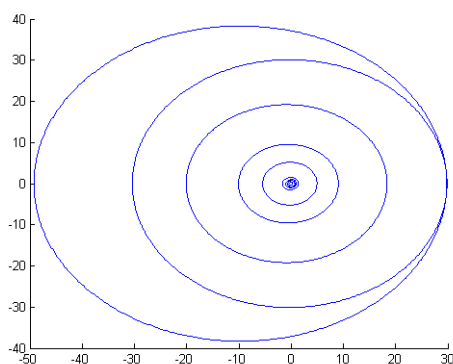


Рис. 7

Для сравнения приведем орбиты внутренних и внешних планет в разных масштабах.

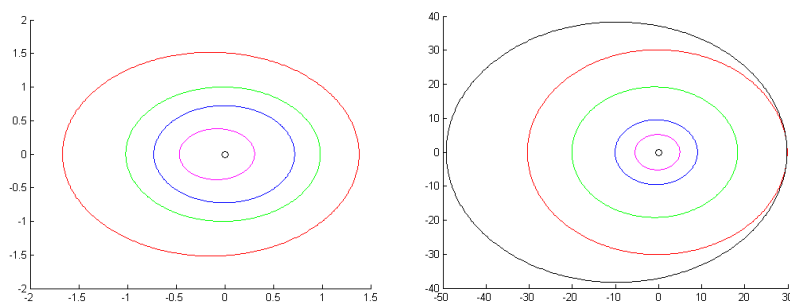


Рис. 8

В процессе движения планет иногда возникает ситуация при которой Солнце, Земля и одна из внешних планет располагаются на одной линии, Рис. 9. Такое взаимное расположение планет называется противостоянием (оппозицией). В оппозиции эклиптическая долгота внешней планеты отличается от долготы Солнца на 180° . Это время наилучших условий наблюдения внешней планеты: она находится на минимальном расстоянии от Земли и обращена к Земле освещенным Солнцем полушарием. Наиболее интересны для земного наблюдателя противостояния Марса и Юпитера.

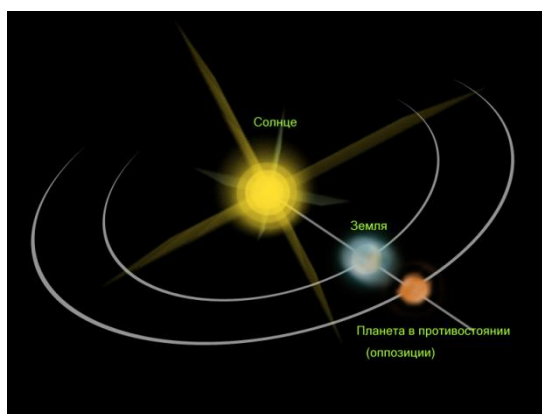


Рис. 9

Если противостояние происходит в перигелии, то расстояние между планетами в этот момент минимальное из возможных. Такое противостояние называется великим.

Траектория Марса в геоцентрической системе отсчета

С древнейших времен астрономия пыталась разгадать тайну попятных движений планет. Особенно наглядны такие движения у внешних планет. Обычно планеты движутся по небосклону в прямом направлении: с запада на восток. Вблизи противостояния планета меняет направление движения на обратное, и движется с востока на запад. Попытное движение Марса показано на Рис. 10.



Рис. 10. Copyright: [Tunc Tezel](#)

Технология, позволяющая получить такое изображение, заключается в совмещении серии снимков, таким образом, чтобы изображения звезд совпадали.

Анимированное попятное движение Марса, видимое с Земли и происходившее с 31 июля по 30 сентября 2003 г., можно посмотреть [здесь](#). Середина этого движения приходится на великое противостояние.

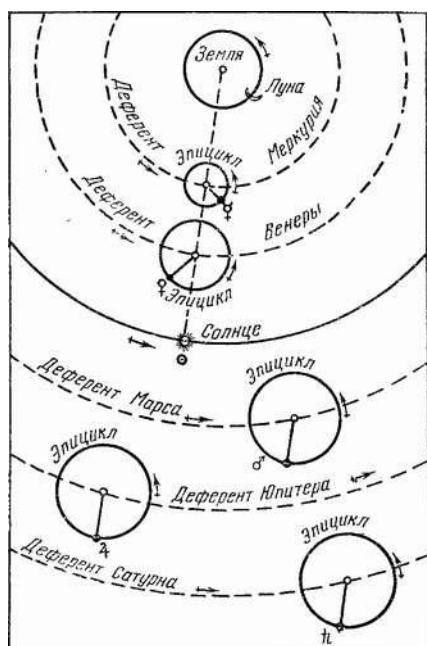


Рис. 12

Геоцентрическая модель мира Клавдия Птолемея объясняла возвратные движения планет. По геоцентрической модели Луна, Солнце и планеты вращаются вокруг Земли. Это движение сложное, состоящее из двух равномерных и круговых: эпицикла и деферента, Рис. 12. Подбирая для каждого небесного тела количество эпициклов, их радиусы и радиус деферента, Птолемею и его последователям удалось удивительно точно описать видимое движение тел.

Представление о причинах возвратного движения планеты дает Рис. 11.

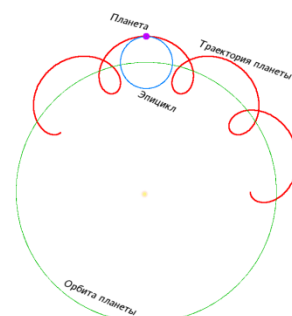


Рис. 11

Оставаясь в рамках гелиоцентрической картины мира, построим траекторию Марса в геоцентрической системе отсчета. Другими словами ответим на вопрос. Как будет видеть наблюдатель, находящийся на поверхности Земли, движение Марса на небосклоне?

Радиус-векторы, описывающие движение Земли и Марса в гелиоцентрической системе и радиус-вектор, описывающий движение Марса в геоцентрической системе, связаны простым соотношением

$$\vec{r}_{SE} + \vec{r}_{EM} = \vec{r}_{SM} \quad .$$

Индексы в приведенном выражении очевидны.

Тогда, зная положение планет в один и тот же момент времени, можно определить радиус-вектор Марса в геоцентрической системе

$$\vec{r}_{EM} = \vec{r}_{SM} - \vec{r}_{SE} \quad .$$

Алгоритм расчета содержит следующие этапы:

- a. положим параметр $\zeta=0$, определив, что начальный момент времени соответствует великому противостоянию;
- b. зададим диапазон изменения параметра ζ и разобьем его равномерно, получив вектор ζ_i ;
- c. рассчитаем для орбиты Марса значения $x(\zeta_i)$, $y(\zeta_i)$, $t(\zeta_i)$;
- d. полагая орбиту Земли круговой, рассчитаем ее положение в моменты времени $t(\zeta_i)$;
- e. рассчитаем положение Марса относительно Земли.

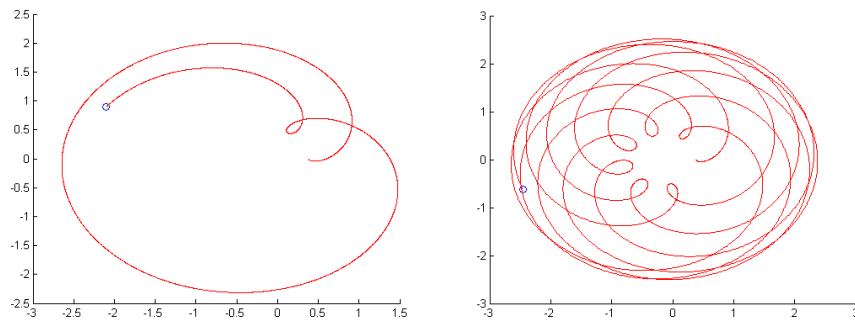


Рис. 13

Результаты расчетов приведены на Рис. 13. Слева – время наблюдения три земных года, справа – 15 лет. Попытное движение Марса на небосводе Земли находит свое объяснение в рамках гелиоцентрической модели солнечной системы.