Лекция 3

Колебательные процессы.

Гармонический осциллятор.

Пружинный, математический и физический маятники.

Фазовая плоскость.

Негармонический осциллятор.

Гармонический осциллятор

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0$$

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

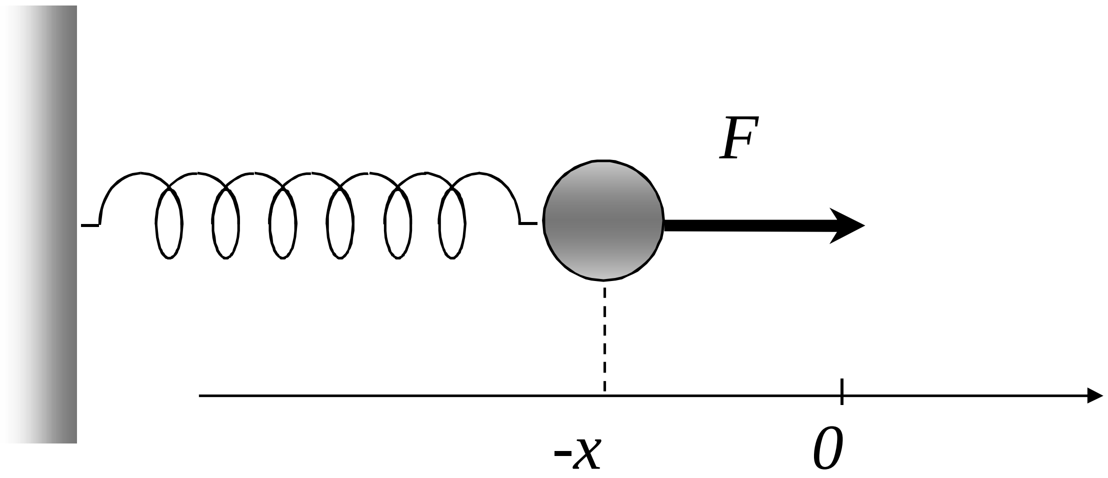
$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Пружинный маятник



$$F = ma$$

$$\boxed{F = -kx}$$

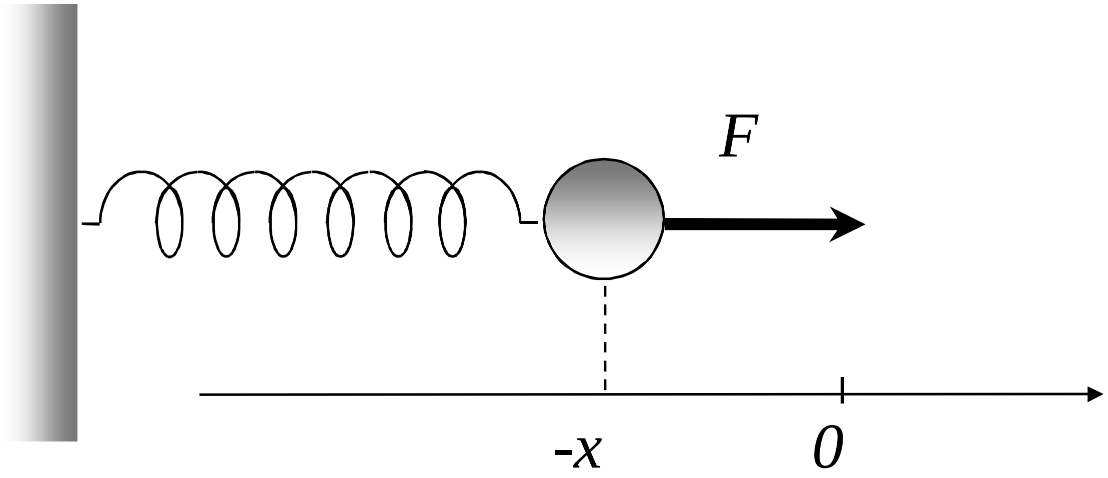
$$a = \ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Начальные условия



$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$x(0) = -A \qquad V(0) = 0$$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

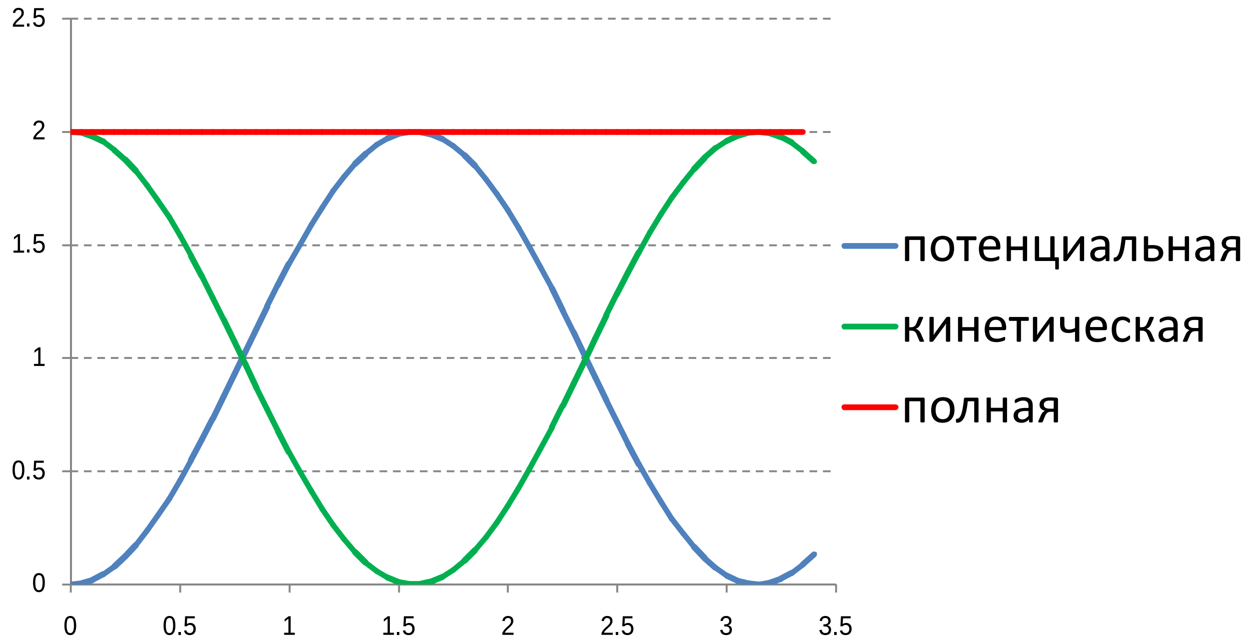
$$x(0) = 0 \qquad V(0) = V_0$$

Энергия маятника

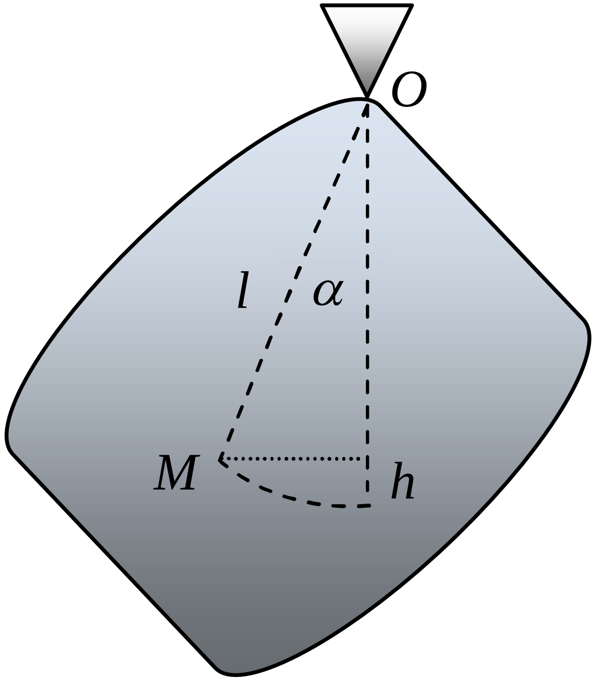
$$T = \frac{mV^2}{2} \qquad T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right)$$

$$U = \frac{kx^2}{2} \qquad U = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1 - \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right)$$

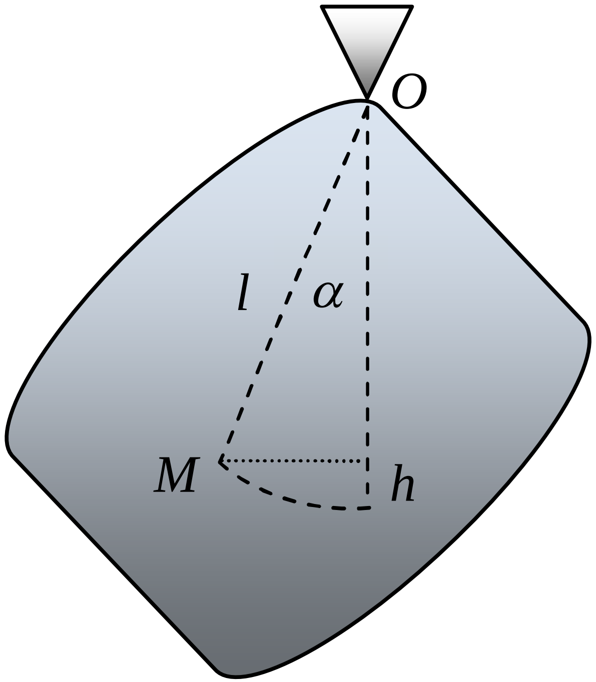
$$T + U = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$



Физический маятник



Физический маятник - твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.



$$T = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2}$$

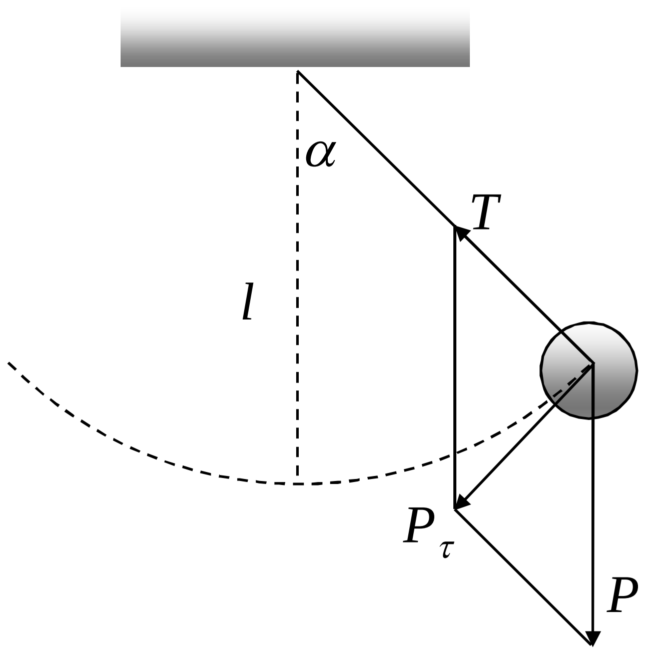
$$U = mgh = mgl\left(1 - \cos\alpha\right)$$

$\alpha \ll 1$ $\qquad$ $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$

$$E = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2}$$

$\dot{E} = 0$ $\qquad$ $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$ $\qquad$ $\omega_0^2 = \dfrac{mgl}{J}$

Математический маятник



$$\vec{P}_\tau = \vec{T} + \vec{P}$$

$$P_\tau = ma_\tau$$

$$\alpha \ll 1 \qquad \sin\alpha \approx \alpha \qquad x = l\sin\alpha \approx l\alpha$$

$$P_\tau = -mg\sin\alpha \qquad P_\tau \approx -mg\alpha$$

$$a_\tau = \dot{V} = l\ddot{\alpha} \qquad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\sin(\alpha) = 0$$

Фазовое пространство

Фазовое пространство (плоскость) в физике — пространство, на котором множество всех состояний системы представлено так, что каждому возможному состоянию системы соответствует одна и только одна точка этого пространства, — которая носит название «изображающей» точки, — и, наоборот, каждой точке этого пространства соответствует одно и только одно состояние системы. Таким образом, изменению состояний системы, можно сопоставить движение изображающей точки; траекторию этой точки называют фазовой.

Полная совокупность различных фазовых траекторий — это фазовый портрет. Он даёт представление о совокупности всех возможных состояний системы и типах возможных движений в ней.

В случае механических движений на оси абсцисс фазовой плоскости откладывается координата, на оси ординат — первая производная от координаты по времени (скорость или импульс).

Фазовые траектории линейного осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

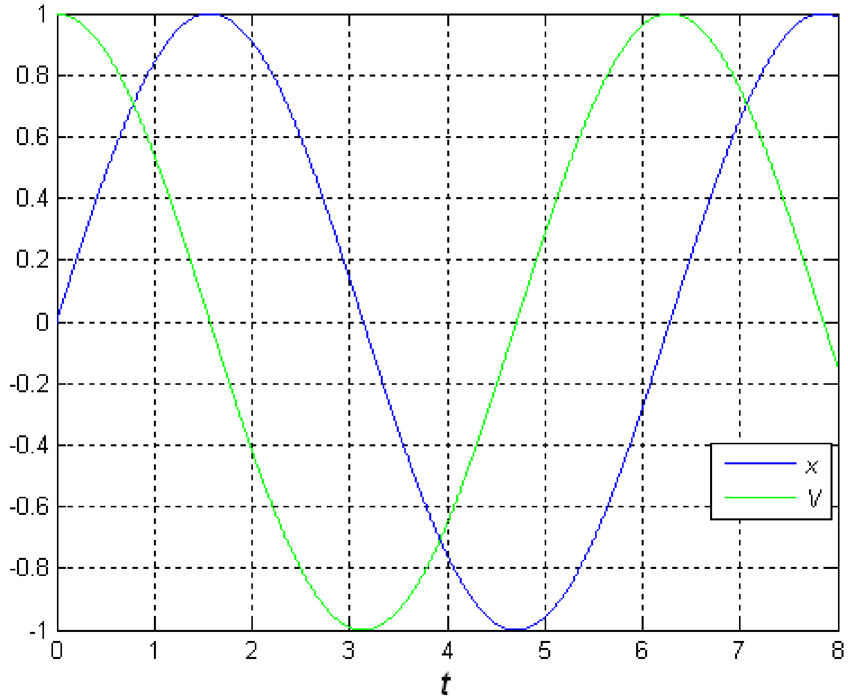
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 & y_1(0) = x(0) \\ \dot{y}_2 = -\omega_0^2 y_1 & y_2(0) = \dot{x}(0) \end{cases}$$

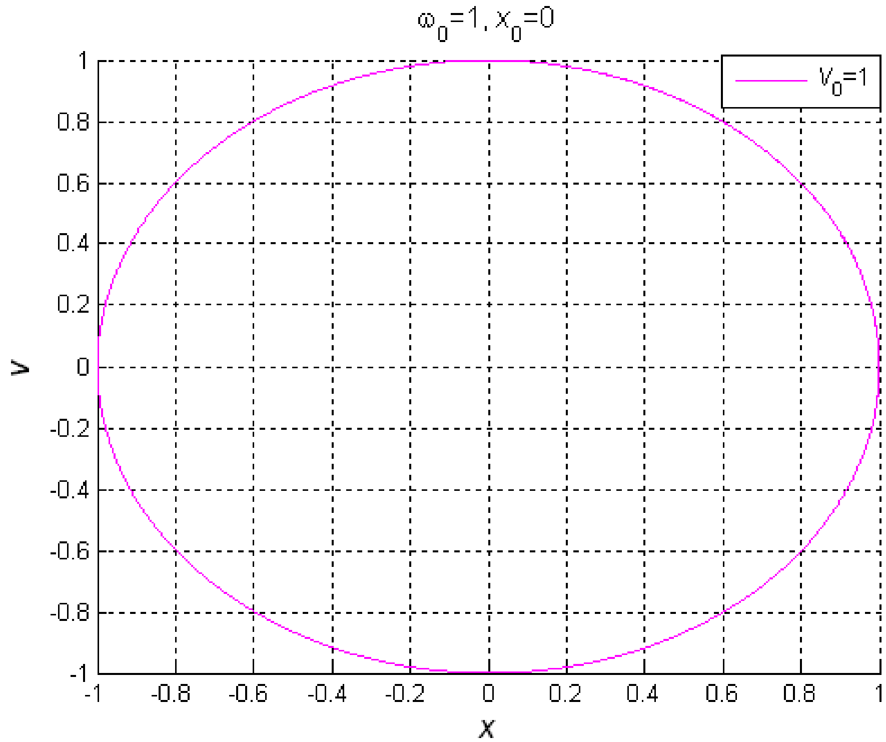
$$\dot{Y} = f(Y)$$

Фазовые траектории линейного осциллятора

```
Omega=1; % циклическая частота
% правая часть ОДУ
Pend0=@(t,y ) [y(2);-(Omega^2)*y(1)];
T0=0;  % время начала движения
TN=8;  % время окончания движения
dT=(TN-T0)/5000; % шаг по времени
Y0=0;  % начальная координата
YP0=1; % начальная скорость
% решение системы ОДУ
[T,Y]=ode45(Pend0,[T0:dT:TN],[Y0, YP0]);
% зависимость координаты и скорости от времени
figure (1); plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2)); grid;
% фазовая траектория
figure (2); plot(Y(:,1),Y(:,2)); grid;
```

Фазовые траектории линейного осциллятора

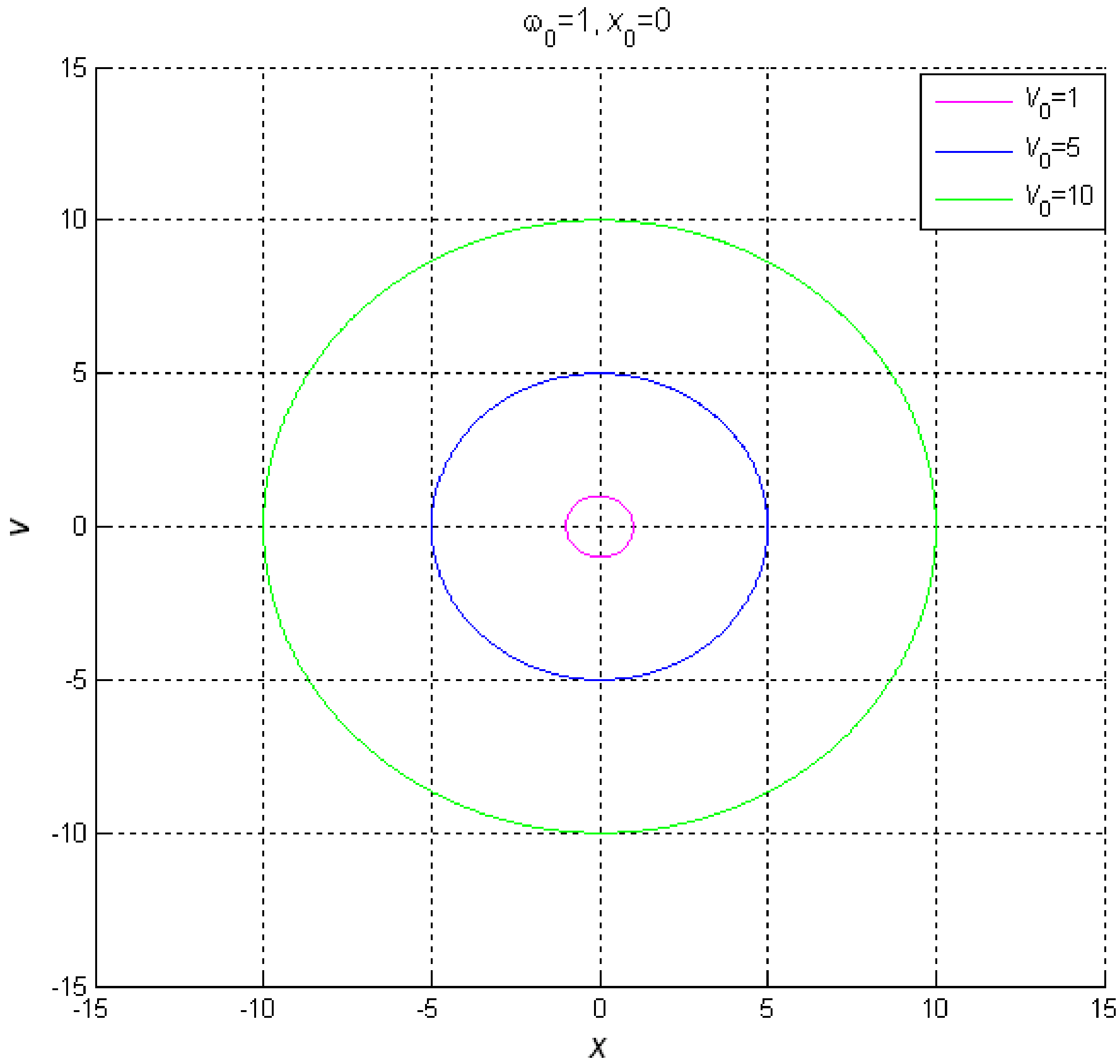




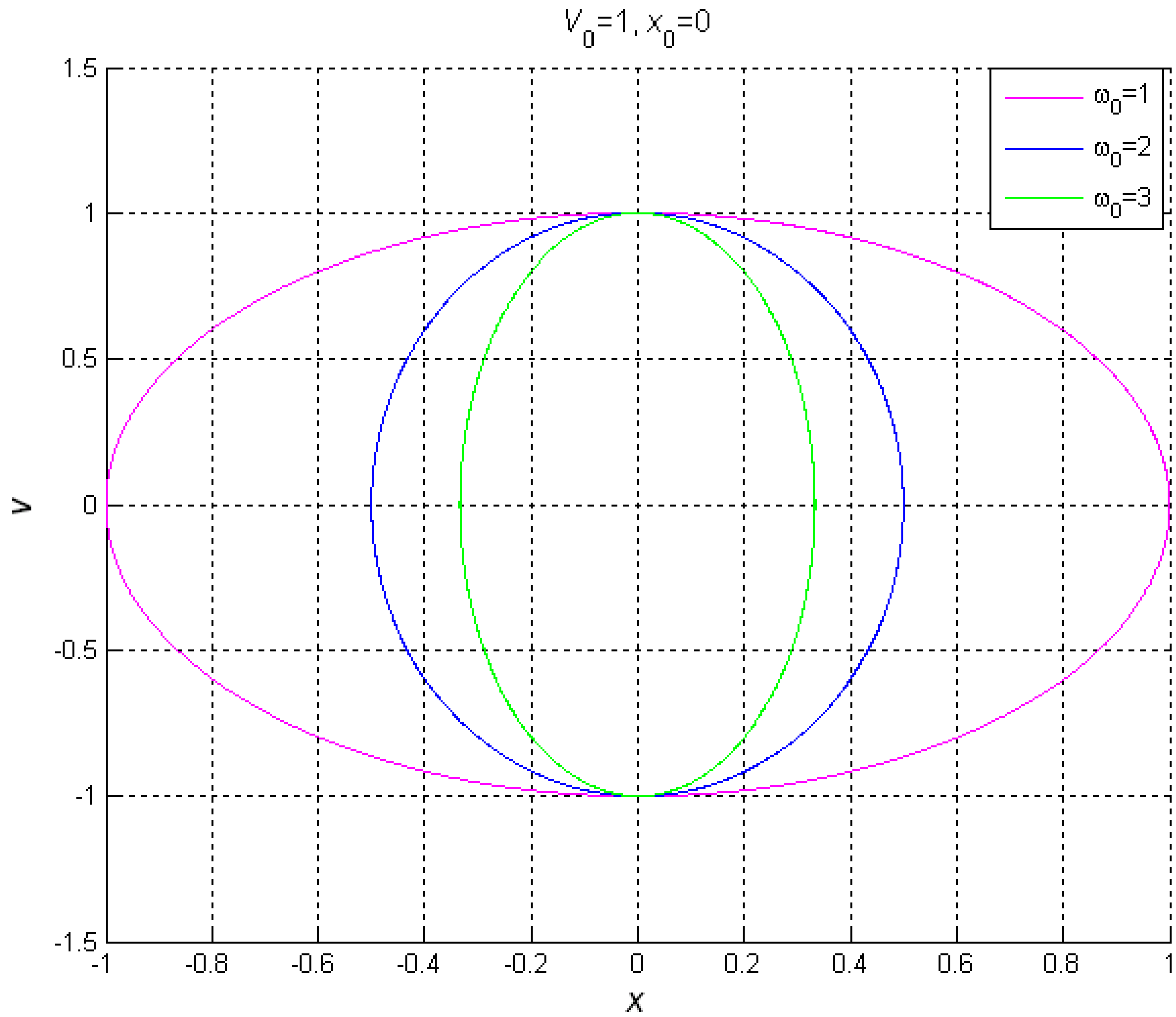
Фазовые траектории линейного осциллятора

```
Omega=1; % циклическая частота
Pend0=@(t,y ) [y(2); -(Omega^2)*y(1)]; % правая часть ОДУ
T0=0;  % время начала движения
TN=8;  % время окончания движения
dT=(TN-T0)/5000; % шаг по времени
Y0=0;  % начальная координата
YP0=[1;5;10];
Sg = {'', '', ''};
Cg= {'m', 'b', 'g'};
figure('Color',[1 1 1]);
hold on;
for Vel=1:size(YP0,1)
    [T,Y]=ode45(Pend0,[T0:dT:TN],[Y0, YP0(Vel)]); % решение системы ОДУ
    Lg{Vel}= sprintf('{\\itV}_0=%d',YP0(Vel));     % надписи легенды
    plot(Y(:,1),Y(:,2),Cg{Vel});                   % фазовая траектория
end;
grid on;
legend (Lg{1},Lg{2},Lg{3},-1);
xlabel('\itx','fontsize',14);
ylabel('\itv','fontsize',14);
title (sprintf('{\\omega}_0=%d, {\\itx}_0=%d',Omega,Y0),'fontsize',12);
```

Фазовые траектории линейного осциллятора



Фазовые траектории линейного осциллятора



Затухающие колебания

$$F_{mp} = -rV = -r\dot{x}$$

r -коэффициент сопротивления

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\delta = r/2m$$

коэффициент затухания

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = s(t)\sin \omega t$$

$$\dot{x} = \dot{s}\sin \omega t + \omega s \cos \omega t$$

$$\ddot{x} = \ddot{s}\sin \omega t + 2\omega \dot{s}\cos \omega t - \omega^2 s \sin \omega t$$

$$\left(\ddot{s} + 2\delta \dot{s} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)s\right)\sin \omega t + 2\omega\left(\dot{s} + \delta s\right)\cos \omega t = 0$$

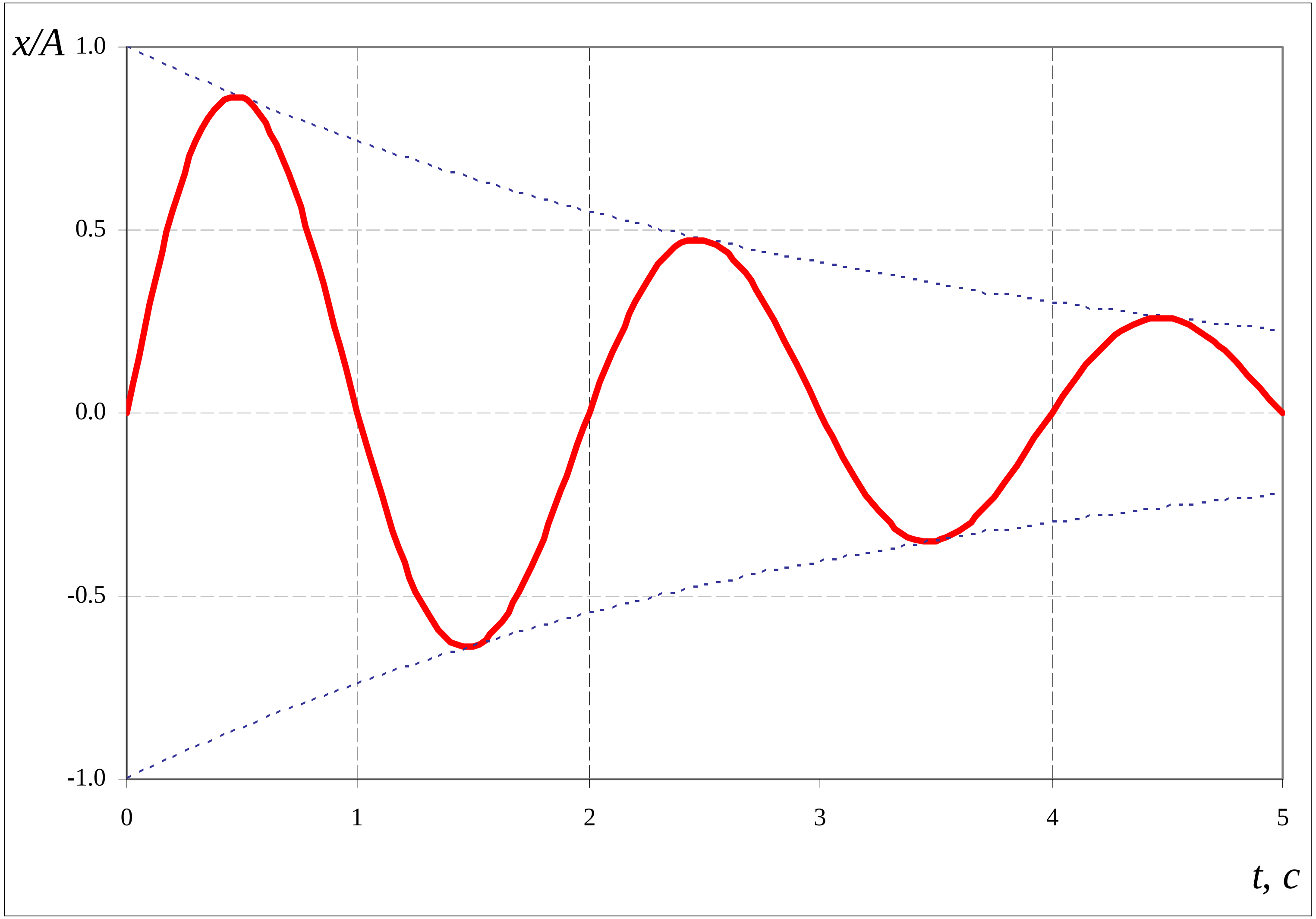
$$\left(\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)s\right)\sin\omega t + 2\omega\left(\dot{s} + \delta s\right)\cos\omega t = 0$$

$$\frac{ds}{s} = -\delta dt$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$s = Ae^{-\delta t}$$

$$x(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

период

$$\tau = 1/\delta$$

время релаксации

$$N = \tau/T$$

Когда можно считать затухания малыми?

$$U(t)=\frac{kx^2}{2}=\frac{m\omega_0^2A^2}{2}e^{-2\delta t}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$\Delta U=U(t)-U(t+T)=U(t)\left(1-e^{-2\delta T}\right)$$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

$$\Delta U << U \longrightarrow \delta << \omega_0$$

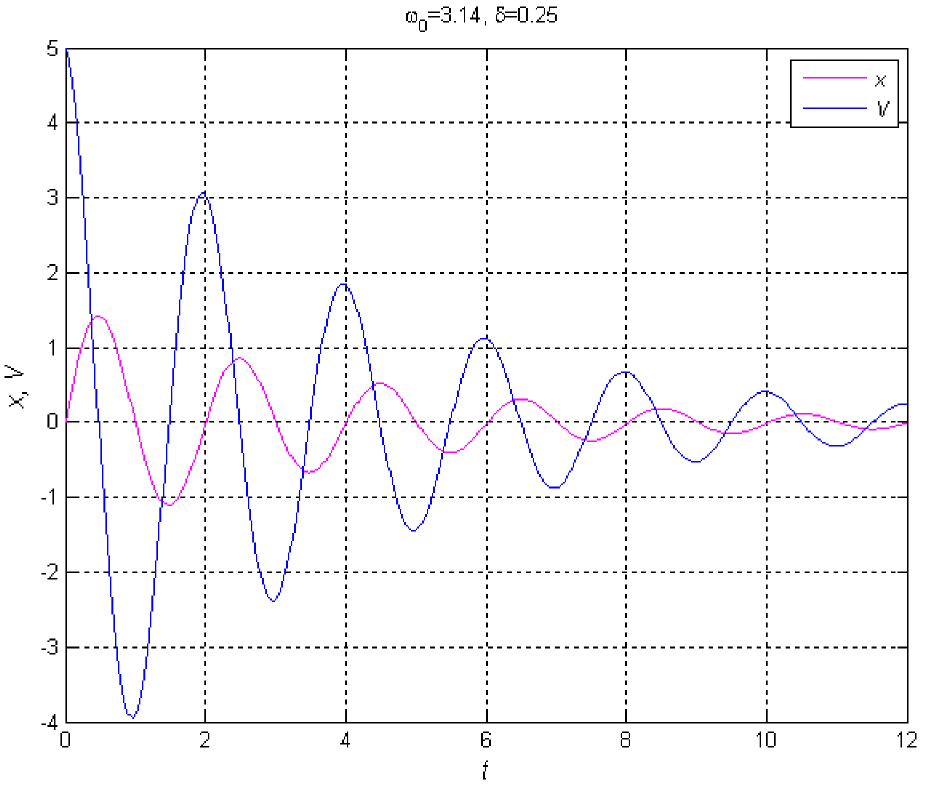
Фазовые траектории затухающих колебаний

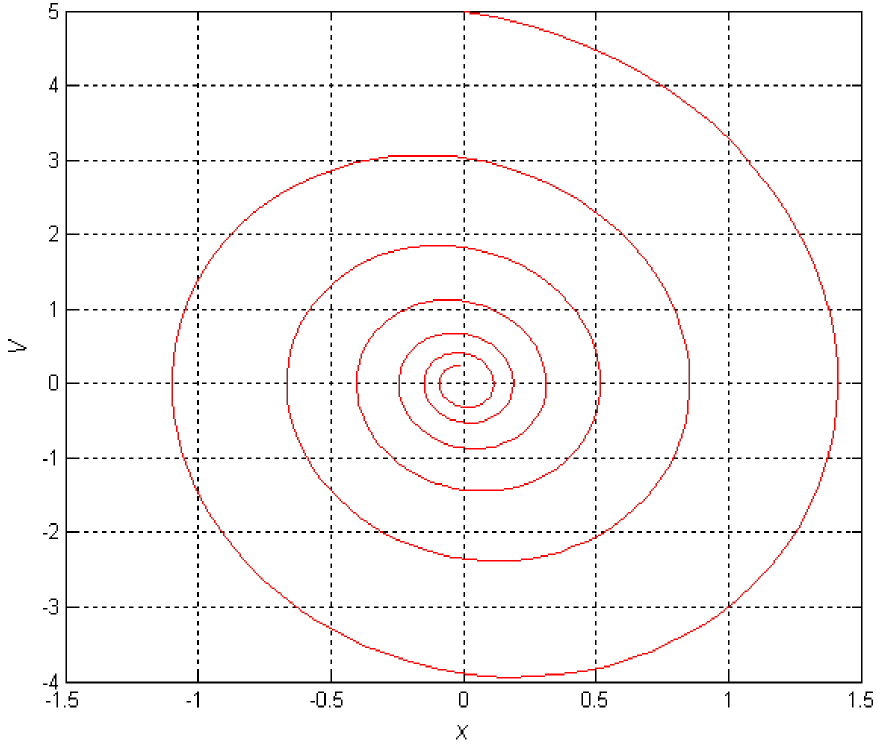
```
Omega=pi; % циклическая частота
Delta = 0.25; % коэффициент затухания
% правая часть ОДУ
Pend0=@(t,y ) [y(2); -2*Delta*y(2)-(Omega^2)*(y(1))];
T0=0;  % время начала движения
TN=20;  % время окончания движения
dT=(TN-T0)/500; % шаг по времени
Y0=0;  % начальная координата
YP0=5; % начальная скорость
% решение системы ОДУ
[T,Y]=ode45(Pend0,[T0:dT:TN],[Y0, YP0]);

% зависимость координаты и скорости от времени
figure (1); plot(T,Y(:,1),T,Y(:,2)); grid;
figure (2); plot(Y(:,1),Y(:,2)); grid;
```

Фазовые траектории затухающих колебаний

$$\delta < \omega_0$$

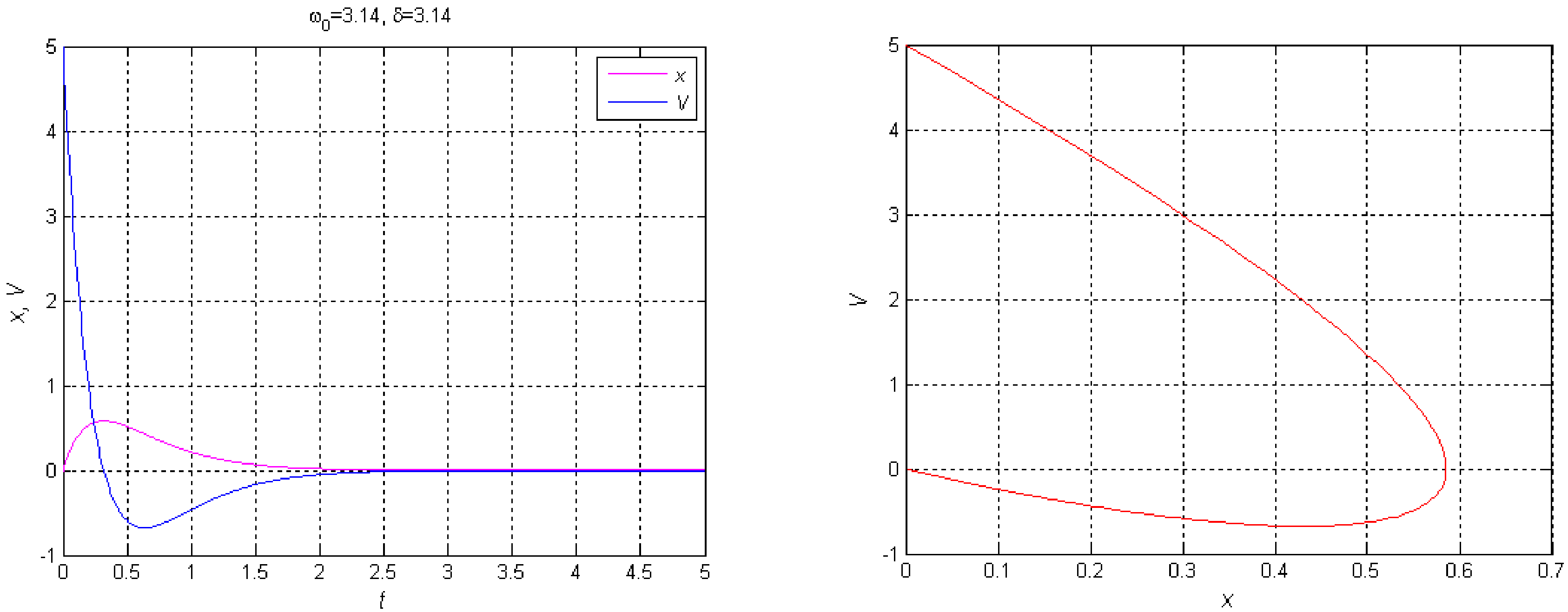




Фазовые траектории затухающих колебаний

$\delta = \omega_0$ маятник возвращается к равновесному положению не совершая колебаний.

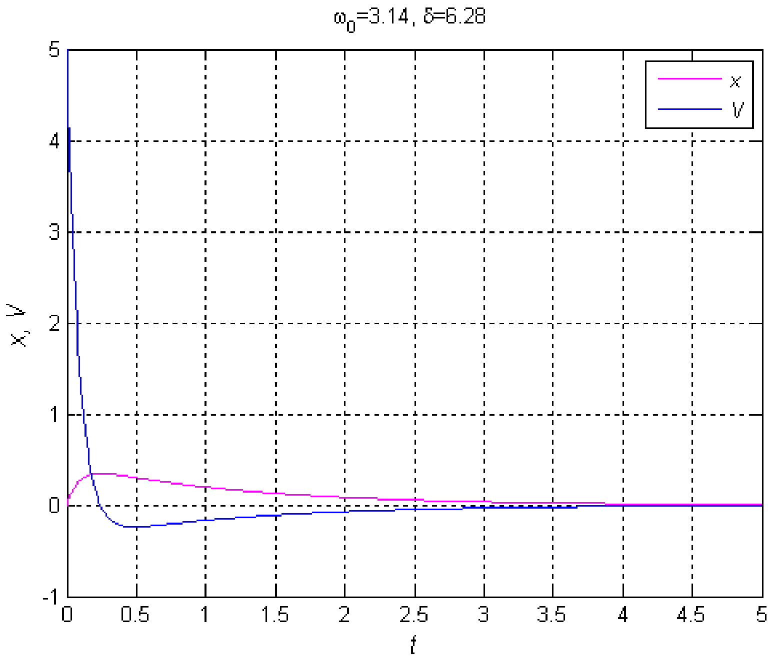
Такой тип движения называется критическим.

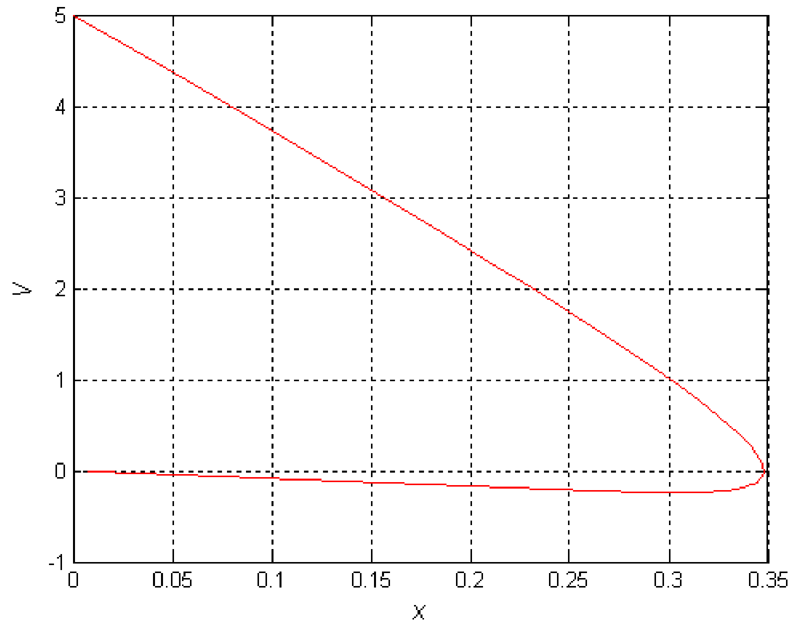


Фазовые траектории затухающих колебаний

$\delta > \omega_0$ маятник возвращается к равновесному положению не совершая колебаний.

Такой тип движения называется закритическим.





Фазовые траектории нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0$$

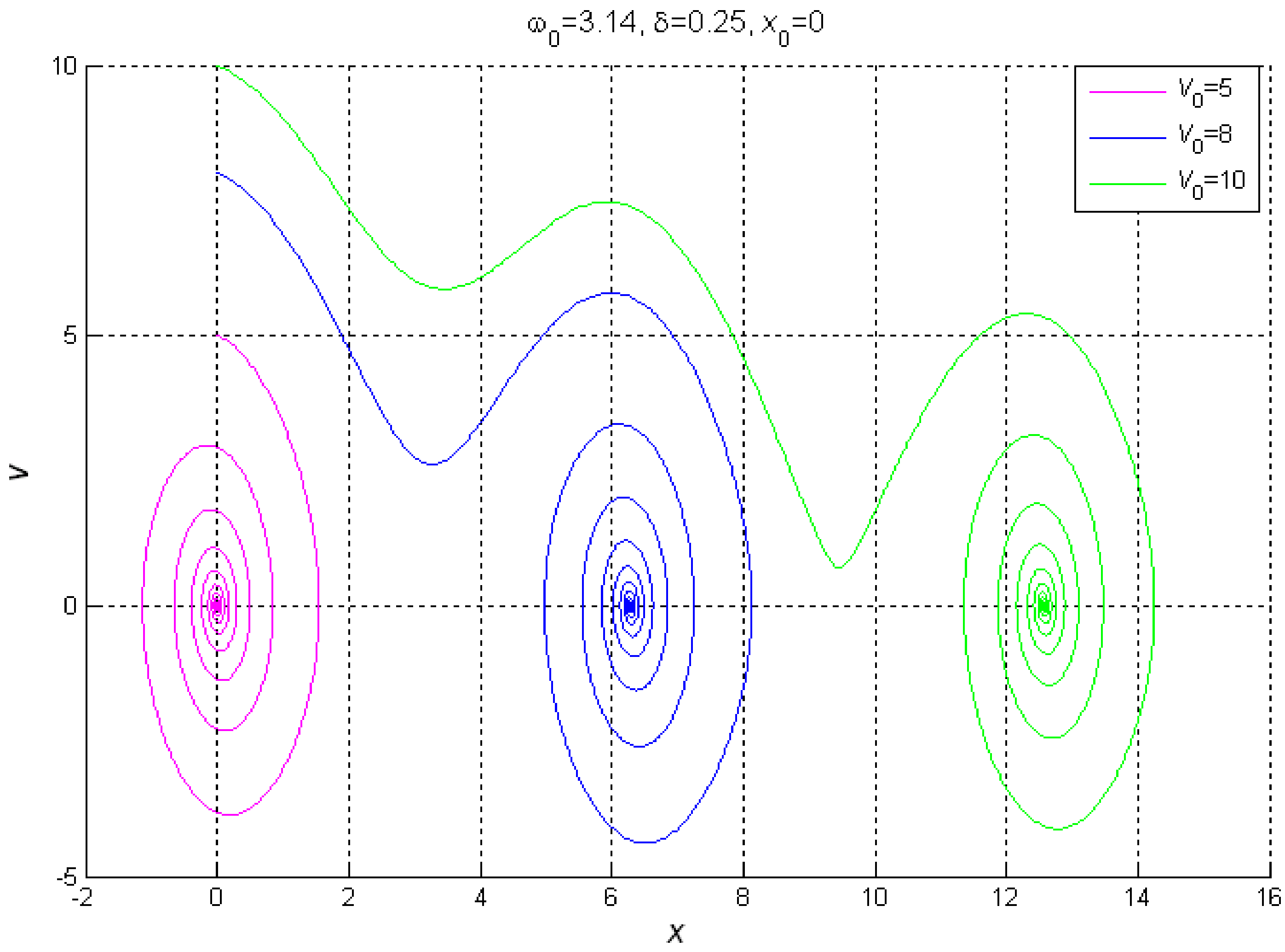
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 & y_1(0) = x(0) \\ \dot{y}_2 = -2\delta\dot{y}_1 - \omega_0^2 \sin(y_1) & y_2(0) = \dot{x}(0) \end{cases}$$

$$\dot{Y} = f(Y)$$

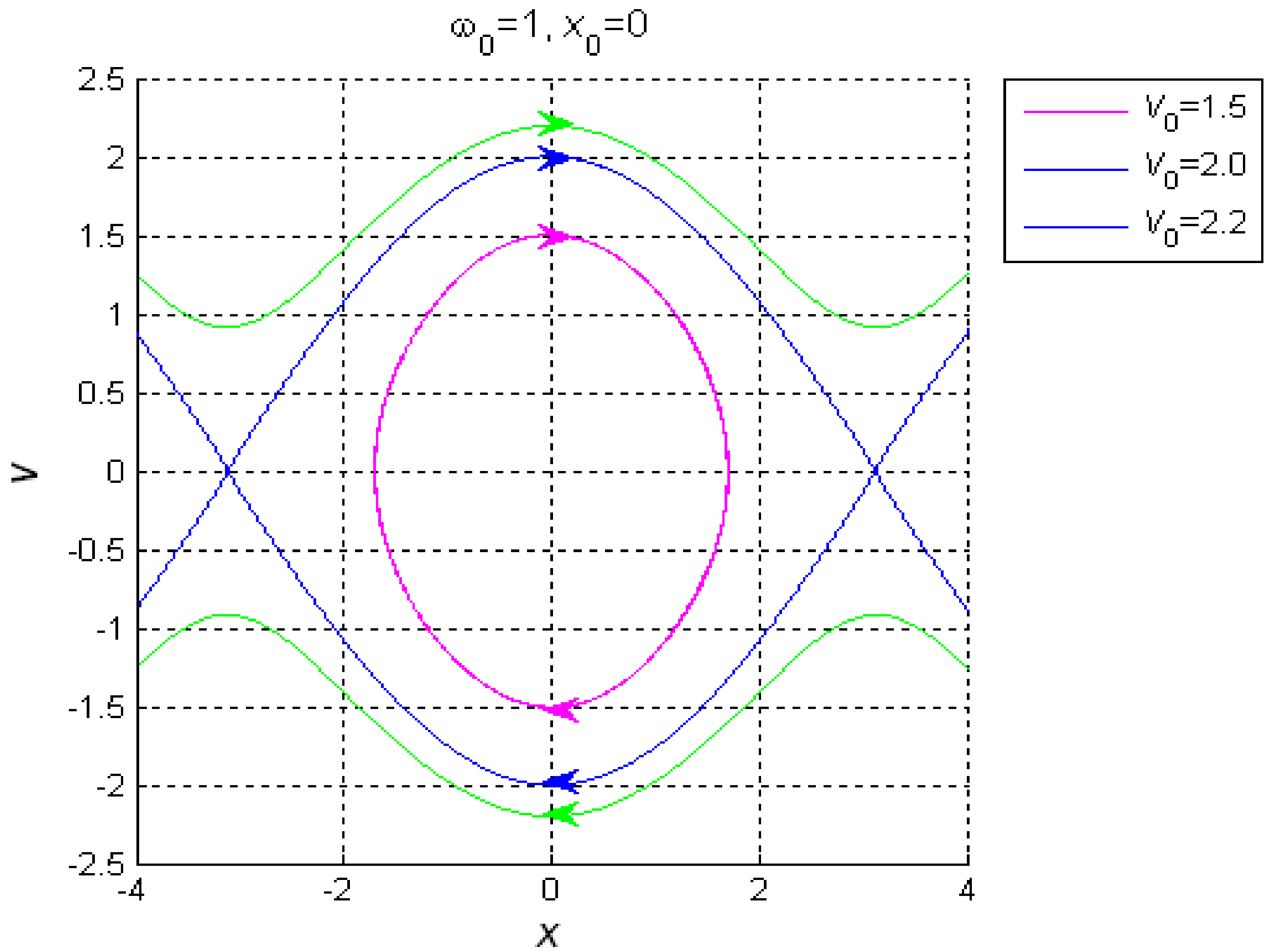
Фазовые траектории нелинейного осциллятора

```
Omega=pi; % циклическая частота
Delta = 0.25;  % коэффициент затухания
Pend0=@(t,y ) [y(2); -2*Delta*y(2)-(Omega^2)*sin(y(1))]; % правая часть
ОДУ
T0=0;  % время начала движения
TN=40;  % время окончания движения
dT=(TN-T0)/5000; % шаг по времени
Y0=0;  % начальная координата
YP0=[5;8;10];
Sg = {'', '', ''};
Cg= {'m', 'b', 'g'};
figure('Color',[1 1 1]);
hold on;
for Vel=1:size(YP0,1)
    [T,Y]=ode45(Pend0,[T0:dT:TN],[Y0, YP0(Vel)]); % решение системы ОДУ
    Lg{Vel}= sprintf('{\\itV}_0=%d',YP0(Vel));    % надписи легенды
    plot(Y(:,1),Y(:,2),Cg{Vel});                  % фазовая траектория
end;
grid on;
legend (Lg{1},Lg{2},Lg{3},-1);
xlabel('\itx','fontsize',14);
ylabel('\itv','fontsize',14);
title (sprintf('{\\omega}_0=%4.2f, {\\delta}=%4.2f,
{\\itx}_0=%d',Omega,Delta,Y0),'fontsize',12);
```

Фазовые траектории нелинейного осциллятора



Фазовые траектории нелинейного осциллятора



Сепаратриса – траектория, разделяющая фазовую плоскость на области, соответствующие разным типам движения.

Неизохронность нелинейного осциллятора

```
Omega=pi; % циклическая частота
Delta = 0.25;  % коэффициент затухания
Pend0=@(t,y ) [y(2); -2*Delta*y(2)-(Omega^2)*sin(y(1))]; % правая часть
ОДУ
T0=0;  % время начала движения
TN=10;  % время окончания движения
dT=(TN-T0)/5000; % шаг по времени
Y0=0;  % начальная координата
YP0=[2;4;6];
Sg = {'', '', ''};
Cg= {'m', 'b', 'g'};
figure('Color',[1 1 1]);
hold on;
for Vel=1:size(YP0,1)
    [T,Y]=ode45(Pend0,[T0:dT:TN],[Y0, YP0(Vel)]); % решение системы ОДУ
    Lg{Vel}= sprintf('{\\itV}_0=%d',YP0(Vel));    % надписи легенды
    plot(T,Y(:,1),Cg{Vel});                        % фазовая траектория
end;
grid on;
legend (Lg{1},Lg{2},Lg{3},-1);
xlabel('\itx','fontsize',14);
ylabel('\itv','fontsize',14);
title (sprintf('{\\omega}_0=%4.2f, {\\delta}=%4.2f,
{\\itx}_0=%d',Omega,Delta,Y0),'fontsize',12);
```

Неизохронность нелинейного осциллятора