Лекция 6

Колебательные процессы.

Гармонический осциллятор.

Пружинный, математический и физический маятники.

Сложение колебаний одного направления.

Метод векторных диаграмм.

Биения.

Гармонический осциллятор

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0$$

$$T = \frac{1}{\nu_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$V = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x$$

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний

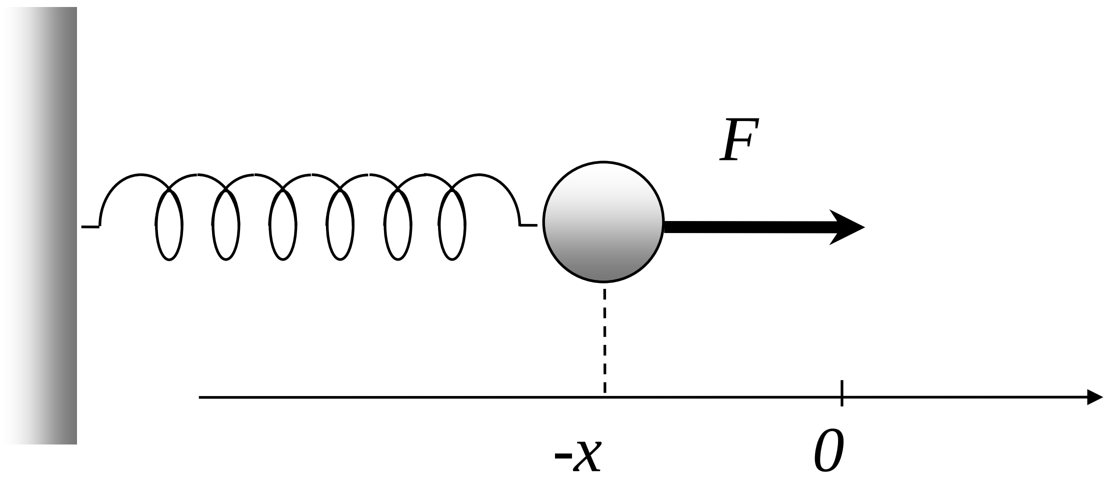
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Комплексная форма колебаний

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$s(t) = Ae^{i\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)}$$

Пружинный маятник



$$F = ma$$

$$F = -kx$$

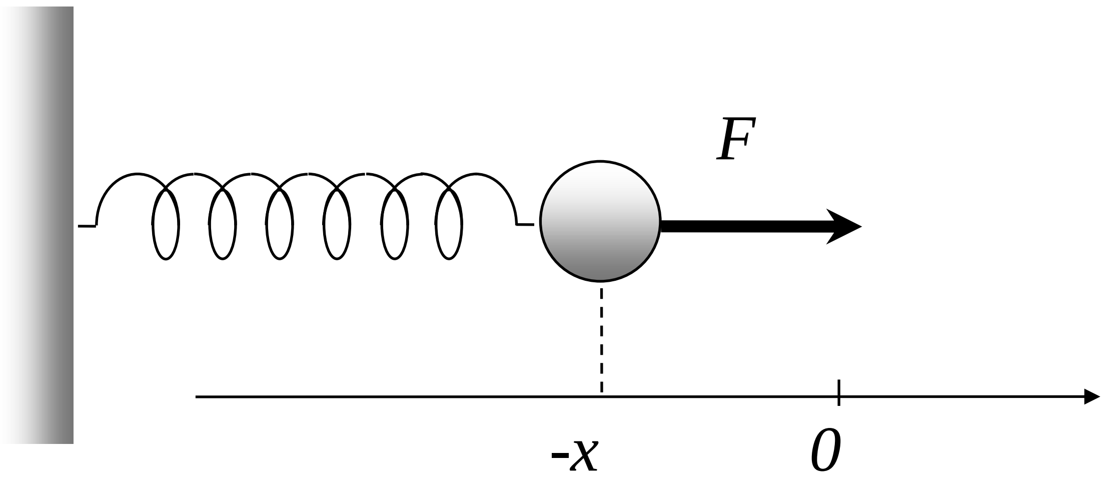
$$a = \ddot{x}$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Начальные условия



$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$x(0) = -A \qquad V(0) = 0$$

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$x(0) = 0 \qquad V(0) = V_0$$

Энергия маятника

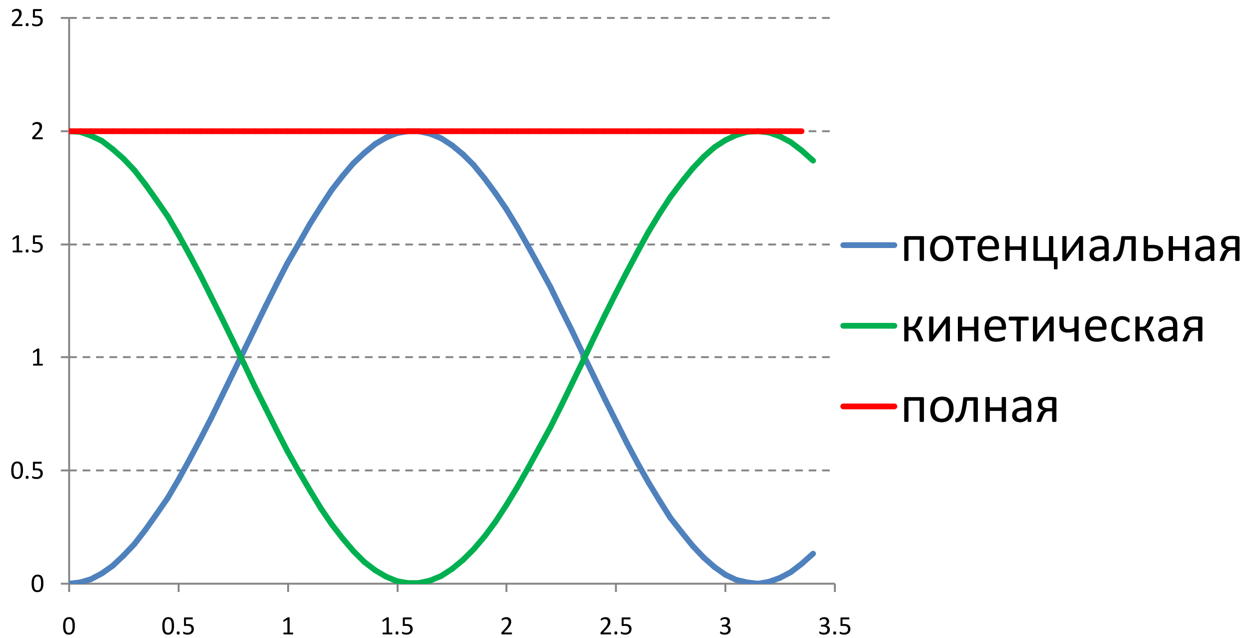
$$T = \frac{mV^2}{2}$$

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1 + \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right)$$

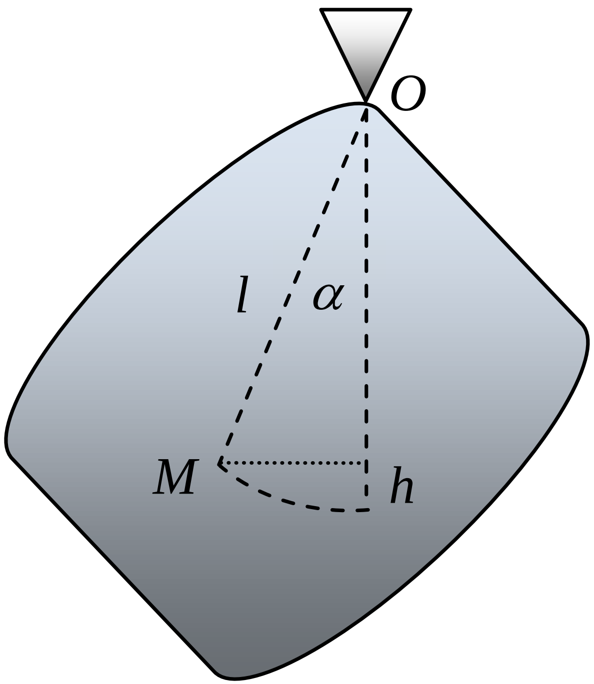
$$U = \frac{kx^2}{2}$$

$$U = \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left(1 - \cos 2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right)$$

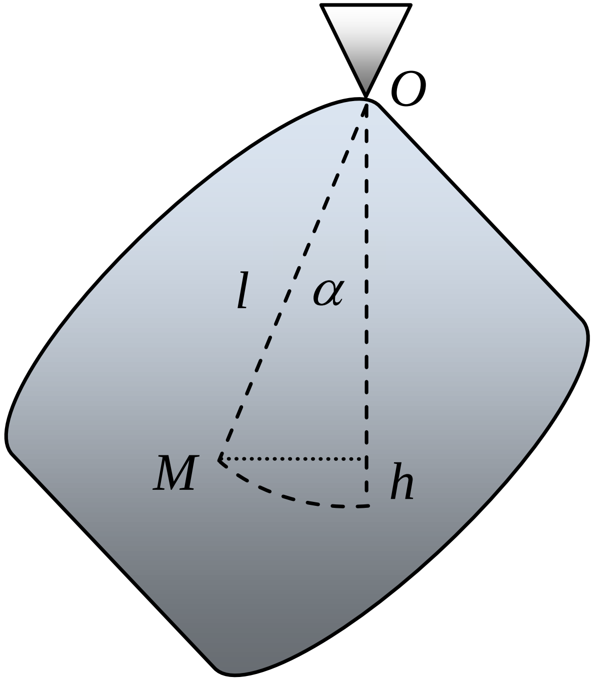
$$T + U = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$



Физический маятник



Физический маятник - твердое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс.



$$T = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2}$$

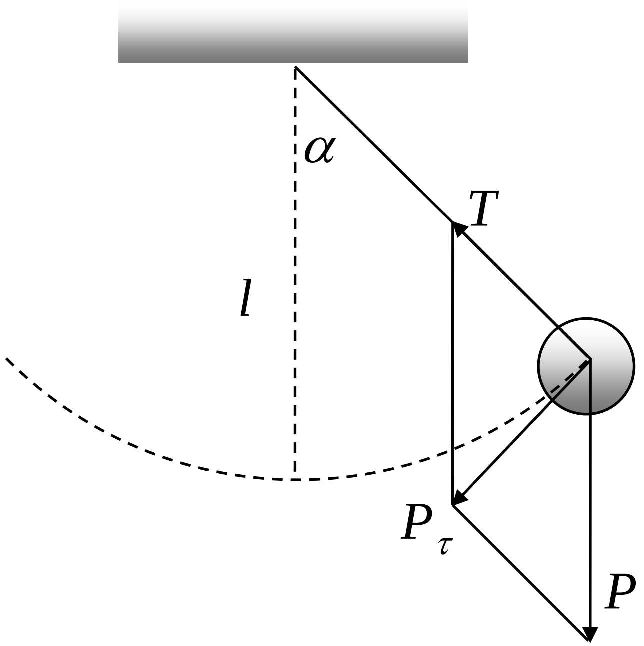
$$U = mgh = mgl\left(1 - \cos\alpha\right)$$

$$\alpha \ll 1 \qquad \cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$$

$$E = \frac{J\dot{\alpha}^2}{2} + mgl\frac{\alpha^2}{2}$$

$$\dot{E} = 0 \qquad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{mgl}{J}$$

Математический маятник



$$\vec{P}_\tau = \vec{T} + \vec{P}$$

$$P_\tau = ma_\tau$$

$$\alpha \ll 1 \qquad \sin\alpha \approx \alpha$$

$$x = l\sin\alpha \approx l\alpha$$

$$P_\tau = -mg\sin\alpha$$

$$P_\tau \approx -mg\alpha$$

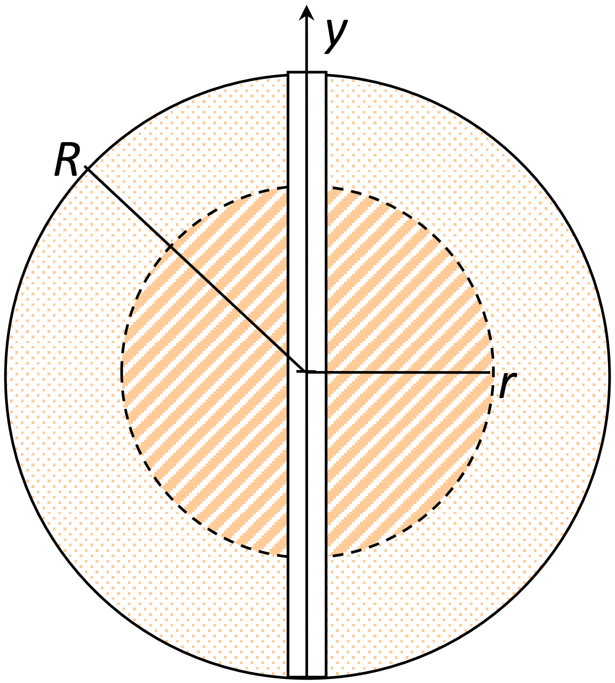
$$a_\tau = \dot{V} = l\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Квазиупругая сила



$$mg = G\frac{mM}{R^2}$$

$$\rho = \frac{M}{4/3\pi R^3} = \frac{3g}{4\pi GR}$$

$$M_r = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = \frac{g}{GR} r^3$$

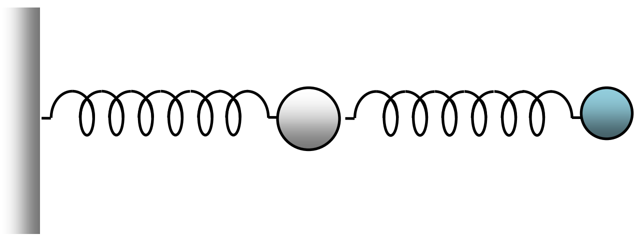
$$F = G\frac{mM_r}{r^2} = \frac{mg}{R} r$$

$$F = -m\omega_0^2 y$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$T = 2\pi/\omega_0 = 84{,}4\,мин$$

Сложение колебаний одного направления и одной частоты



$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

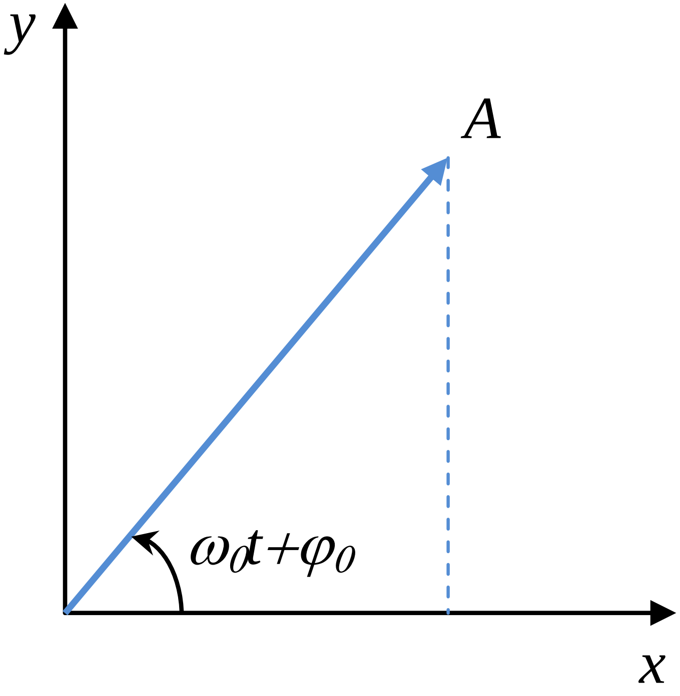
$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2$$

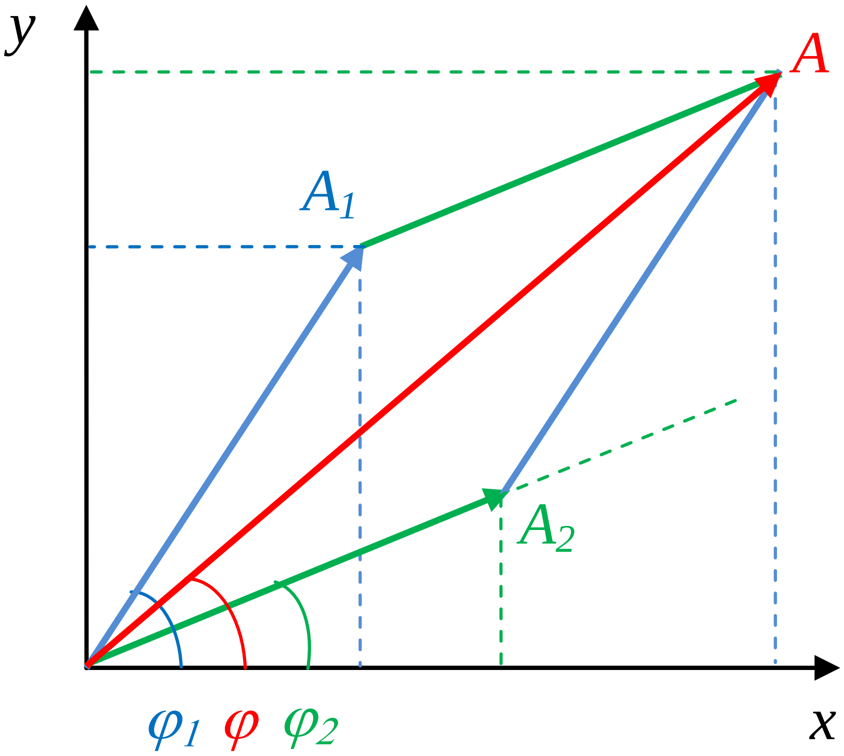
Суммарное колебание будет гармоническим и той же частоты.

$$x = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Векторная диаграмма



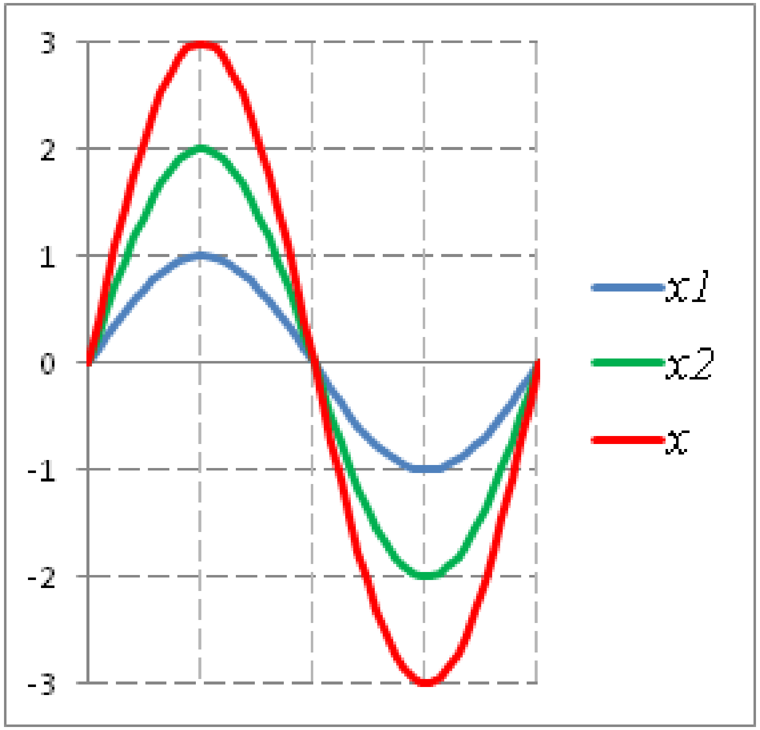
$$A_y = A\sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$



$$tg\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(\pi - \varphi_1 + \varphi_2\right)$$

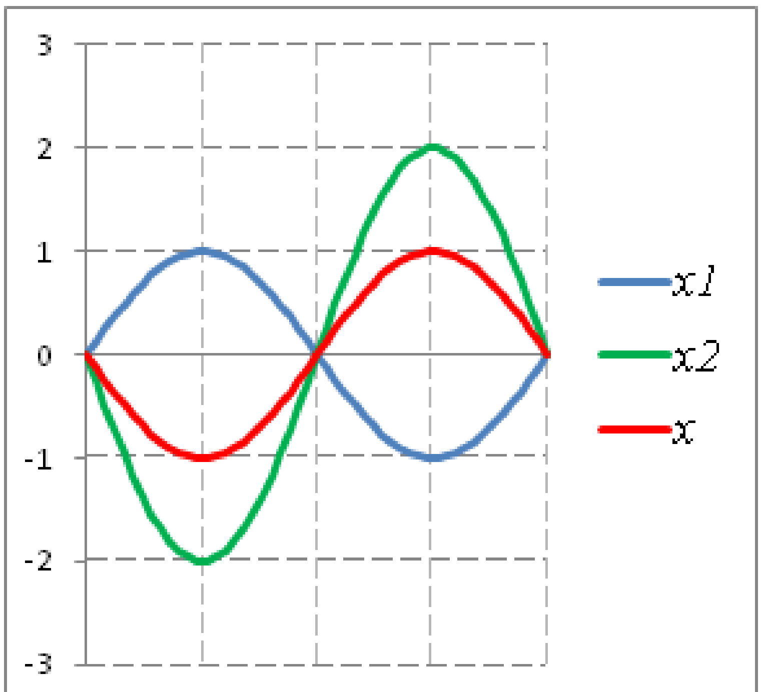
$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)$$



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm 2m\pi$$

$$A = A_1 + A_2$$



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pm(2m+1)\pi$$

$$A = A_1 - A_2$$

Биения

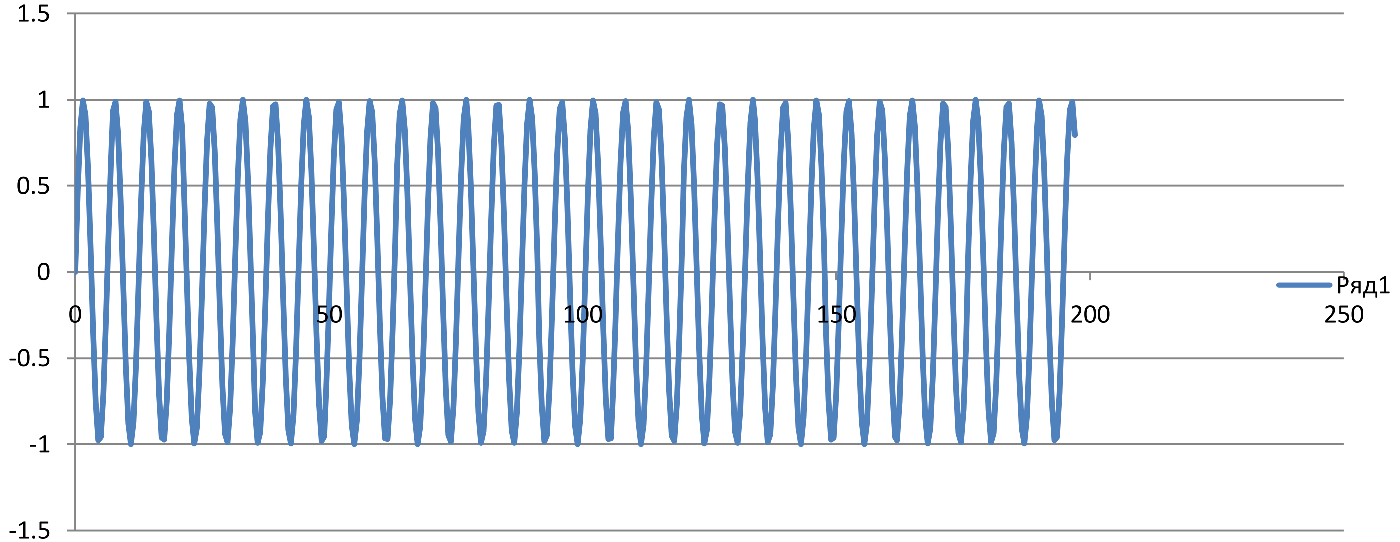
$$x_1 = A\sin\omega t$$

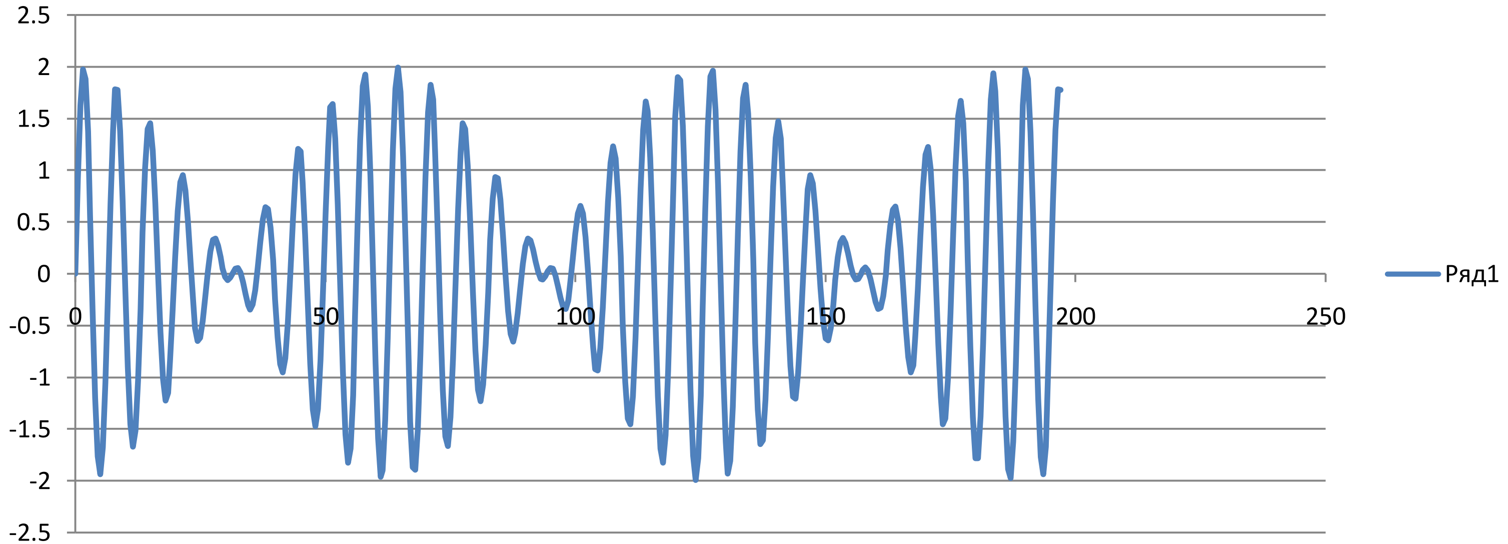
$$x_2 = A\sin(\omega + \Delta\omega)t \qquad \omega >> \Delta\omega$$

$$x = x_1 + x_2 \qquad x \approx B(t)\sin\omega t \qquad B(t) = 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad T_b = \frac{2\pi}{\Delta\omega} \qquad T_b >> T$$

Биения - явление периодического изменения амплитуды результирующего колебания при сложении двух колебаний одного направления с близкими частотами.





- Наложении двух колебаний с частотами 300 Гц и 305 Гц