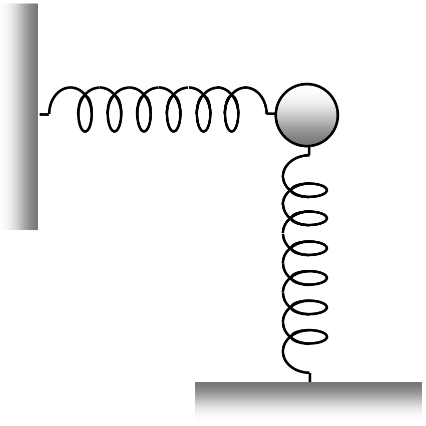
Лекция 7

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний



$$x = A\sin(\omega t + \alpha) \qquad y = B\sin(\omega t + \beta)$$

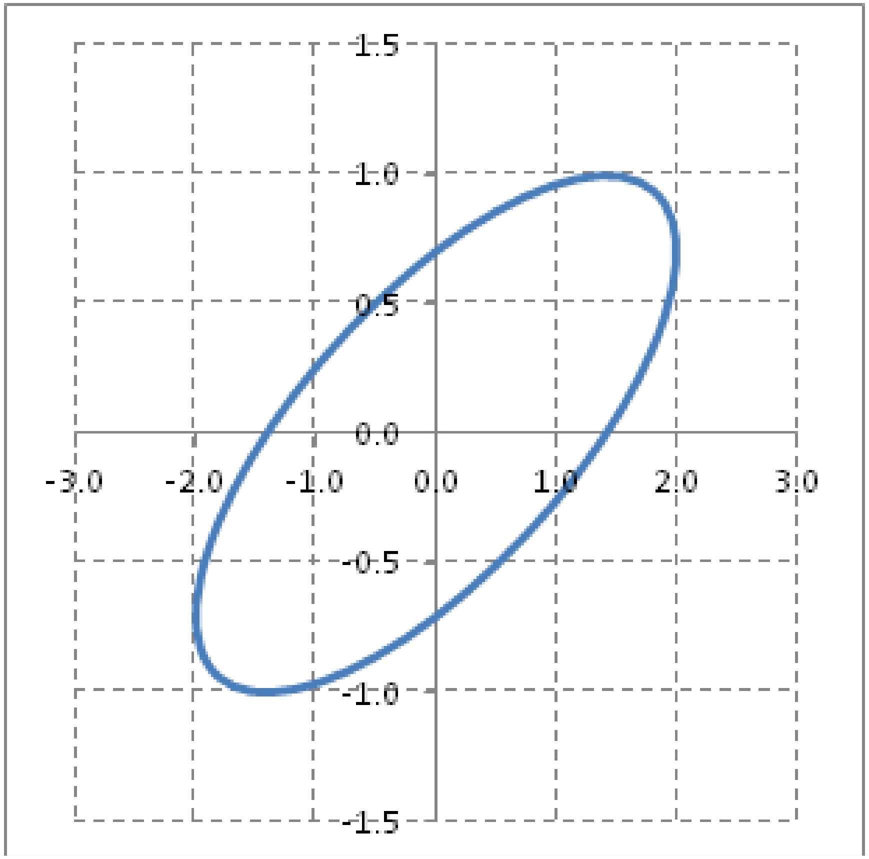
$$\alpha = 0 \quad \sin\omega t = x/A \quad \cos\omega t = \sqrt{1-(x/A)^2}$$

$$y/B = \sin\omega t\cdot\cos\beta + \cos\omega t\cdot\sin\beta$$

$$y/B = x/A\cdot\cos\beta + \sqrt{1-(x/A)^2}\cdot\sin\beta$$

$$y/B - x/A\cdot\cos\beta = \sqrt{1-(x/A)^2}\cdot\sin\beta$$

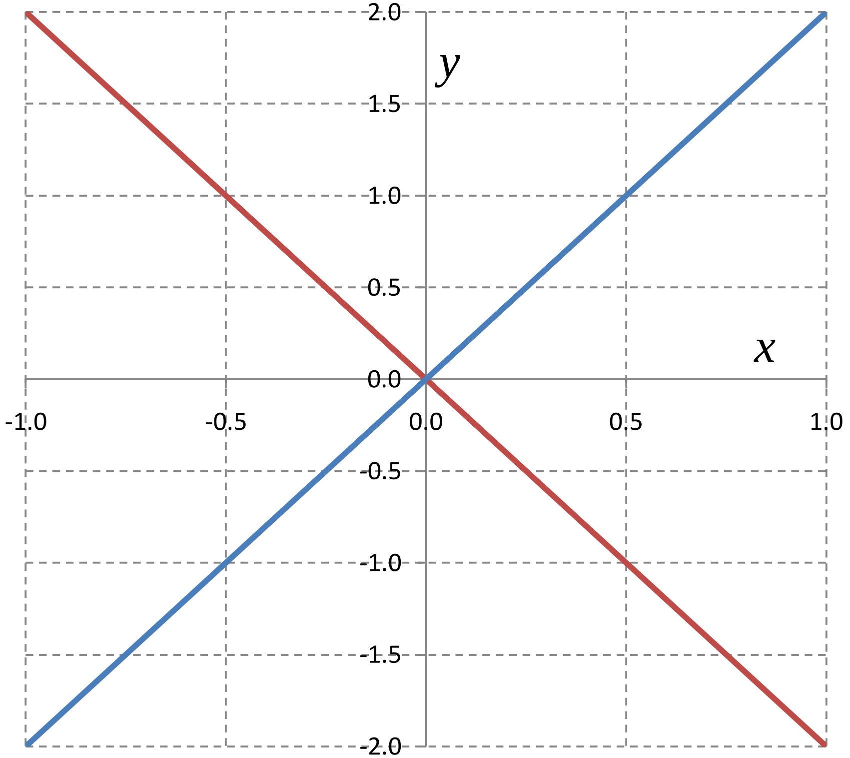
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 - 2\frac{xy}{AB}\cos\beta + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \sin^2\beta$$



Траектория результирующего колебания представляет собой эллипс, располагающийся в прямоугольнике со сторонами *A* и *B*.

$$\beta = m\pi;\ m = 0, \pm 1, \pm 2...$$

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 \pm 2\frac{xy}{AB} + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

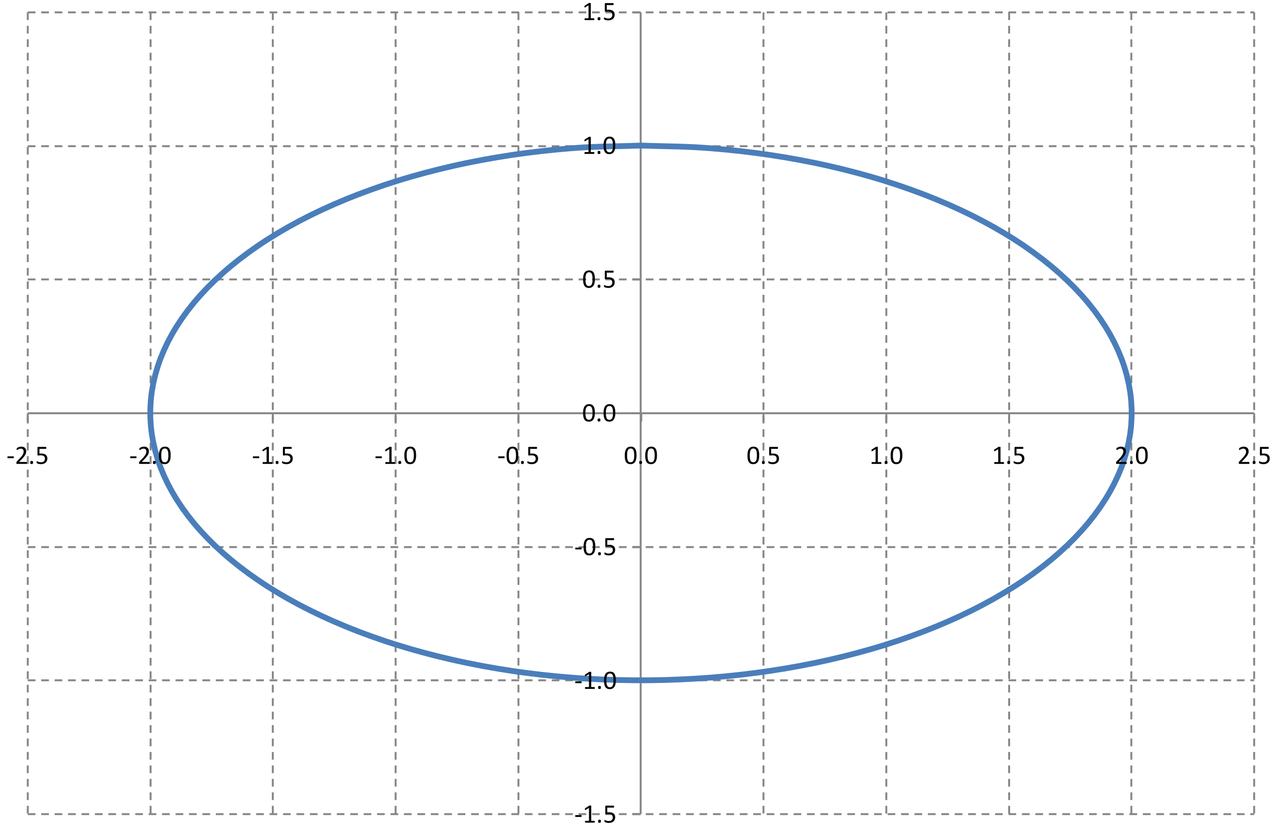


$$y = \pm\frac{B}{A}x$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Линейно-поляризованные колебания

$$\beta = (m + 1/2)\pi; \; m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots \qquad \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = 1$$



Если амплитуды складываемых колебаний совпадают, *A*=*B*, то траектория результирующего колебания – окружность. Такие колебания называют циркулярно-поляризованными.

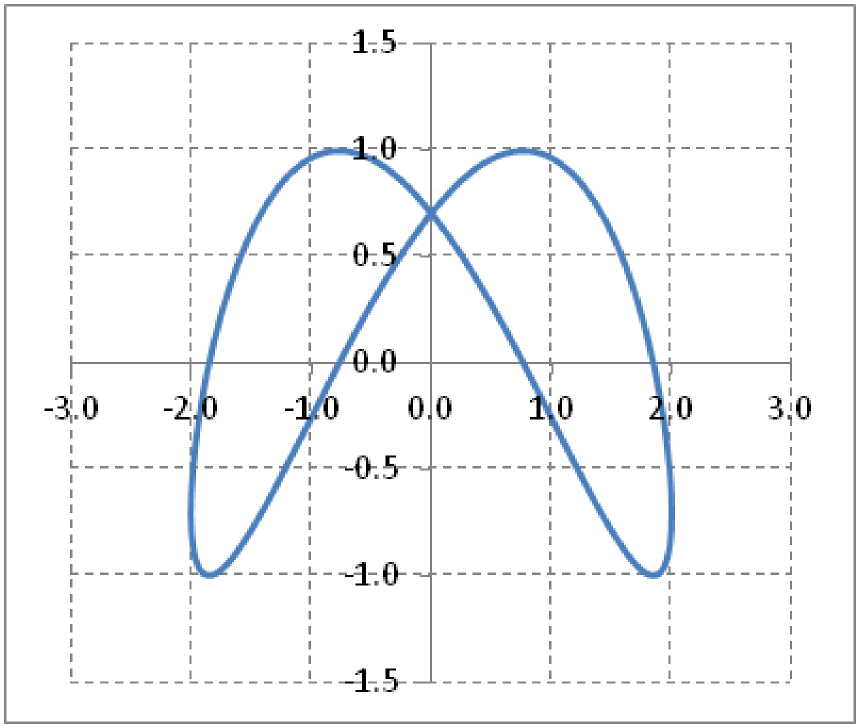
Фигуры Лиссажу

Фигуры Лиссажу - замкнутые кривые, возникающие при сложении взаимно перпендикулярных колебаний с кратными частотами.

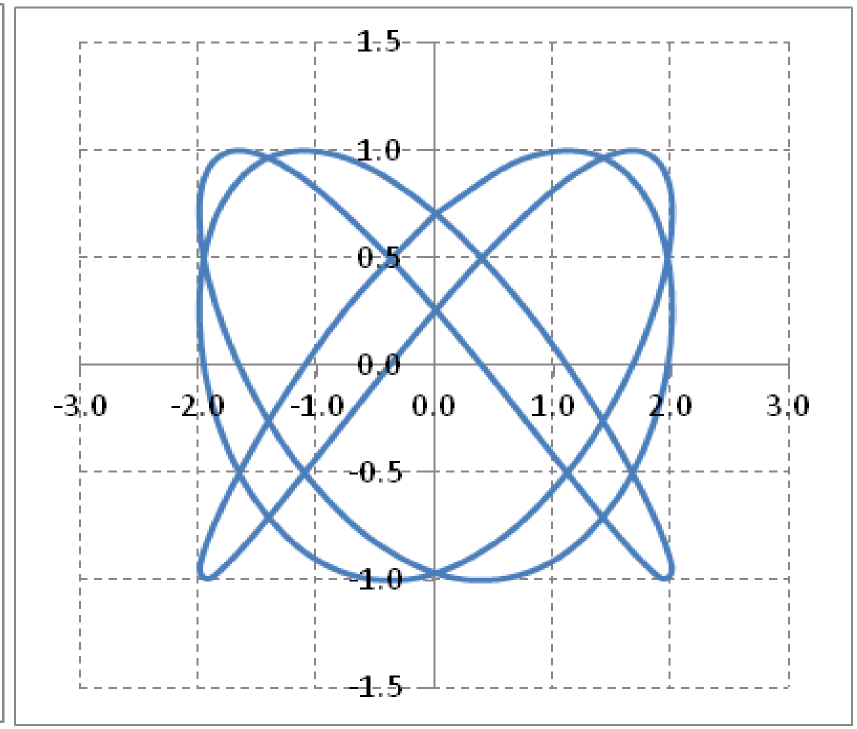
$$x = A\sin\left(n\omega t + \alpha\right)$$

$$y = B\sin\left(m\omega t + \beta\right)$$

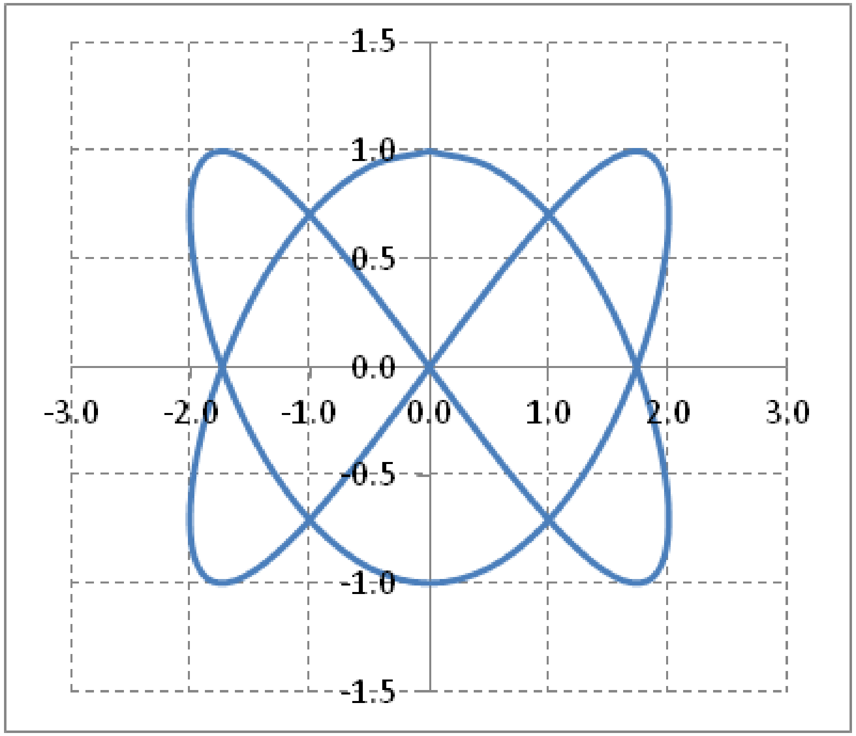
$\alpha - \beta = \pi/4;\ n = 1,\ m = 2$

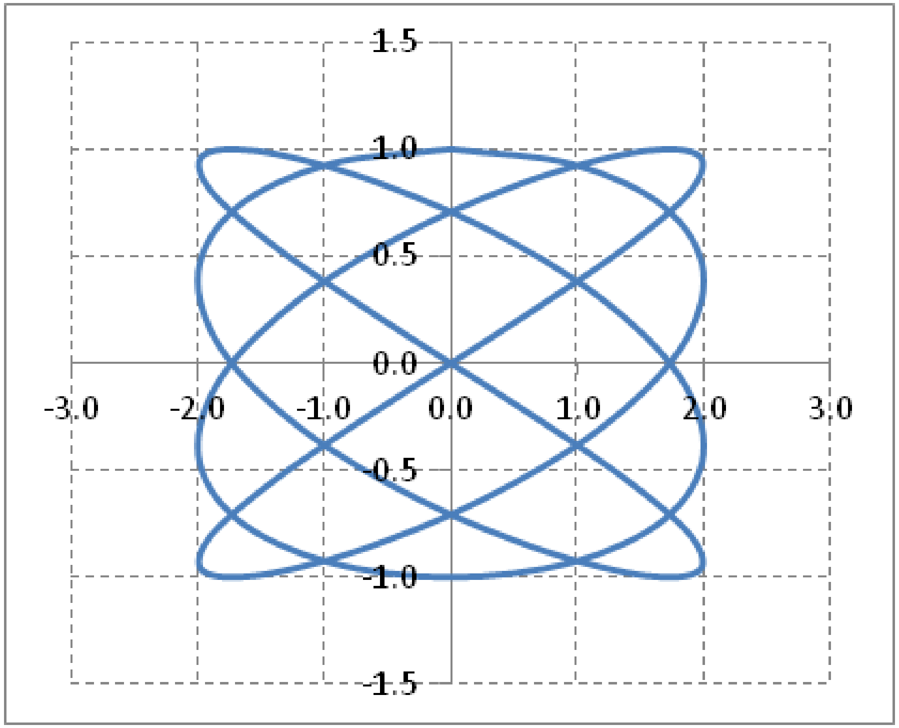


$\alpha - \beta = \pi/4;\ n = 3,\ m = 4$



$$\alpha - \beta = \pi/2;\ n = 2,\ m = 3 \qquad \alpha - \beta = \pi/2;\ n = 4,\ m = 3$$





Правило частот *Лиссажу* определяет отношение частот двух колебаний. Величина этого отношения совпадает с отношением количества точек касания фигуры со сторонами прямоугольника *A* и *B,* в котором она заключена.

Затухающие колебания

$$F_{mp} = -rV = -r\dot{x}$$

r -*коэффициент сопротивления*

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\delta = r/2m$$

коэффициент затухания

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = s(t)\sin\omega t$$

$$\dot{x} = \dot{s}\sin\omega t + \omega s\cos\omega t$$

$$\ddot{x} = \ddot{s}\sin\omega t + 2\omega\dot{s}\cos\omega t - \omega^2 s\sin\omega t$$

$$\left(\ddot{s} + 2\delta\dot{s} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)s\right)\sin\omega t + 2\omega\left(\dot{s} + \delta s\right)\cos\omega t = 0$$

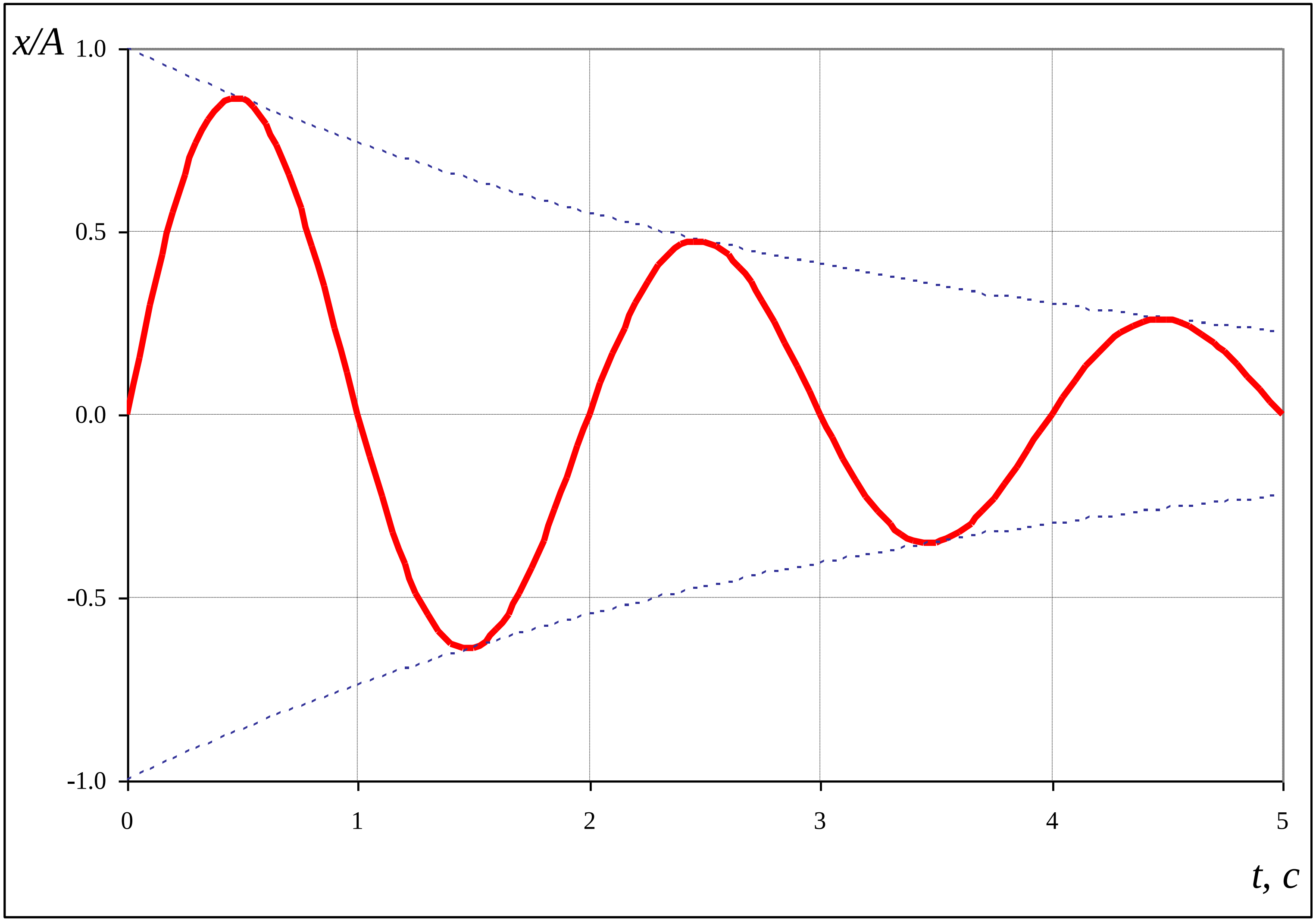
$$\left(\ddot{s}+2\delta\dot{s}+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)s\right)\sin\omega t+2\omega\left(\dot{s}+\delta s\right)\cos\omega t=0$$

$$\frac{ds}{s}=-\delta dt$$

$$\omega^2=\omega_0^2-\delta^2$$

$$s=Ae^{-\delta t}$$

$$x\left(t\right)=Ae^{-\delta t}\sin\left(\omega t+\varphi_0\right)$$



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$\tau = 1/\delta$$

$$N = \tau/T$$

период

время релаксации

Когда можно считать затухания малыми?

$$U(t)=\frac{kx^2}{2}=\frac{m\omega_0^2A^2}{2}e^{-2\delta t}\sin^2(\omega t+\varphi_0)$$

$$\Delta U=U(t)-U(t+T)=U(t)\left(1-e^{-2\delta T}\right)$$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

$$\Delta U<<U \longrightarrow \delta<<\omega_0$$

Логарифмический декремент затухания - натуральный логарифм отношения амплитуд, отстоящих на период.

$$\theta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} \qquad\qquad \theta = \delta T$$

$$\left.\begin{aligned} \tau &= 1/\delta \\ N &= \tau/T \end{aligned}\right\} \qquad \theta = N^{-1}$$

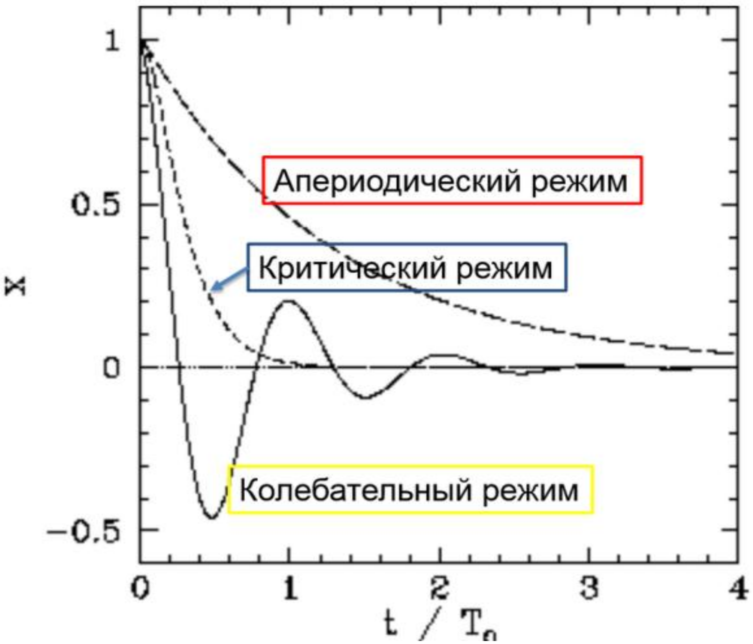
Добротность - отношение запасенной энергии осциллятора к рассеянной за период энергии.

$$Q = 2\pi U/\Delta U \qquad\qquad \delta << \omega_0 \longrightarrow Q \approx \pi\tau/T = \pi N$$

Режимы колебаний

$\delta < \omega_0$ затухающие колебания (докритические движения)

$\delta \to \omega_0$ $T \to \infty$



$\delta = \omega_0$ критический

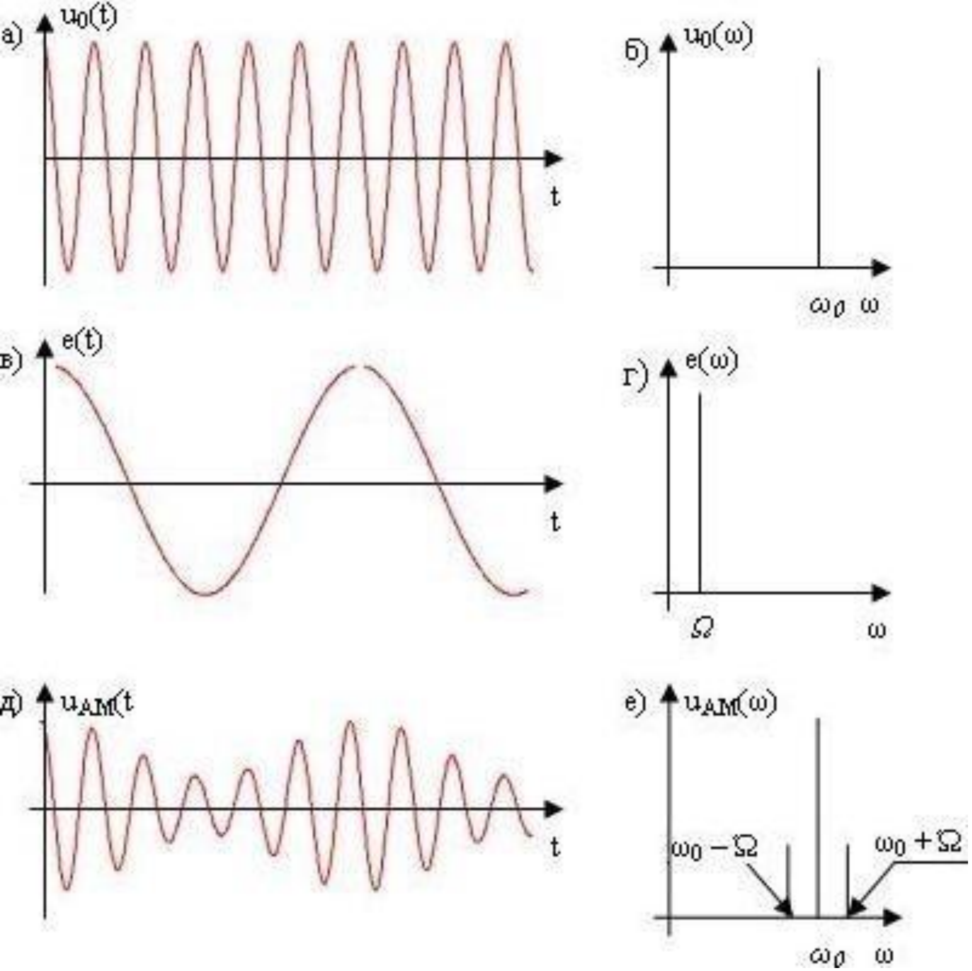
$\delta > \omega_0$ закритический (апериодический)

Спектральный анализ

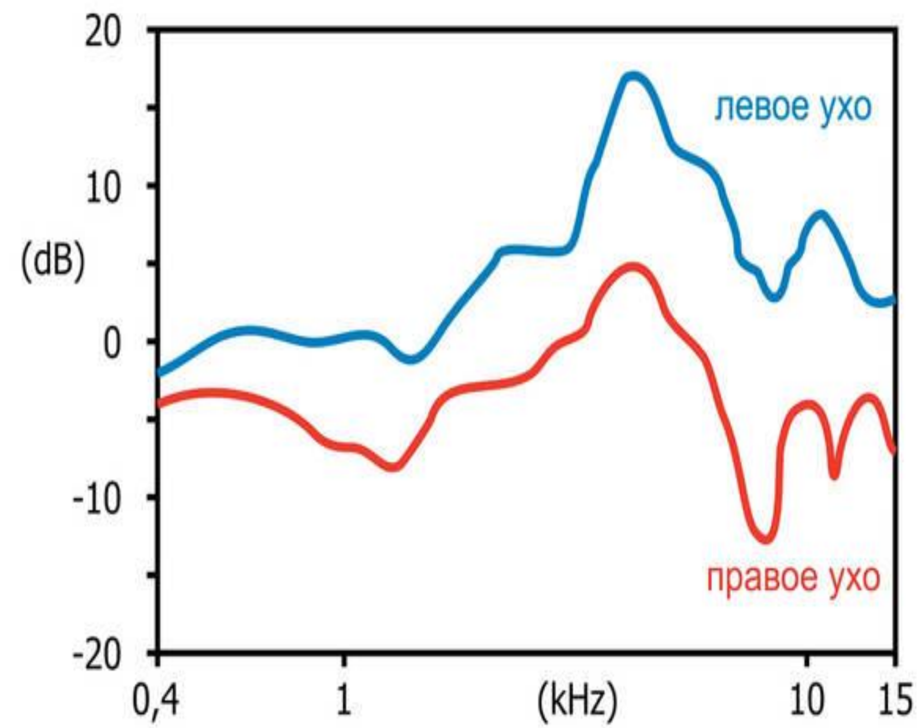
$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)+b_n \sin(n\omega t)$$

Частоты ω, 2ω, 3ω, *…,* называются первой, второй, третьей и т. д. гармоникой.

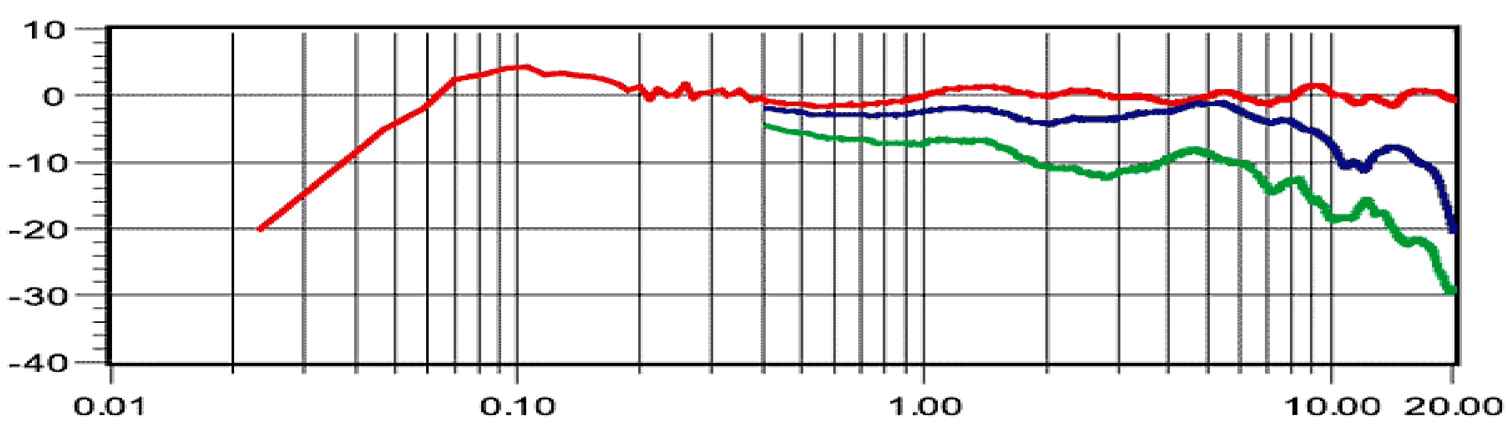
Совокупность амплитуд гармоник образует амплитудный частотный спектр периодического сигнала.



а)
$u_0(t)$
t
б)
$u_0(\omega)$
ω_0 ω
в)
$e(t)$
t
г)
$e(\omega)$
Ω
ω
д)
$u_{AM}(t$
t
е)
$u_{AM}(\omega)$
$\omega_0 - \Omega$
$\omega_0 + \Omega$
ω_0 ω



20
10
0
-10
-20
(dB)
левое ухо
правое ухо
0,4
1
(kHz)
10
15



10
0
-10
-20
-30
-40
0.01
0.10
1.00
10.00
20.00

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0(t)$$

$$F_0(t) = A\cos\omega t$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\delta = r/2m$$

$$f_0 = A/m$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cos(\omega t)$$

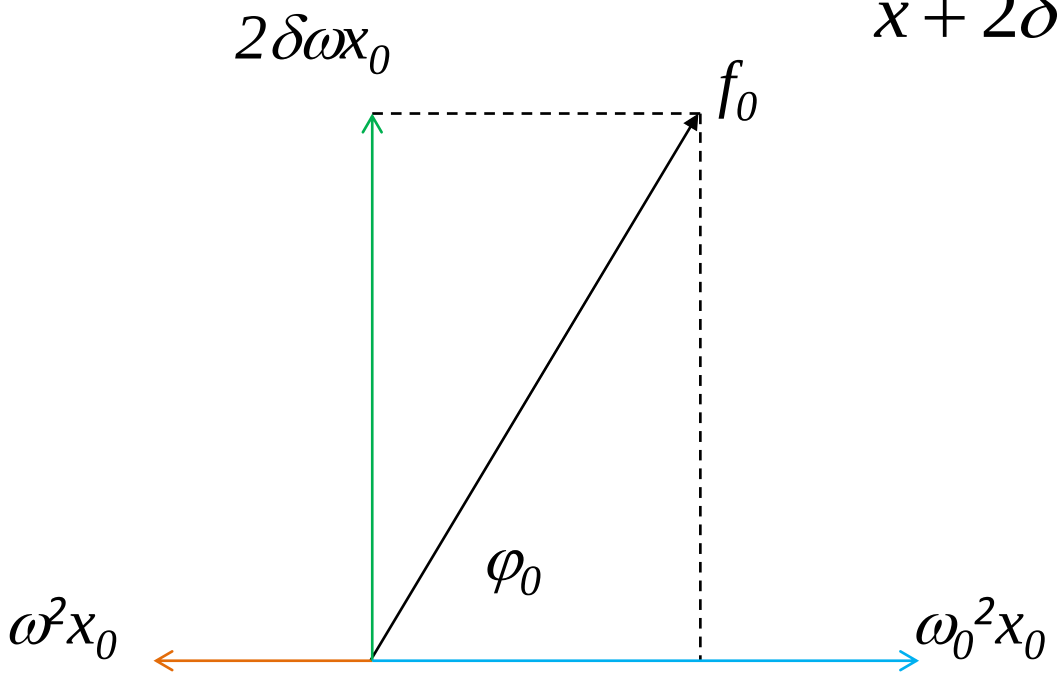
$$x(t) = x_0\cos(\omega t - \varphi_0)$$

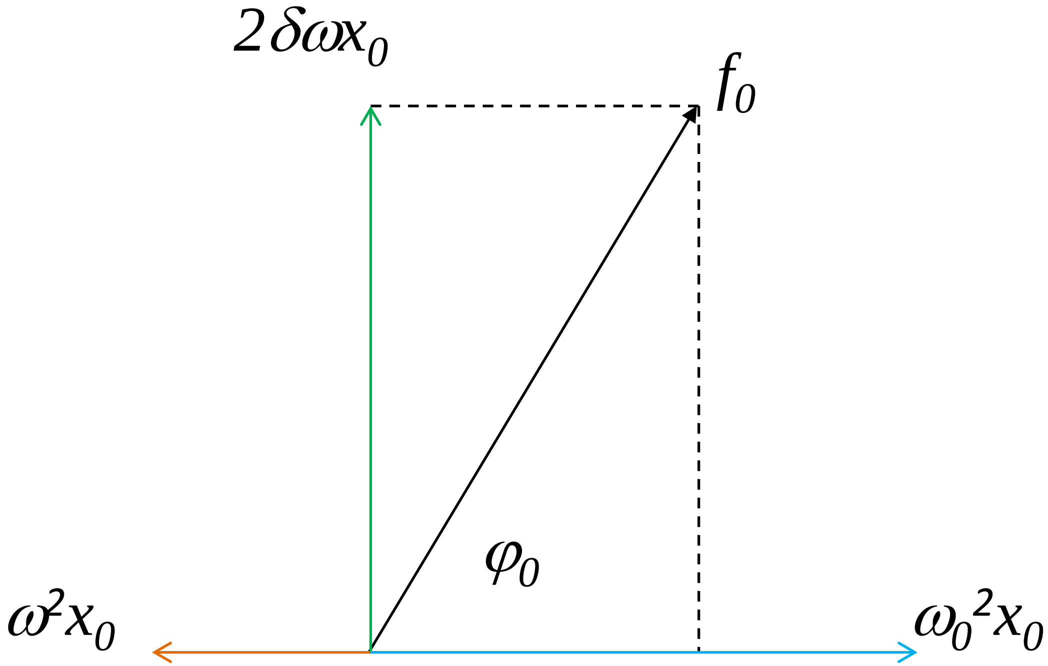
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t - \varphi_0) = \omega x_0 \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \varphi_0) = \omega^2 x_0 \cos(\omega t - \varphi_0 + \pi)$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$$





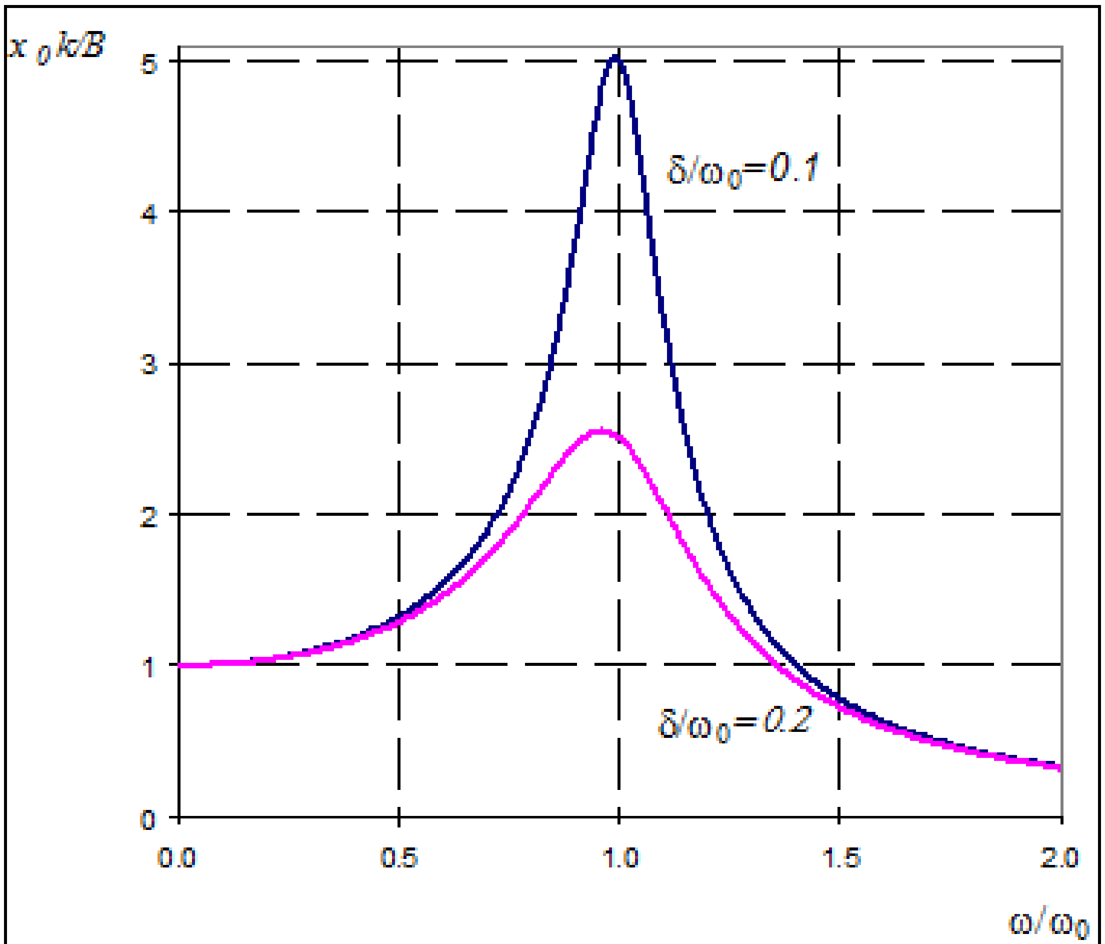
$$tg\left(\varphi_0\right) = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$x_0^2\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2\right) = f_0^2$$

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$x_0 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$$

$$tg\left(\varphi_0\right) = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



$\omega/\omega_0 << 1 \qquad \varphi_0 = 0$

$$x_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{A}{k}$$

$\omega/\omega_0 >> 1 \qquad \varphi_0 = -\pi$

$$x_0 \to 0$$

$$dx_0/d\omega = 0$$

$$-4\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) + 8\delta^2\omega = 0$$

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$x_0\left(\omega_p\right) = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

$$x_0\left(\omega_p\right) \approx Q\, f_0/\omega_0^2$$

Апплет

Разрушение Такомского моста