Лекция 13

Распределение Максвелла.

Число степеней свободы молекулы. Распределение энергии по степеням свободы.

Внутренняя энергия газа.

Сведения из теории вероятности

Вероятность события характеризуется кратностью его повторения. Если в N случаях i-е событие происходит N_i раз, то вероятностью P_i этого события называют величину

$$P_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} \approx \frac{N_i}{N}$$

Сумма вероятностей всех возможных событий равна единице

$$\sum_i P_i = 1$$

Сведения из теории вероятности

Вероятность одновременного наступления двух независимых событий равна произведению вероятностей каждого из событий

$$P_{i(u)k} = P_i P_k$$

Вероятность наступления одного или другого независимого события равна сумме вероятностей каждого из событий

$$P_{i(или)k} = P_i + P_k$$

Среднее значение произвольной функции случайной величины находится по формуле

$$g(x)_{cp} = \sum_i P_i g(x_i)$$

Сведения из теории вероятности

Пусть случайная величина принимает непрерывный ряд значений. В качестве характеристики вероятности принимается функция f(x), равная отношению вероятности dP попадания случайной величины в физически малый интервал dx, содержащий заданное значение x, к величине этого интервала

$$f(x) = \frac{dP(x)}{dx}$$

Функция f(x) называется плотностью вероятности.

Если система состоит из большого числа однотипных объектов в однотипных условиях, то вероятность того, что произвольно выбранный объект будет обладать требуемым свойством, приблизительно равна доле (относительному числу) объектов, обладающих требуемым свойством.

Распределение Максвелла по модулю скорости

Вероятность того, что модуль скорости молекулы находится в интервале V, $V+dV$, равна dP.

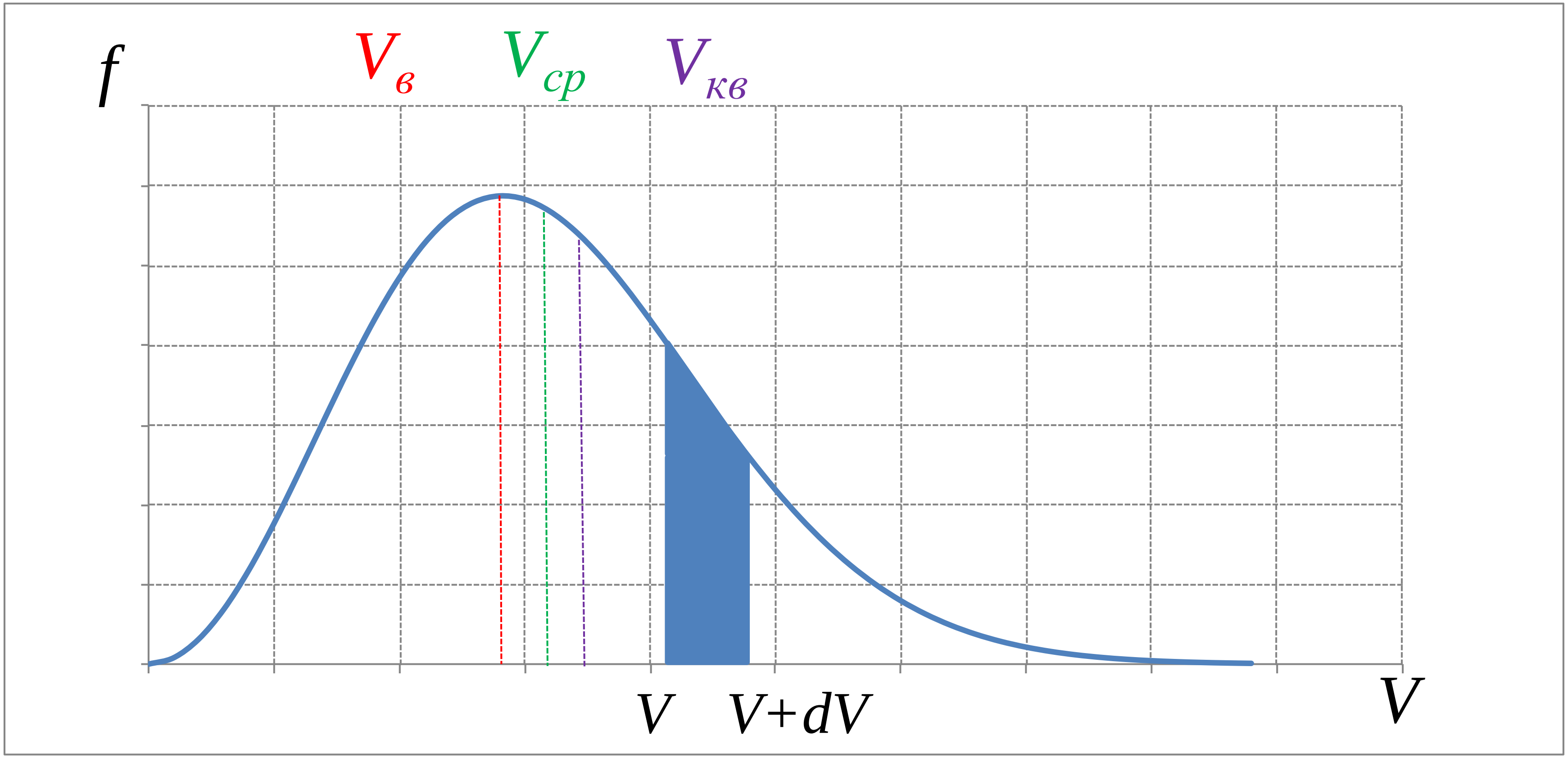
Доля молекул, модуль скорости которых находится в интервале V, $V+dV$, равна dN/N.

$$dP = \frac{dN}{N} = f(V)\,dV$$

$$f(V) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)$$

Функция плотности вероятности для модуля скорости зависит от свойств газа и системы.

Распределение Максвелла по модулю скорости



Распределение Максвелла по модулю скорости

$$f(V) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)$$

Условие нормировки

$$\int_0^\infty f(V)\,dV = 1$$

Нахождение наиболее вероятной скорости

$$\frac{df}{dV} = 0$$

$$\left(2V - V^2\frac{2mV}{2kT}\right)\exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right) = 0$$

$$V_{в} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$$

Распределение Максвелла по модулю скорости

Средняя скорость

$$V_{cp} = \int_0^{\infty} Vf(V)\,dV$$

$$V_{cp} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

Средняя квадратичная скорость

$$V_{\kappa\textit{в}} = \sqrt{\int_0^{\infty} V^2 f(V)\,dV}$$

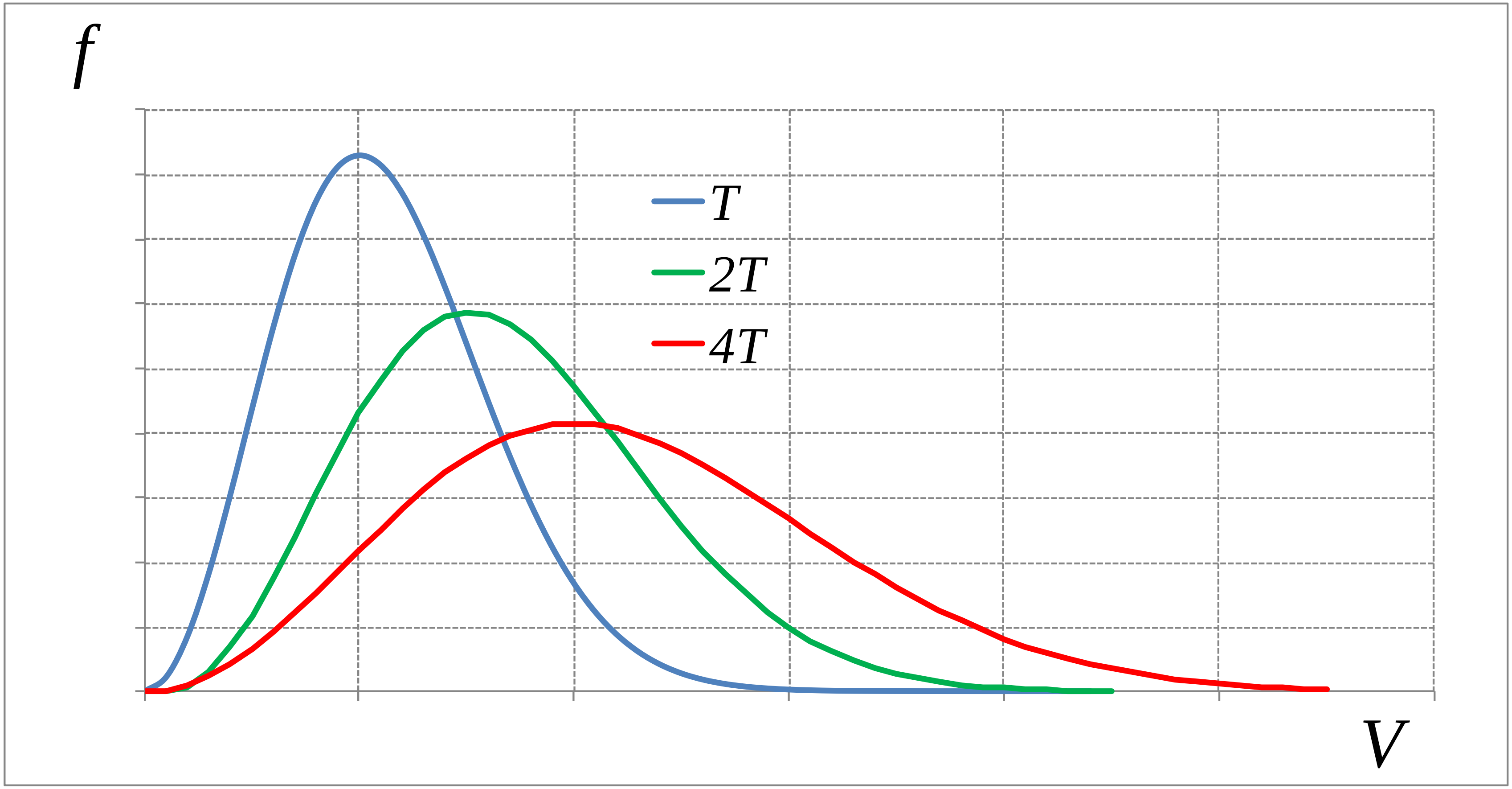
$$V_{\kappa\textit{в}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$V_{\textit{в}} < V_{cp} < V_{\kappa\textit{в}}$$

$$V_{cp} \approx 1.13 V_{\textit{в}}$$

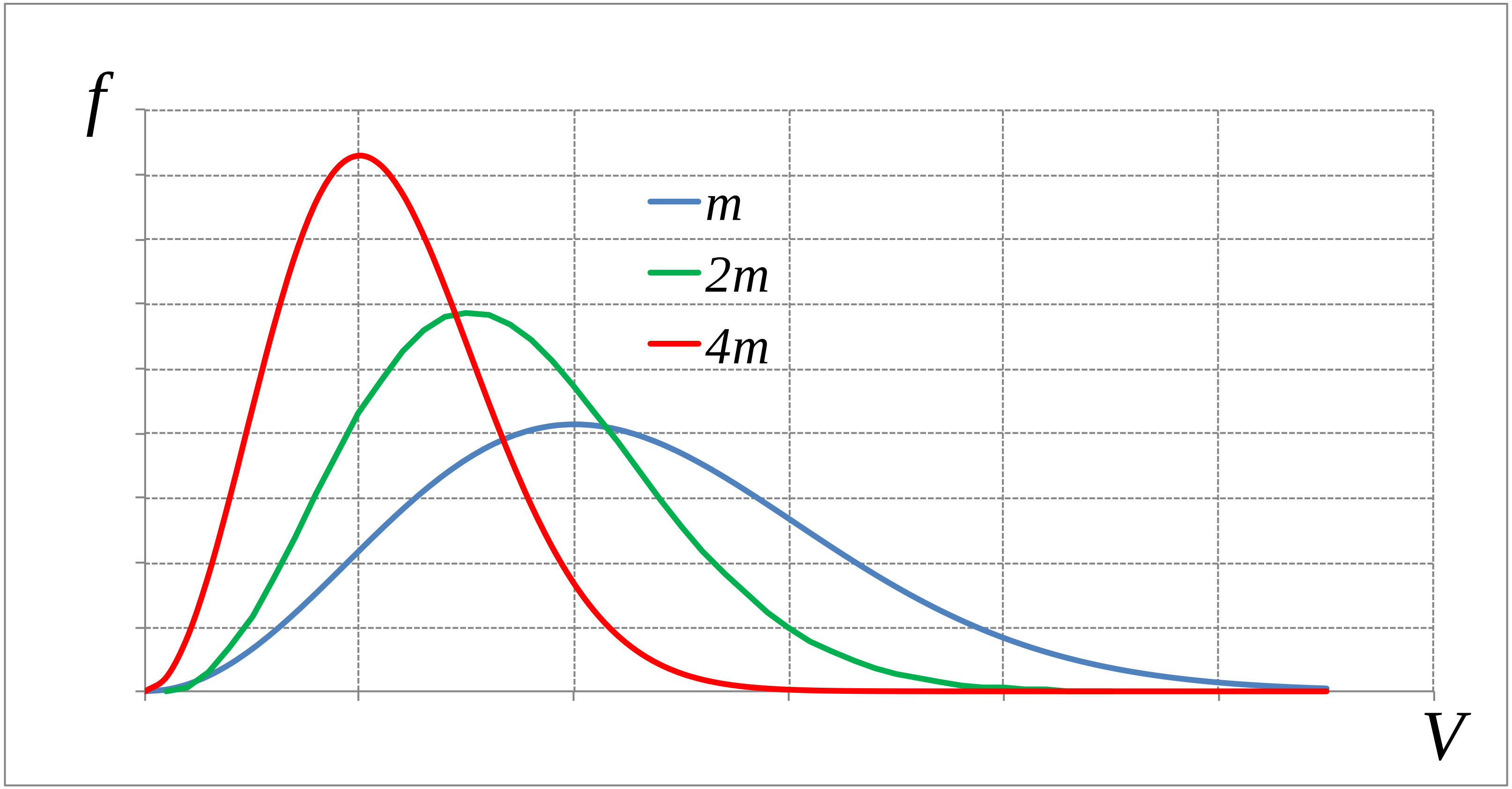
$$V_{\kappa\textit{в}} \approx 1.22 V_{\textit{в}}$$

Распределение Максвелла по модулю скорости



Увеличение температуры приводит к тому, что распределение по модулю скорости становится ниже и шире, а максимум распределения смещается в сторону больших скоростей.

Распределение Максвелла по модулю скорости



Уменьшение массы молекул идеального газа приводит к тому, что распределение по модулю скорости становится ниже и шире, а максимум распределения смещается в сторону больших скоростей.

Распределение Максвелла по кинетической энергии

$$dP = F(E)dE \qquad dP = f(V)dV \qquad F(E) = f(V)\,dV/dE$$

$$f(V) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} V^2 \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right)$$

$$E = \frac{mV^2}{2} \qquad dE = mVdV$$

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\sqrt{E}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

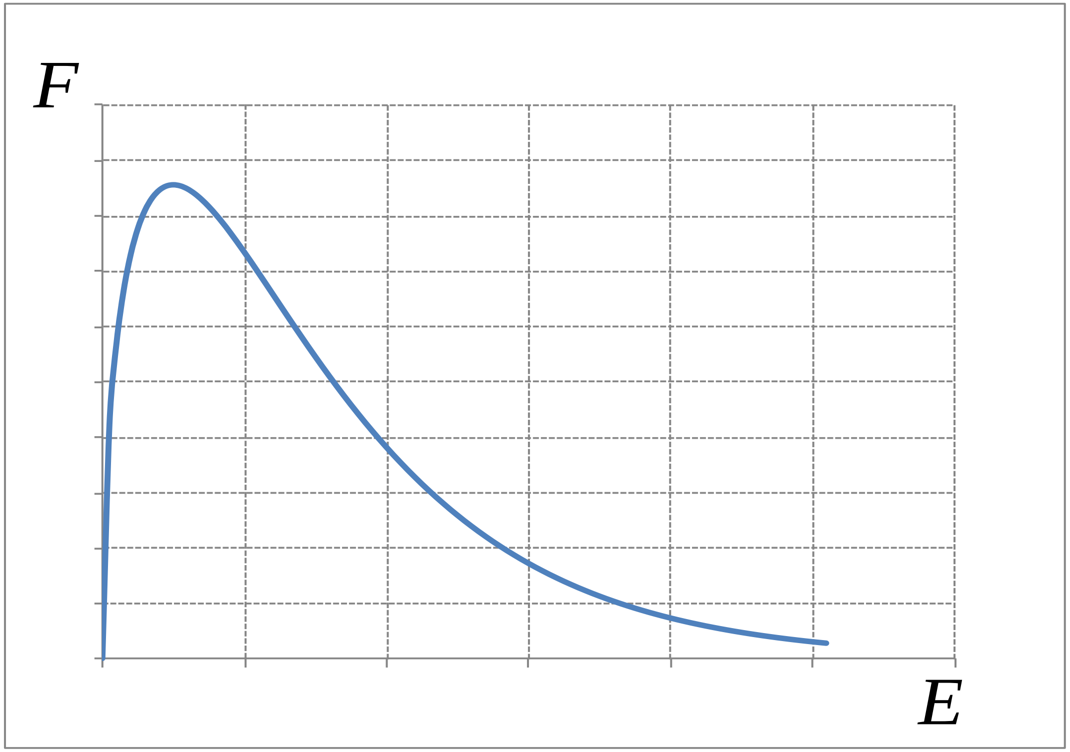
Распределение Максвелла по кинетической энергии

$$F(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\sqrt{E}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$$

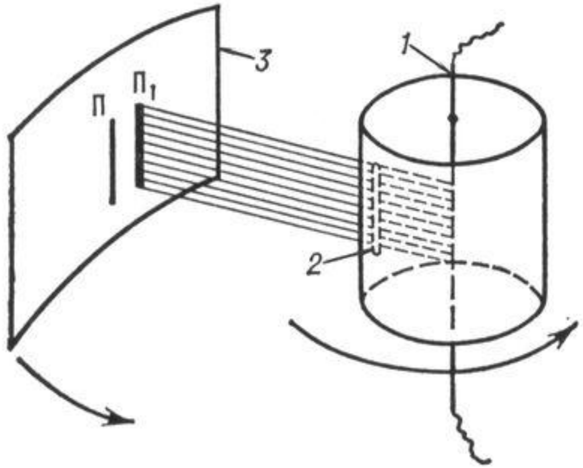
$$E_{cp} = \int_0^{\infty} EF(E)\,dE$$

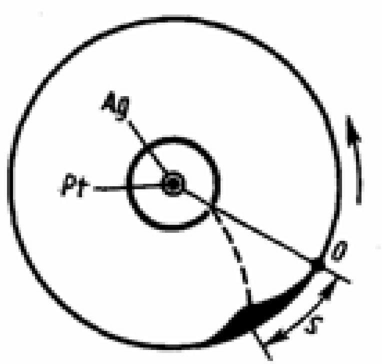
$$E_{cp} = \frac{3kT}{2}$$

$$\frac{dF}{dE} = 0 \qquad E_{в} = \frac{kT}{2}$$



Опыт Штерна





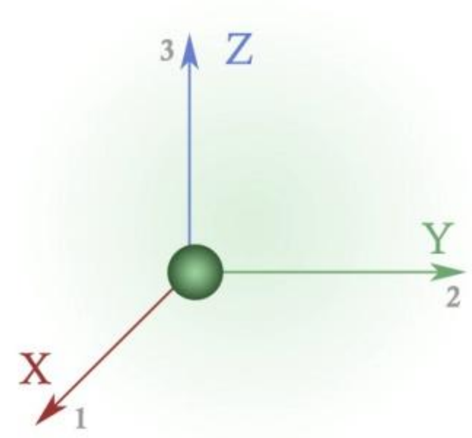
$$S = R\Delta\varphi \qquad \Delta\varphi = \omega\Delta t$$

$$V = \frac{R-r}{\Delta t} = \frac{R-r}{S}\omega R$$

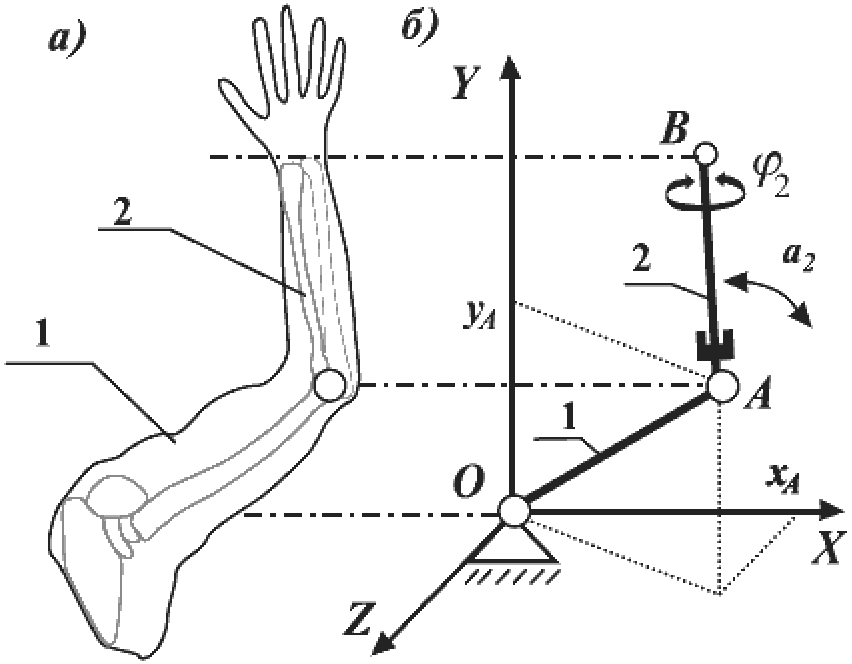
Число степеней свободы

Число степеней свободы - минимальное количество независимых переменных, полностью определяющих положения системы в пространстве.

Эти переменные называют обобщёнными координатами.



Число степеней свободы

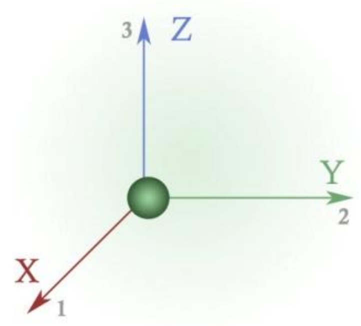


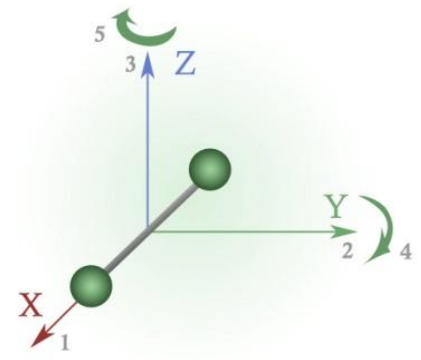
Число степеней свободы молекул

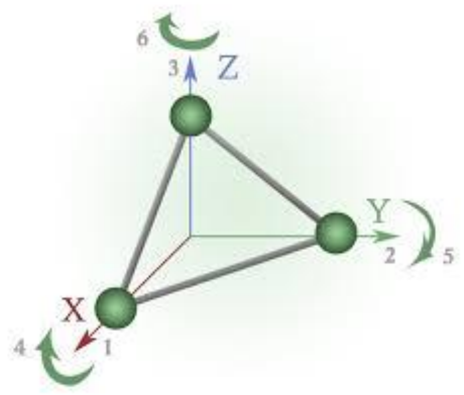
Одноатомная

Двухатомная

Трех и более атомная







$$\left(x, y, z\right)$$

$$\left(x, y, z, \alpha, \beta\right)$$

$$\left(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\right)$$

$$i = 3$$

$$i = 3 + 2 = 5$$

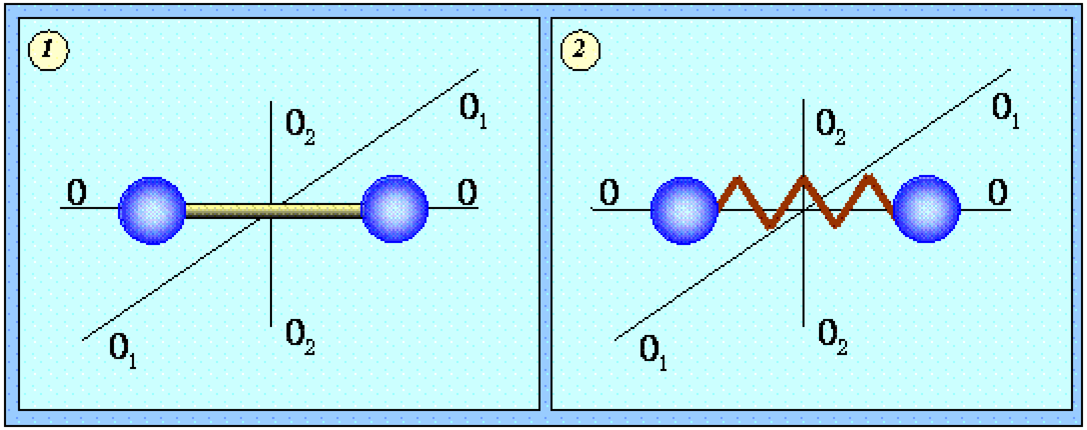
$$i = 3 + 3 = 6$$

поступательные

поступательные + вращательные

Число степеней свободы молекул

Колебательная степень свободы



Внутренняя энергия

Внутренняя энергия макросистемы определяется как сумма кинетических и потенциальных энергий взаимодействия микрочастиц этой системы.

Внутренняя энергия - есть функция состояния макросистемы.

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа равна сумме кинетических энергий поступательного движения его атомов.

$$U = N\left\langle E_{к}\right\rangle = \frac{3}{2}kTN$$

Теорема Больцмана о равномерном распределении тепловой энергии по степеням свободы

Для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степень свободы молекулы приходится *kT/2* энергии, а на колебательную степень свободы – *kT.*

$$i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{кол}$$

$$\langle E_к \rangle = \frac{i}{2} kT$$

Внутренняя энергия моля газа

$$U_\mu = N_A \langle E_к \rangle = \frac{i}{2} k N_A T = \frac{i}{2} RT$$