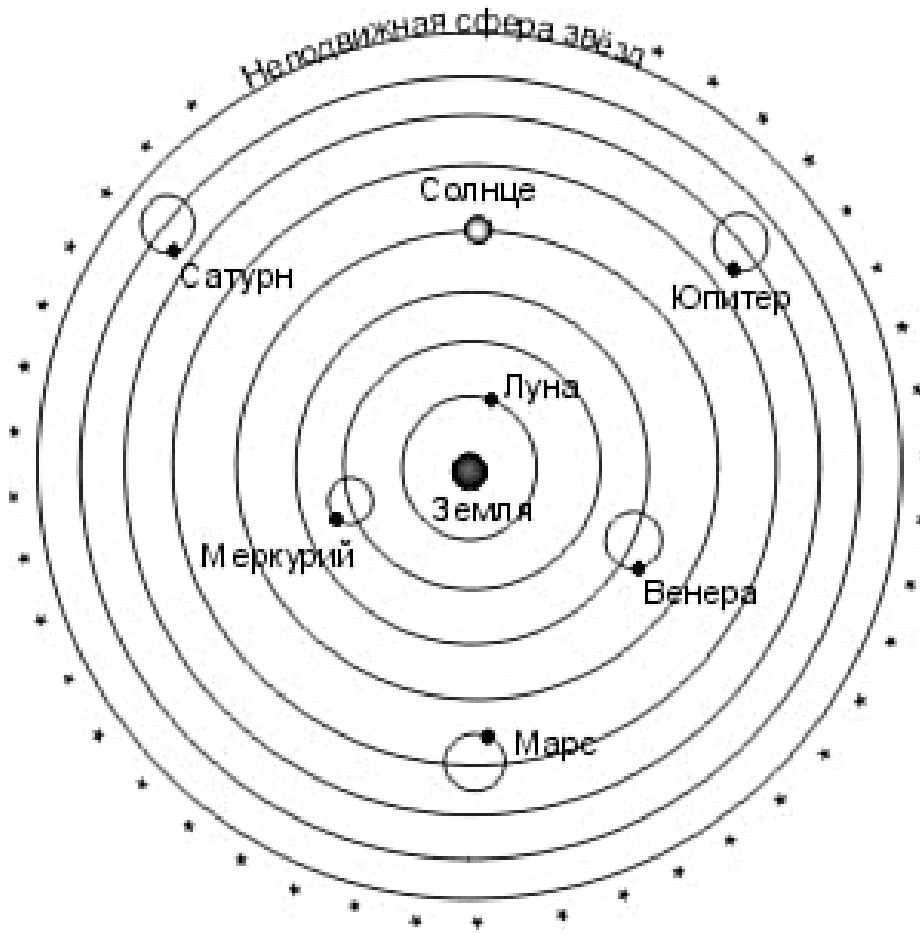


# Лекция 5

**Небесная механика.**

**Закон всемирного тяготения.**

# Геоцентрическая система мира



Птолемей:

- ✓ Земля находится в центре Вселенной.
- ✓ Земля неподвижна.
- ✓ Все небесные тела движутся вокруг Земли.
- ✓ Движение небесных тел происходит по окружностям с постоянной скоростью, т. е. равномерно.

*Круг, описываемый планетой вокруг движущейся точки, Птолемей назвал эпициклом, а круг, по которому движется точка вокруг Земли, - деферентом.*

# Гелиоцентрическая система мира

Николай Коперник **«О вращении небесных сфер»**, 1543 г. Предложил гелиоцентрическую модель мира, по которой Солнце является центром Вселенной, а планеты движутся вокруг него.

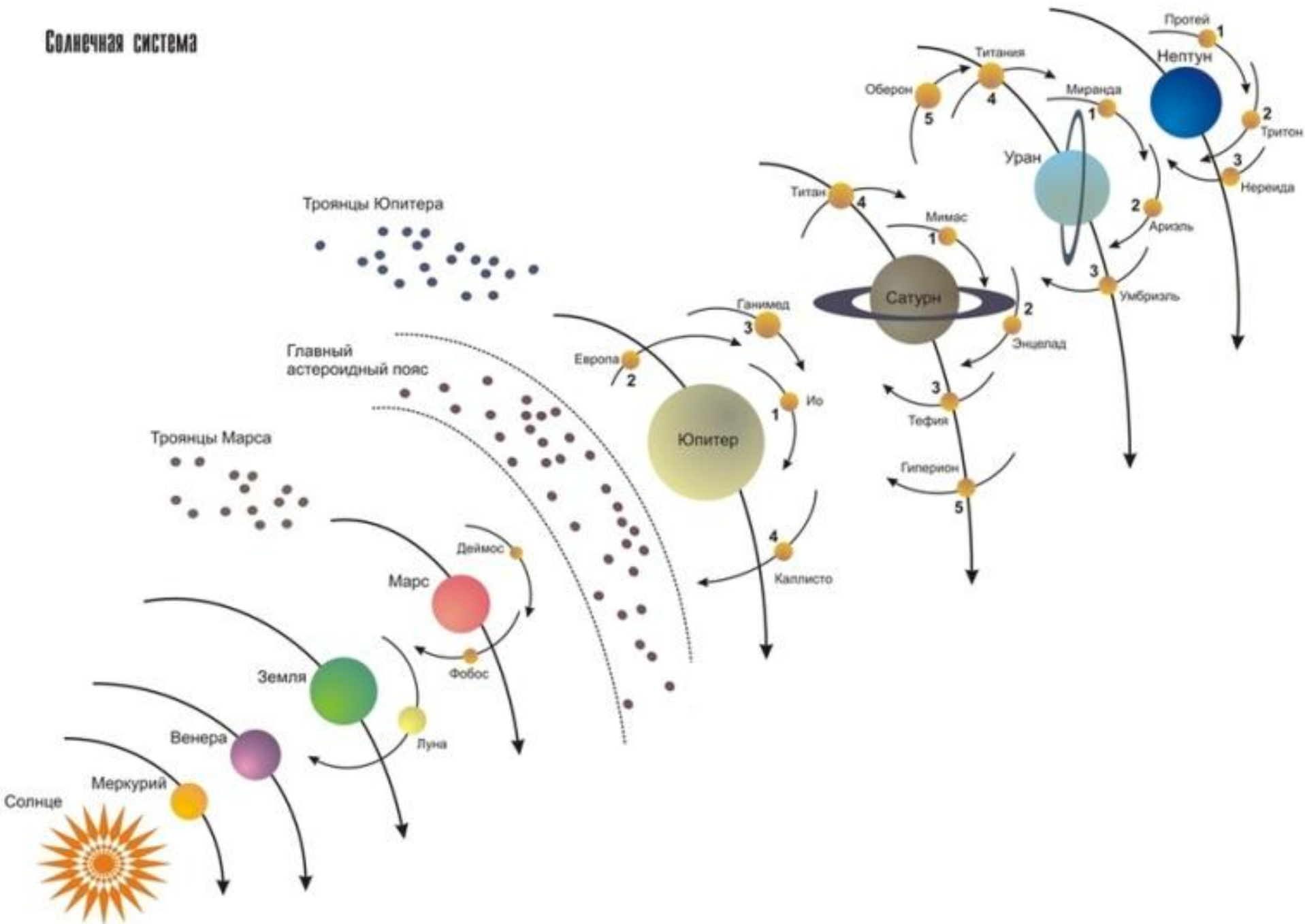
Тихо Браге **«Астрономический каталог»**, 1598 г. Усовершенствовал астрономические инструменты и методы обработки наблюдений, составил таблицы точных положений и яркости планет и звезд.

Иоганн Кеплер **«Новая астрономия»**, 1609 г. Сформулировал законы планетных движений, определив форму орбит и установив математическую связь между их геометрическими параметрами и периодами планетных движений.

# Расстояния планет от Солнца (в млн. км)



# Солнечная система

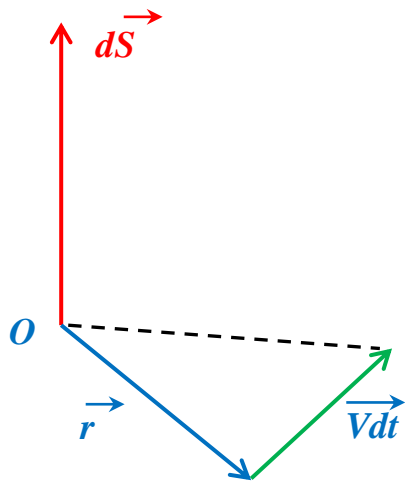


# Законы Кеплера

- 1. Планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.*
- 2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.*
- 3. Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит.*

Иллюстрацию [первого](#) и [второго](#) законов Кеплера можно посмотреть по ссылке.

# Геометрический смысл момента импульса



$$d\vec{S} = \frac{1}{2} [\vec{r} \times d\vec{r}] = \frac{1}{2} [\vec{r} \times \vec{V}] dt$$

секторальная скорость  $\frac{d\vec{S}}{dt}$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] = m [\vec{r} \times \vec{V}] = 2m \frac{d\vec{S}}{dt}$$

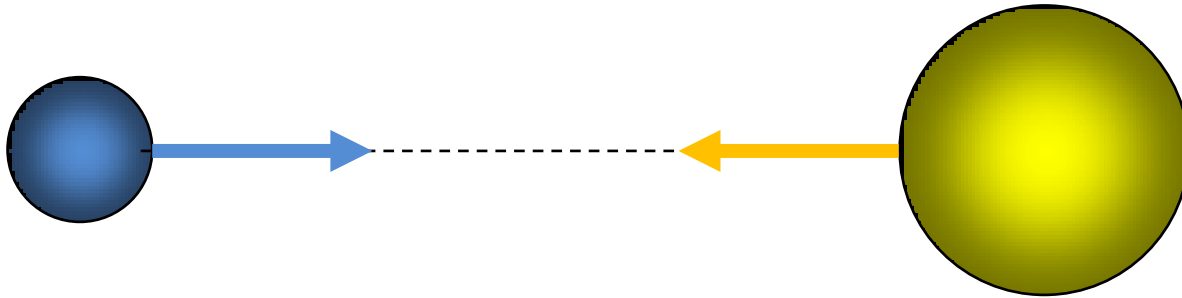
$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \text{const}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0$$

$$\vec{r} \parallel \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{r} \parallel \vec{F}$$



Если материальная точка движется вдоль плоской кривой, радиус-вектор, проведенный из неподвижного полюса, за равные времена описывает одинаковые площади, то направление действующей силы все время проходит через полюс.



# Закон всемирного тяготения

Механика Ньютона применительно к движению планет в предположении, что планеты движутся по окружностям:

$$F = ma_n = mV^2/R$$

$$V = 2\pi R/T$$

$$F = m4\pi^2 R/T^2$$

Из третьего закона Кеплера следует, что:

$$T_1^2/R_1^3 = T_2^2/R_2^3 = T_i^2/R_i^3 = K^{-1} = const$$

$$F = 4\pi^2 \frac{Km}{R^2}$$



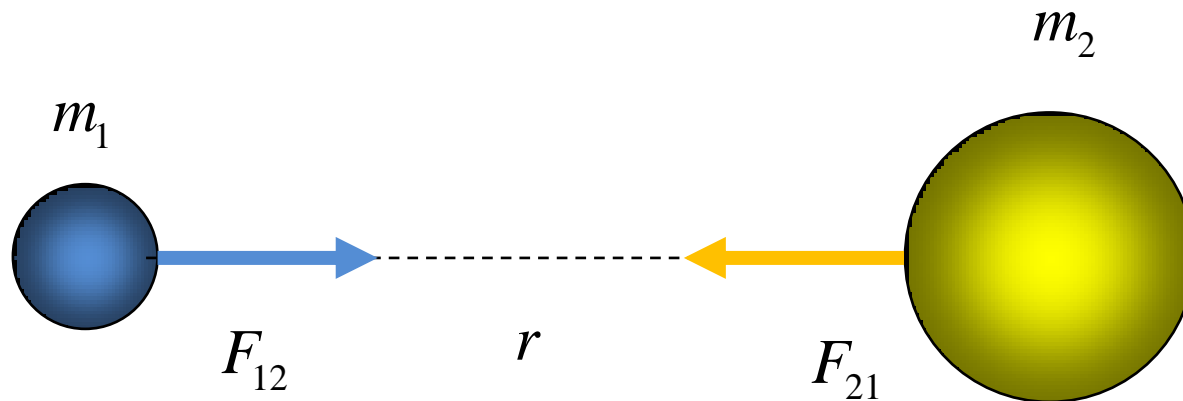
$$F = k \frac{mM}{R^2}$$

# Закон всемирного тяготения

Две материальные точки притягиваются с силами, прямо пропорциональными произведению их масс и обратно пропорциональными квадрату расстояний между ними. Силы направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки.

$$\vec{F} = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{r}$$

$$k = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$$



Более сложная модель взаимодействия в Солнечной системе учитывает, что:

- ✓ Планеты движутся по эллиптическим орбитам.
- ✓ Равноправие планеты и Солнца приводит к тому, что вращательное движение вокруг общего центра масс осуществляет и планета, и Солнце.
- ✓ Планета взаимодействует не только с Солнцем, но и с другими планетами.

Такая модель с удивительной точностью описывает движения планет. Данный факт можно считать убедительным экспериментальным доказательством справедливости законов механики .

Предсказательная сила этих законов была продемонстрирована при обнаружении восьмой планеты Солнечной системы – Нептуна. Малое отклонение наблюдаемой орбиты седьмой планеты Урана от расчетной породило гипотезу о неизвестной планете, которая гравитационным полем возмущает эту орбиту. Математические расчёты позволили в 1846 году обнаружить Нептун.

# *Плутон и Харон*

В январе 2015 года автоматическая межпланетная станция NASA New Horizons сделала снимки вращающихся вокруг общего центра масс карликовой планеты Плутон и ее спутника Харон. Картинка кликабельна.



# Потенциальная энергия

$$U = -\int \left( F(\vec{r}), d\vec{r} \right)$$

$$U = \int k \frac{mm_3}{r^2} dr = -k \frac{mm_3}{r}$$

Вблизи поверхности Земли

$$r = R + h$$

$$R \gg h$$

$$\frac{1}{R+h} = \frac{1}{R(1+h/R)} \approx \frac{1}{R} \left( 1 - \frac{h}{R} \right) = \frac{1}{R} - \frac{h}{R^2}$$

$$U = -k \frac{mm_3}{R+h} = -k \frac{mm_3}{R} + k \frac{mm_3}{R^2} h \approx -k \frac{mm_3}{R} + mgh$$

# Следствия закона всемирного тяготения

Причина силы тяжести - закон всемирного тяготения.

$$mg = k \frac{mm_3}{R^2}$$

$$g = k \frac{m_3}{R^2}$$

$$m_3 = 4/3 \pi R^3 \rho$$

$$\rho = \frac{3g}{4\pi kR} \approx 5.5 \text{ г/см}^3$$

$$m_3 \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$$

$$\rho \approx 2.5 \text{ г/см}^3$$

плотность поверхностной части земной коры

Следовательно Земля имеет плотное ядро.

Расчет массы Солнца.

$$F = k \frac{m_3 M}{R^2} = \frac{m_3 V^2}{R}$$

$$M = \frac{RV^2}{k} = \frac{4\pi^2 R^3}{kT^2} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$$

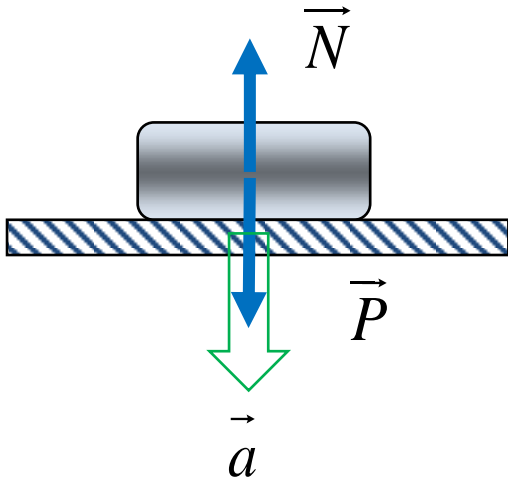
$$M/m_3 \approx 330000$$

# Сила тяжести

$$g = (9.780 - 9.832) \text{ м/с}^2$$

(экватор – полюс)

Вес – сила, с которой тело действует на опору вследствие притяжения к Земле.



$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$N = m(a - g)$$

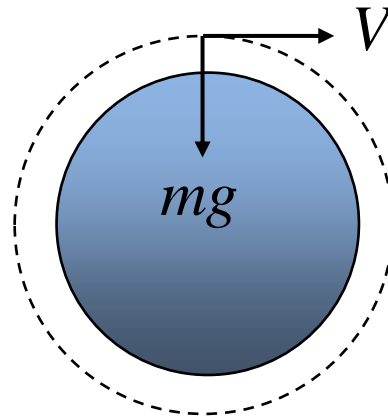
$$a = g$$

$$N = 0$$

Невесомость

# Космические скорости

$$\frac{mV^2}{R} = mg$$



$$V_I = \sqrt{gR} \approx 8 \text{ км/с}$$

Первая космическая скорость — это минимальная скорость, при которой тело, движущееся горизонтально над поверхностью планеты, не упадёт на неё, а будет двигаться по круговой орбите.

Вторая космическая скорость — наименьшая скорость, которую необходимо придать телу для преодоления гравитационного притяжения небесного тела и покидания замкнутой орбиты вокруг него.

$$E = \frac{mV^2}{2} - mgR = 0$$

$$V_{II} = \sqrt{2gR} \approx 11 \text{ км/с}$$