

# ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Тепловое излучение - это свечение тел, обусловленное нагреванием. Любое электромагнитное излучение есть результат перехода молекул из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией. Тепловое излучение обусловлено внутренней энергией тела.

Тепловое излучение единственное, которое может находиться в термодинамическом равновесии с веществом. Пусть нагретое тело находится в замкнутой полости, теплоизолированной от окружающей среды. В состоянии термодинамического равновесия тело будет восполнять энергию, затраченную на тепловое излучение, за счет поглощения излучения стенок.

Даже если температуры тела и стенок полости первоначально различались, в адиабатической замкнутой системе по истечении некоторого времени произойдет выравнивание температур. Пусть температура тела меньше, чем температура стенок полости, тогда тело будет больше поглощать, чем излучать. Внутренняя энергия тела начнет увеличиваться до тех пор, пока температура не сравняется с температурой стенок. Дальнейшее повышение температуры невозможно, поскольку вся поглощенная энергия будет излучена.

Равновесное тепловое излучение однородно, изотропно и не поляризовано. Говоря о равновесном излучении, можно говорить о его температуре так же обоснованно, как и о температуре тела и стенок. Из второго начала термодинамики следует, что объемная плотность теплового излучения  $W_T$  не зависит от природы вещества и геометрических размеров полости и тела, а определяется их температурой, т.е. является универсальной функцией температуры. Спектральное распределение этой энергии характеризует функция  $W_{\nu,T}$ . Спектр теплового излучения сплошной.

Для количественного описания теплового излучения определим *энергетическую светимость*  $R_T$  как энергию, излучаемую с единицы поверхности тела в единицу времени во всем интервале частот (размерность  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \cdot \text{с}} \right]$ ). Тепловое излучение содержит волны различной частоты, отражает этот факт *спектральная плотность энергетической светимости*  $R_{\nu,T}$  – энергия, излучаемая с единицы поверхности в единицу времени в единичном интервале частот (размерность  $\left[ \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2} \right]$ ). Очевидно, что

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu .$$

*Спектральная поглощательная способность*  $A_{\nu,T}$  показывает, какая доля энергии в единичном интервале частот электромагнитных волн поглощается при падении на поверхность тела. Спектральная поглощательная способность, по своему определению, безразмерная величина.

*Абсолютно черное тело* - это тело, которое полностью поглощает падающее на него излучение любой частоты при любой температуре. Из определения следует, что для такого тела

$$A_{\nu,T} \equiv 1 .$$

Абсолютно черное тело – идеальная физическая модель. Абсолютно черных тел в природе не существует. Сажа, например, в значительной мере поглощает излучение лишь в видимой части спектра электромагнитных волн. Наиболее близка к абсолютно черному

телу замкнутая полость с маленьким отверстием. Луч света, попавший в отверстие, испытает многократные отражения, теряя при каждом отражении часть энергии. В результате из отверстия выйдет лишь ничтожная часть энергии.

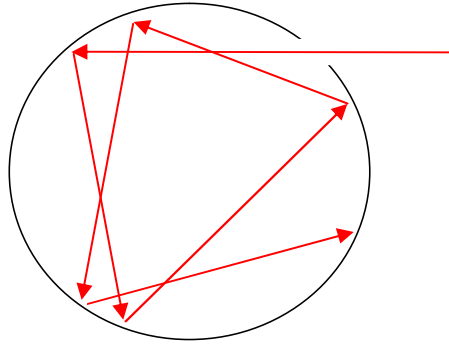


Рисунок 1

Тепловое излучение стенок полости при малом отверстии примет внутри полости равновесный характер. Излучение, выходящее через отверстие, будет соответствовать излучению абсолютно черного тела.

Для описания излучения реальных тел вводится понятие серого тела. Его спектральная поглощательная способность  $A_{\nu,T} < 1$ . Отношение спектральной поглощательной способности серого тела к спектральной поглощательной способности абсолютно черного тела называется степенью черноты.

Пусть система находится в состоянии термодинамического равновесия. За время  $dt$  с площадки  $dS$  поверхности абсолютно черного тела излучается энергия  $R_T^{A_{\nu T}} dtdS$ . Столько же энергии падает на площадку. Если площадка  $dS$  есть основание цилиндра высотой  $cdt$ ,  $c$  – скорость света, то энергия теплового излучения, заключенная в цилиндре, равна  $W_T c dtdS$ .

Положим, что энергия распространяется вдоль направляющей цилиндра  $cdt$  и двух ортогональных ей направлениях. Изотропность теплового излучения позволяет считать, что на каждое направление приходится одна треть энергии. Для энергии, распространяющейся вдоль направляющей, справедливо следующее: половина энергии движется к площадке, а половина - от нее. Тогда за время  $dt$  на площадку попадет  $1/6$  энергии, заключенной в цилиндре, и, следовательно

$$R_T^{A_{\nu T}} dtdS = \frac{1}{2} \frac{1}{3} W_T c dtdS.$$

Точный расчет лишь изменит коэффициент с  $1/6$  на  $1/4$ , оставив вывод прежним: светимость абсолютно черного тела и объемная плотность равновесного теплового излучения, так же как и их спектральные аналоги, связаны простыми соотношениями

$$R_T^{A_{\nu T}} = \frac{c}{4} W_T \text{ и } R_{\nu,T}^{A_{\nu T}} = \frac{c}{4} W_{\nu,T}.$$

Последнее выражение фактически определяет количество энергии, падающей на единицу поверхности в единицу времени в единичном интервале частот через спектральную плотность объемной плотности энергии равновесного теплового излучения.

## Закон Кирхгофа

Внутри замкнутой оболочки, температура которой поддерживается постоянной, помещено несколько тел. Обмен энергией между телами и стенками полости осуществляется за счет теплового излучения. Как показывает опыт, даже если

первоначально температуры тел различались, то по истечении некоторого времени в полости установится тепловое равновесие, а значит, каждое из тел будет излучать столько же энергии, сколько и поглощать.

Пусть  $W_{\nu,T}$  спектральная плотность энергии равновесного теплового излучения полости. Тогда, выбрав одно из тел, запишем для него поглощенную энергию в виде

$$dE_{\text{пог}} = A_{\nu,T} \frac{c}{4} W_{\nu,T} dS dt d\nu,$$

а излученную как

$$dE_{\text{изл}} = R_{\nu,T} dS dt d\nu.$$

Приравнивая излученную и поглощенную энергии, получаем  $\frac{c}{4} W_{\nu,T} = \frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}}$ .

Аналогично выражение можно записать для любого тела, находящегося в полости, тогда

$$\frac{c}{4} W_{\nu,T} = \left( \frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} \right)_1 = \left( \frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} \right)_2 = \left( \frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} \right)_3 = \dots,$$

где индексы 1,2,3,... относятся к разным телам.

Спектральная плотность энергетической светимости  $(R_{\nu,T})_i$  и спектральная поглощательная способность  $(A_{\nu,T})_i$  у каждого из  $i$ -го тела может существенно различаться, а вот их отношение не зависит от свойств материала и геометрических характеристик тел.

Последнее утверждение составляет суть закона, открытого Кирхгофом:

- **отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела и является универсальной функцией только частоты и температуры.**

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}.$$

Функцию  $r_{\nu,T}$  также называют универсальной функцией Кирхгофа.

Применяя закон Кирхгофа для абсолютно черного тела, спектральная поглощательная способность которого  $A_{\nu,T} \equiv 1$ , получаем, что его спектральная плотность энергетической светимости совпадает с универсальной функцией Кирхгофа

$$r_{\nu,T} = R_{\nu,T}^{\text{АЧТ}}.$$

Из закона Кирхгофа следует ряд важных выводов. Чем больше тело излучает энергии на определенной частоте, тем больше на этой же частоте оно и поглощает. Из всех тел, находящихся при одинаковой температуре, наибольшим излучением обладает абсолютно черное тело.

Из того, что функция Кирхгофа носит универсальный характер, следует, что в основе теплового излучения тел лежит некий фундаментальный, общий для тел любой природы, физический закон. Именно этим обусловлен интерес к проблеме нахождения такой функции.

Малое отверстие в полости с нагретыми стенками является практически идеальной моделью абсолютно черного тела. Исследуя излучение такого отверстия, можно определить вид универсальной функции Кирхгофа. Эксперимент можно проделать, разлагая излучение на спектральные составляющие, например, с помощью дифракционной решетки, и измеряя интенсивность каждой из них.

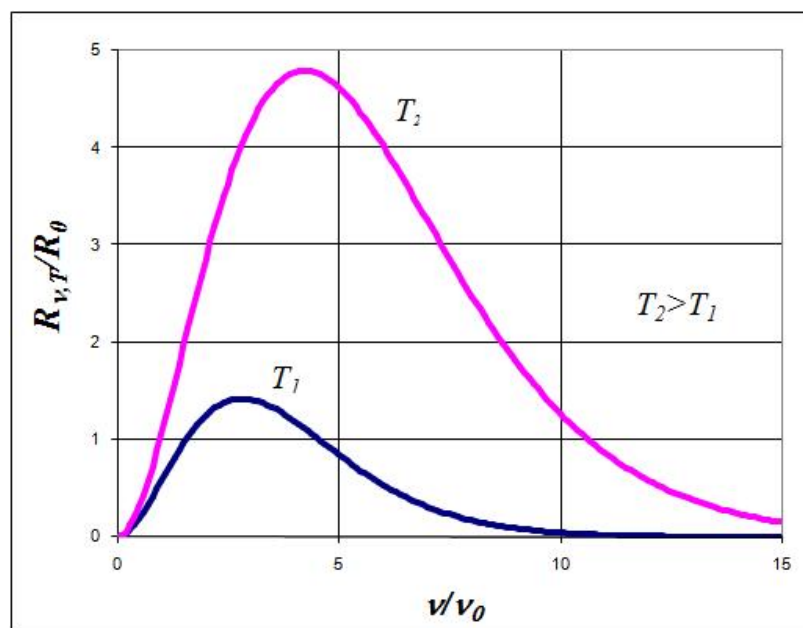


Рисунок 2

Рисунок 2 демонстрирует зависимость спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела от частоты при двух значениях температур, при этом  $T_2 = 1.5T_1$ . Частота нормирована на  $\nu_0 = kT_1/h$ , а спектральная плотность энергетической светимости - на  $R_0 = 2\pi h/c^2$ .

Распределение энергии в спектре излучения неравномерное. Кривые имеют явный максимум, который с ростом температуры смещается в область высоких частот. Суммарная излученная энергия (площадь, ограниченная кривой и осью абсцисс) с ростом температуры увеличивается.

### Закон Стефана – Больцмана

Стефан эмпирически, анализируя экспериментальные результаты, а затем Больцман на основе термодинамического анализа сформулировали следующий закон:

- *энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени термодинамической температуры,*

$$R_T = \sigma T^4,$$

коэффициент пропорциональности называется коэффициентом Стефана – Больцмана и имеет численное значение  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$ .

Из закона Стефана – Больцмана следует, что площади под кривыми, Рисунок 2, различаются в  $(1.5)^4 \approx 5.06$  раза.

### Закон смещения Вина

Изучая термодинамику теплового излучения, Вин установил зависимость длины волны, соответствующей максимуму спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела (универсальной функции Кирхгофа), от температуры:

- *длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела, обратно пропорциональна термодинамической температуре излучающего тела*

При повышении температуры максимум универсальной функции Кирхгофа смещается в сторону более коротких волн и притом так, что выполняется соотношение

$$\lambda_{\max} T = b.$$

Экспериментально установлено значение постоянной Вина  $b = 2.898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ . Закон Вина объясняет переход излучения в длинноволновую часть спектра при остывании (переход белого каления в красное при остывании металла).

Связь спектра излучения и температуры излучателя позволяет определить цветовую температуру. Цветовая температура тела - температура абсолютно черного тела, излучающего в том же цветовом тоне, что и тело. Понятие о цветовой температуре применяется в астрофизике, фотометрии, колориметрии и оптической пирометрии.

### **Формула Рэлея-Джинса**

Общий метод определения универсальной функции Кирхгофа, основанный на применении методов статистической физики к тепловому излучению, был предложен Рэлеем, а затем развит Джином.

Согласно теореме статистической механики о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы, в состоянии статистического равновесия на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится в среднем  $kT/2$  энергии, а на колебательную степень свободы -  $kT$ .

Равновесное излучение в полости представимо системой стоячих электромагнитных волн. Каждое электромагнитное колебание обладает энергией  $kT$ ,  $kT/2$  приходится на электрическую составляющую, и  $kT/2$  - на магнитную составляющую электромагнитного колебания.

Расчитав количество стоячих волн в единичном интервале частот, приходящихся на единицу объема, Рэлей и Джинс получили выражение для универсальной функции

Кирхгофа в виде  $r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle$ , а поскольку  $\langle \varepsilon \rangle = kT$ , то окончательно

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT.$$

Формула Рэлея – Джинса удовлетворяет экспериментальным данным лишь в области низких частот. В области высоких частот она приводит к абсурдным результатам. Интегрируя по всему диапазону частот, получаем, что энергетическая светимость абсолютно черного тела есть бесконечная величина

$$R_T^{AQT} = \int_0^{\infty} r_{\nu, T}(\nu) d\nu = \infty.$$

Очевидная невозможность построить теорию равновесного теплового излучения в рамках классической физики получила образное название – **ультрафиолетовая катастрофа**.

### **Формула Планка**

Планк предположил, что классические представления о том, что энергия системы изменяется непрерывным образом, неприменимы к процессам излучения – поглощения.

Согласно гипотезе Планка энергия гармонического осциллятора принимает не произвольные значения, а образует дискретный ряд  $0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \dots$ , где  $\varepsilon_0$  – минимальный квант энергии, определяемый характеристиками осциллятора.

Под осциллятором можно понимать и частицу, совершающую колебания, и стоячую волну.

Находясь в полости, стенки которой поддерживаются при постоянной температуре, осциллятор будет не только излучать, но и поглощать энергию. Установится состояние равновесия с определенным распределением осцилляторов по энергиям. Это распределение определяется температурой излучения. По теореме Больцмана вероятность нахождения на  $n$  – том энергетическом уровне пропорциональна  $\exp(-\varepsilon_n/kT)$ . Пусть  $N$  – количество осцилляторов в термодинамической системе, тогда заселенность  $n$  – го энергетического уровня -  $N_n = N \exp(-\varepsilon_n/kT)$ .

Для средней энергии осциллятора, получаем

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n N_n}{\sum_{n=0}^{\infty} N_n} = \varepsilon_0 \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \exp(-nx)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx)},$$

где  $x = \varepsilon_0/kT$ .

Знаменатель можно вычислить, рассматривая его как геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-nx) = \frac{1}{1 - \exp(-x)}.$$

Дифференцируя это выражение по  $x$ , получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \exp(-nx) = \frac{\exp(-x)}{(1 - \exp(-x))^2}.$$

Тогда средняя энергия

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0/kT) - 1}.$$

Планк предположил, что минимальный квант энергии осциллятора и его частота связаны выражением

$$\varepsilon_0 = h\nu.$$

Константа  $h$  называется постоянной Планка, ее значение  $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$  Дж·с.

Подставляя полученное Планком выражение в формулу Рэля – Джинса, получаем формулу Планка для универсальной функции Кирхгофа

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}.$$

Решение, предложенное Планком, находится в полном согласии с данными экспериментальных наблюдений. Более того, приведенные выше формулы и законы являются либо частным случаем формулы Планка, либо прямо следуют из нее.

В области малых частот  $h\nu \ll kT$  формула Планка переходит в формулу Рэля – Джинса

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1} \approx \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{h\nu/kT} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT.$$

Энергетическую светимость абсолютно черного тела получаем, интегрируя формулу Планка по всему диапазону частот. Переходя к безразмерной переменной  $x = h\nu/kT$ , получаем

$$R_T = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\exp(x)-1}.$$

Определенный интеграл, по сути, безразмерная константа, равная  $\pi^4/15$ . Поэтому полученный результат фактически представляет собою закон Стефана – Больцмана  $R_T = \sigma T^4$ . Коэффициент пропорциональности (постоянная Стефана – Больцмана) выражается через фундаментальные константы

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3},$$

и хорошо согласуется со значениями, полученными экспериментально.

Для того, чтобы получить закон смещения Вина, запишем формулу Планка в переменных  $\lambda, T$ . Поскольку  $r_{\nu,T} d\nu = r_{\lambda,T} d\lambda$ , а  $\lambda \nu = c$ , то

$$r_{\lambda,T} = -r_{\nu,T} \frac{c}{\lambda^2}.$$

Знак минус показывает, что с ростом частоты длина волны уменьшается. Его можно опустить. Тогда,

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(h\nu/kT)-1}.$$

Введем безразмерную переменную  $y = \frac{hc}{\lambda kT}$ . Задача свелась к определению максимума

функции  $\frac{y^5}{\exp(y)-1}$ . Приравняв первую производную нулю, получаем трансцендентное уравнение  $5(\exp(y)-1) = y \cdot \exp(y)$ . Решением уравнения является значение  $y = 4.965$ , поэтому

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.965k} = b.$$

Полученное значение соответствует результатам измерений.

Таким образом, формула Планка, в основе которой лежит гипотеза, противоречащая классической физике, дает исчерпывающее решение задачи о тепловом излучении и с исключительной точностью соответствует наблюдениям.