

Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.П. САРИНА

МЕХАНИКА,
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2016

УДК 539.19 + 536.7](075.8)
С 201

Рецензенты:

А.В. Баранов, канд. физ.-мат. наук, доцент
Ю.В. Соколов, канд. техн. наук, доцент

Работа подготовлена на кафедре прикладной и теоретической физики для студентов I и II курсов всех факультетов и форм обучения

Сарина М.П.

С 201 Механика, молекулярная физика и термодинамика. Молекулярная физика и термодинамика: учеб. пособие / М.П. Сарина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2016. – 96 с.

ISBN 978-5-7782-2939-6

Представленная работа – это вторая часть учебного пособия «Механика, молекулярная физика и термодинамика». Первая часть учебного пособия «Механика» была издана в 2014 году.

В пособии представлена теория по курсу молекулярной физики и термодинамики, разобраны типичные задачи, подобраны задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие может быть использовано преподавателями и студентами при изучении этого раздела в курсе физики.

УДК 539.19 + 536.7](075.8)

ISBN 978-5-7782-2939-6

© Сарина М.П., 2016
© Новосибирский государственный
технический университет, 2016

ВВЕДЕНИЕ

В курсе механики, где рассматривались законы движения тел, не были затронуты вопросы их внутреннего строения. Между тем свойства тел зависят от того, как они устроены, какие силы действуют внутри этих тел и т. д. Еще в Древней Греции философом Демокритом была высказана гипотеза об атомистическом строении вещества, которая развивалась в работах М.В. Ломоносова, и в современном виде была сформулирована в XIX веке в работах Р.Клаузиуса, Дж. Максвелла и Л. Больцмана.

Все вещества состоят из атомов и молекул. *Молекула – наименьшая частица вещества, сохраняющая все его свойства.* Не имеет смысла, например, говорить о трети молекулы воды H_2O , так как это будет отдельный атом водорода или кислорода, не обладающий свойствами молекулы воды.

Молекулы состоят из атомов. В настоящее время известно 118 атомов различных химических элементов, из них 94 существуют в природе, остальные получены в результате ядерных реакций. Молекулы имеют размеры порядка 10^{-10} м. Атомы и молекулы постоянно находятся в хаотическом тепловом движении.

Для изучения систем, состоящих из большого числа молекул, нельзя применять традиционные методы, которые использовались в механике. Необходимо для каждой молекулы записать уравнение движения, в котором должны быть учтены силы, действующие на эту молекулу со стороны остальных. Если учесть, что в одном моле вещества содержится $6,02 \cdot 10^{23}$ молекул, становится понятным, что решить такую систему уравнений просто невозможно. Именно большое количество частиц позволяет применять в молекулярной физике *статистический метод*, оперирующий со *средними значениями величин*: средней скоростью, средней энергией и т. д.

Например, температура тела определяется средней кинетической энергией молекул. В любой момент времени различные молекулы обладают различной кинетической энергией, говорить о температуре од-

ной молекулы нельзя. Однако среднее значение кинетической энергии очень большого числа молекул остается постоянным, и именно с ним связана температура газа.

Из трех агрегатных состояний, в которых может находиться вещество, самым простым является газообразное. Для его описания мы будем пользоваться *моделью идеального газа*, в которой: 1) пренебрегают размерами молекул (молекулы рассматриваются как материальные точки); 2) считают, что отсутствуют силы межмолекулярного притяжения (молекулы движутся равномерно и прямолинейно между столкновениями).

1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

1.1. ДАВЛЕНИЕ ГАЗА

Рассмотрим идеальный газ, находящийся в сосуде. Молекулы газа находятся в хаотическом тепловом движении, благодаря чему газ заполняет весь объем сосуда. Во время теплового движения молекулы газа сталкиваются между собой и со стенками сосуда.

Нас интересует столкновение молекул со стенками сосуда, поскольку оно и определяет давление газа. Пусть молекула движется перпендикулярно стенке сосуда. Импульс молекулы до столкновения \vec{p}_1 . После абсолютно упругого удара о стенку сосуда молекула отражается от стенки и летит в направлении, противоположном первоначальному, при этом её импульс $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ (рис. 1.1).

Изменение импульса молекулы

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{p}_2| + |\vec{p}_1| = 2|\vec{p}_1|. \quad (1.1)$$

Стенке сосуда при столкновении с молекулой передается импульс, равный по модулю изменению импульса молекулы и направленный в противоположную сторону:

$$\Delta\vec{p}_{\text{ст}} = -\Delta\vec{p}.$$

Давление, оказываемое молекулами на стенку сосуда, P – это сила, с которой молекулы действуют на стенку $P = \frac{F}{S}$ (S – площадь стенки). Сила, с которой одна молекула действует на стенку сосуда

$$F_1 = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{2|\vec{p}_1|}{\Delta t}. \quad (1.2)$$

Чтобы найти силу, с которой все молекулы действуют на стенку сосуда, надо умножить (1.2) на количество молекул, столкнувшихся со стенкой за время Δt .

Пусть газ заключен в сосуд в форме параллелепипеда (рис. 1.2). За время Δt об интересующую нас стенку ударятся только те молекулы, которые находятся от нее на расстоянии $v_X \Delta t$, где v_X – скорость молекулы в направлении оси X .

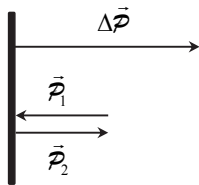


Рис. 1.1

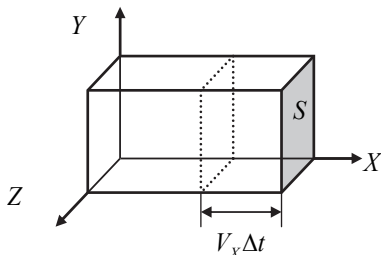


Рис. 1.2

Если концентрация молекул n (количество молекул в единице объёма), то в объёме $v_X \Delta t S$ находится $v_X \Delta t S n$ молекул. Поскольку все направления движения равновероятны, то разумно предположить, что только половина этих молекул движется по направлению к стенке S , а другая половина движется в противоположном направлении. Поэтому количество молекул, столкнувшихся со стенкой $\frac{1}{2} v_X \Delta t S n$. Каждая из этих молекул передаст стенке импульс $|\Delta \vec{p}| = 2|\vec{p}_1| = 2mv_X$, где m – масса молекулы.

Таким образом, за время Δt стенке все молекулы передадут импульс

$$\frac{1}{2} v_X \Delta t S n \cdot 2mv_X = mv_X^2 n \Delta t S$$

и давление газа

$$P = \frac{mv_X^2 n \Delta t S}{\Delta t S} = mv_X^2 n. \quad (1.3)$$

Если учесть, что $v^2 = \sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}$ и $v_X^2 = v_Y^2 = v_Z^2 = \frac{1}{3}v^2$, то выражение (1.3) перепишется в виде

$$P = \frac{1}{3}mv^2n. \quad (1.4)$$

Обсудим, какая скорость фигурирует в выражении (1.4). В газе молекулы движутся с разными скоростями: есть молекулы, скорость которых близка к 0, а есть молекулы, которые движутся с очень большими скоростями. Вопрос о распределении молекул по скоростям будет рассмотрен в разделе 1.6, а пока просто заменим значение скорости ее среднеквадратичным значением

$$\overline{v^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2, \quad (1.5)$$

где N – количество молекул в газе.

Выражение (1.4) можно переписать через среднюю кинетическую энергию молекул

$$P = \frac{2}{3} \frac{m\overline{v^2}}{2}n. \quad (1.6)$$

Формула (1.6) – один из важнейших выводов молекулярно-кинетической теории, она устанавливает связь между характеристиками, относящимися к отдельной молекуле (средняя кинетическая энергия молекулы), и макроскопическими характеристиками, описывающими газ как целое (давление). Формулу (1.6) называют **основным уравнением молекулярно-кинетической теории**.

Итак, давление газа определяется средней кинетической энергией молекул, т. е. давление – величина, связанная с большим количеством молекул. Не имеет смысла говорить о давлении, создаваемом одной молекулой газа.

В системе СИ давление измеряется в **паскалях**, $1 \text{ Па} = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}^2}$. Существует множество производных единиц давления, например, **бар** ($1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$), **атм** ($1 \text{ атм} = 98066,5 \text{ Па} \approx 0,98 \text{ бар}$), **миллиметр ртутного столба** ($1 \text{ мм рт. ст.} = 133,322 \text{ Па} \approx 1,33 \cdot 10^3 \text{ атм}$).

1.2. ТЕМПЕРАТУРА

Понятие температуры любой человек интуитивно связывает с ощущением «холодного» или «горячего». Из опыта известно, что повысить давление газа можно, нагрев его. Таким образом, давление зависит от температуры и согласно уравнению (1.6) связано со средней кинетической энергией молекул. Следовательно, температура тоже каким-то образом связана со средней кинетической энергией молекул.

Температура – это величина, характеризующая состояние теплового равновесия. Если в ванну вылить с одного конца ведро холодной воды, а с другого – ведро горячей воды, то говорить о температуре воды в ванне нельзя до тех пор, пока не установится состояние теплового равновесия, т. е. температура во всей ванне не выровняется. В самом деле, если сразу же, как только мы вылили воду в ванну, измерить температуру в «горячей» и «холодной» частях, очевидно, что температура будет различна. Но какое из этих значений можно считать истинным? Поэтому *говорить о температуре можно только в том случае, если в системе установилось тепловое равновесие.*

Температура в отличие от большинства физических величин обладает уникальным свойством: она *не аддитивна*. Если к пластилиновому шарiku массой m прилепить пластилиновый шарик массой $2m$, то масса нового шарика будет $3m$. Массы шариков можно складывать, масса – аддитивная величина. В примере с ванной, если сложить температуру горячей и холодной воды, мы получим абсурдный результат. Температуры складывать нельзя!

Кроме того, встает вопрос об измерении температуры. Ее нельзя измерить непосредственно, как, например длину, сравнивая измеренное значение с эталоном длины. Когда мы измеряем длину, мы говорим, что, например, в нашем стержне содержится два метра, т. е. наш стержень больше эталона метра в два раза. О температуре так говорить нельзя, поскольку вопрос о том, сколько измеряемая температура содержит «эталонных», не имеет смысла, так как температура – неаддитивная величина.

Чтобы величине температуры можно было бы сопоставить численное значение, нужно задать зависимость измеряемой величины от температуры, поделить ее на несколько частей – это и будет температурная шкала. Так, в ртутном термометре измеряется длина ртутного столба в зависимости от температуры. Таким образом, температурных шкал может быть бесконечное множество.

В современном мире установлена температурная шкала, созданная на основе газового термометра. Газовый термометр – это закрытый сосуд с идеальным газом, снабженный прибором для измерения давления – манометром (давление мы умеем измерять). В газовом термометре термометрическая шкала – это давление газа. Зависимость давления от температуры *принимается* линейной. Затем измеряется давление в двух особенных (реперных) точках, например, при кипении воды $P_{\text{кип}}$ и при таянии льда $P_{\text{таян}}$. Поскольку связь температуры и давления линейная, то

$$\frac{P_{\text{кип}}}{P_{\text{таян}}} = \frac{T_{\text{кип}}}{T_{\text{таян}}}.$$

Отношение $\frac{P_{\text{кип}}}{P_{\text{таян}}} = 1,3361$ легко определяется из опыта. Следовательно, для температур мы имеем такое же соотношение:

$$\frac{T_{\text{кип}}}{T_{\text{таян}}} = 1,3661. \quad (1.7)$$

Если принять разницу температур

$$T_{\text{кип}} - T_{\text{таян}} = 100, \quad (1.8)$$

то имеем систему уравнений с двумя неизвестными. Решением уравнений (1.7) и (1.8) являются температуры $T_{\text{кип}} = 373,15$ и $T_{\text{таян}} = 273,15$. Введенная таким образом шкала температур называется *шкалой Кельвина*. В технике и в быту часто пользуются температурной шкалой, в которой температура таяния льда $T_{\text{таян}} = 0$. Эту шкалу температур называют шкалой Цельсия. Шкала Цельсия связана со шкалой Кельвина простым соотношением

$$t(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273,15.$$

Есть и другие температурные шкалы, использование которых сложилось исторически. Так, например, температура кипения воды по шкале Фаренгейта (популярна в США и Англии) – 212°F , по шкале Реомюра (популярна во Франции) 80°Re , а температура таяния льда – 32°F и 0°Re .

1.3. ОПЫТНЫЕ ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Законы, описывающие поведение идеального газа, были установлены экспериментально.

Закон Бойля–Мариотта. Рассмотрим процесс, при котором температура газа поддерживается постоянной, – этот процесс называется изотермическим $T = \text{const}$. **При неизменной массе газа в изотермическом процессе произведение давления на объем – постоянная величина:**

$$PV = \text{const} , m = \text{const} , T = \text{const} . \quad (1.9)$$

Графики зависимости давления от объема при различных постоянных температурах – **изотермы** – изображены на рис. 1.3.

Закон Гей-Люссака устанавливает связь между объемом и температурой газа при постоянном давлении (**изобарический процесс**). **При неизменной массе газа в изобарическом процессе отношение объема и температуры – постоянная величина:**

$$\frac{V}{T} = \text{const} , m = \text{const} , P = \text{const} . \quad (1.10)$$

График **изобары** показан на рис. 1.4.

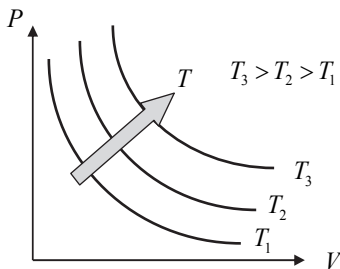


Рис. 1.3

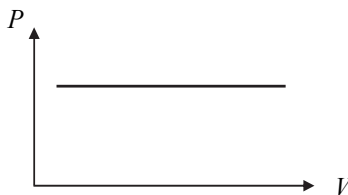


Рис. 1.4

Закон Гей-Люссака можно записать и в другом виде: объем массы газа при постоянном давлении линейно меняется с температурой:

$$V = \alpha T , m = \text{const} , P = \text{const} . \quad (1.11)$$

Графики зависимости объема V от температуры T при различных постоянных давлениях представлены на рис. 1.5.

Закон Шарля (или второй закон Гей-Люссака) устанавливает связь между давлением и температурой газа при постоянном объеме (**изохорический процесс**). При неизменной массе газа в **изохорическом процессе отношение давления и температуры – постоянная величина**:

$$\frac{P}{T} = \text{const}, m = \text{const}, V = \text{const}. \quad (1.12)$$

График **изохоры** показан на рис. 1.6.

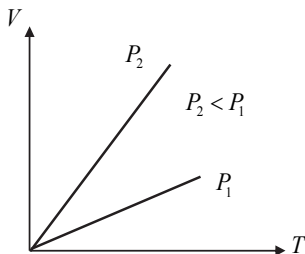


Рис. 1.5

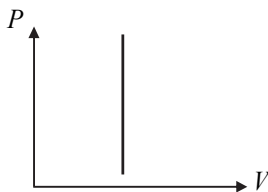


Рис. 1.6

Закон Шарля можно записать и в другом виде: давление массы газа при постоянном объеме линейно меняется с температурой:

$$P = \beta T, m = \text{const}, V = \text{const}. \quad (1.13)$$

Графики зависимости давления P от температуры T при различных постоянных объемах изображены на рис. 1.7.

Закон Авогадро: при одинаковых давлениях и температурах в равных объемах любого газа содержится одинаковое количество молекул. При нормальных условиях этот объем равен 22,4 л. В одном моле вещества содержится $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$ молекул.

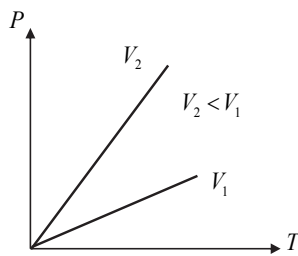


Рис. 1.7

Закон Дальтона позволяет рассчитывать давление смеси газов: **давление смеси газов равно сумме парциальных давлений, входящих в смесь газов:**

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_N. \quad (1.14)$$

Парциальное давление – давление, которое бы создавал газ, если бы он находился в сосуде один, т. е. если бы он занимал весь объем сосуда.

1.4. УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА–МЕНДЕЛЕЕВА

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории (1.6) связывает между собой давление и среднюю кинетическую энергию молекул. Если вводить понятие температуры так, как мы сделали в разделе 1.2 (температура – величина, линейно зависящая от давления), то необходимо ввести соответствующий коэффициент, переводящий единицы энергии в градусы. Этот коэффициент – **постоянная Больцмана** $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К :

$$\frac{2}{3} \frac{m\overline{V^2}}{2} = kT; \quad \frac{m\overline{V^2}}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории теперь будет иметь вид

$$P = nkT. \quad (1.15)$$

Концентрация молекул – это отношение всего количества молекул к объему, в котором они находятся, $n = \frac{N}{V}$, тогда

$$P = \frac{N}{V} kT; \\ PV = NkT. \quad (1.16)$$

Количество молекул N связано с числом Авогадро N_A и количеством молей $\frac{m}{\mu}$ (m – масса газа; μ – молярная масса) соотношением

$$N = N_A \frac{m}{\mu}. \quad (1.17)$$

Подставим (1.17) в (1.16):

$$PV = N_A \frac{m}{\mu} kT .$$

Произведение двух констант, числа Авогадро и постоянной Больцмана, очевидно, тоже является константой, ее называют *универсальной газовой постоянной*:

$$R = N_A k = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} .$$

Тогда уравнение (1.16) переписывается в виде

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \tag{1.18}$$

– *уравнение Клапейрона–Менделеева*, которое является обобщенным уравнением, и содержит в себе оба закона Гей-Люссака и закон Шарля. Для одного моля уравнение Клапейрона–Менделеева имеет вид

$$PV = RT .$$

1.5. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Понятие «вероятность события» применяют в тех случаях, когда событие происходит случайно, при каких условиях оно наступит неизвестно, и которое нельзя заранее с уверенностью предсказать. Так, например, подбрасывая монету, вы не можете уверенно предсказать, какая сторона монеты окажется сверху, что выпадет: орел или решка. Или, когда кондуктор в автобусе выдает билет, никогда нельзя точно сказать четный или нечетный у него будет номер. Если бросить монету подряд 10 раз, то может так получиться, что решка выпадет 1, 5 или 8 раз. Может также случиться, что решка выпадет все 10 раз, или вообще не выпадет ни разу. Тем не менее при увеличении количества опытов (количества бросаний монеты) примерно в половине случаев выпадет решка. Вероятностью события называется предел, к которому стремится отношение количества выбранных событий N' к общему количеству событий N :

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N'}{N}.$$

В случае с бросанием монеты вероятность выпадения решки равна $\frac{1}{2}$.

Теорема сложения вероятностей: если W_1, W_2, W_3, \dots , – вероятности нескольких исключаящих друг друга событий, то вероятность, что осуществится одно из них, равна сумме вероятностей каждого события в отдельности:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad (1.19)$$

Например, в ящике лежит 10 шаров, три из которых белые, а семь – черные. Для каждого белого шара вероятность его выбора $W = \frac{1}{10}$. Вер-

оятность вытаскивания белого шара $W_{\text{б}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$. Вероятность вытаскивания черного шара

$$W_{\text{ч}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

Теорема умножения вероятностей: если W_1, W_2, W_3, \dots – вероятности нескольких независимых событий, то вероятность осуществления всех событий равна произведению вероятностей каждого события в отдельности:

$$W = W_1 W_2 W_3 \dots \quad (1.20)$$

Пусть два независимых события: выбор белого шара из нашего примера $\left(W_{\text{б}} = \frac{3}{10}\right)$ и выпадение решки при бросании монеты $\left(W_{\text{р}} = \frac{1}{2}\right)$. Тогда вероятность события «выбор белого шара и выпадение решки»

$$W = W_{\text{б}} W_{\text{р}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{20}.$$

Молекулы газа движутся хаотично и беспорядочно сталкиваются друг с другом, поэтому их скорости непрерывно меняются, всегда среди молекул есть и очень быстрые, и очень медленные. Однако несмотря на всю случайность столкновений, распределение молекул по скоростям оказывается не случайным, а вполне определенным.

Задача о распределении молекул по скоростям формулируется так: сколько молекул имеют скорости в указанном интервале скоростей вблизи указанной скорости. Точно так же, когда мы спрашиваем: у какого количества студентов в группе возраст 18 лет, мы имеем в виду, что возраст студента не 18 лет, 0 месяцев, 0 дней, 0 минут и 0 секунд, а возраст студента от 18 до 19 лет.

Таким образом, количество молекул Δn , скорости которых лежат в интервале от v до $v + \Delta v$, пропорционально количеству молекул n , функции распределения $f(v)$ и интервалу скоростей Δv :

$$\Delta N = f(v)N\Delta v,$$

$$\frac{\Delta N}{N} = f(v)\Delta v. \quad (1.21)$$

Из (1.21) ясен *смысл функции распределения $f(v)$ – это доля частиц $\frac{\Delta N}{N}$, скорости которых лежат в единичном интервале скоростей $\Delta v = 1$:*

$$f(v) = \frac{\Delta N}{N}. \quad (1.22)$$

Переходя к пределу в (1.21), получим

$$\frac{dN}{N} = f(v)dv. \quad (1.23)$$

1.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ПО СКОРОСТЯМ, КОМПОНЕНТАМ СКОРОСТИ И ЭНЕРГИЯМ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим идеальный газ, состоящий из очень большого количества тождественных молекул N . Число молекул $dN(v)$, скорости которых лежат в интервале от v до $v+dv$, определяется формулой (1.23). Функция распределения молекул по скоростям имеет вид

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}, \quad (1.24)$$

где m_0 – масса молекулы; T – температура газа; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана. Очевидно, что вид функции распределения зависит от типа газа и его температуры.

Функция распределения молекул по скоростям показана на рис. 1.8.

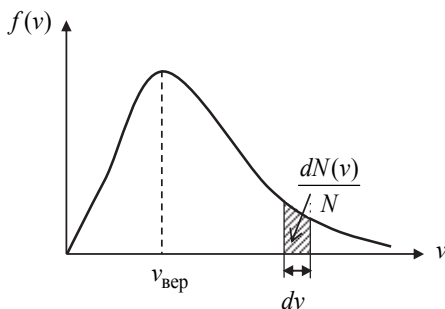


Рис. 1.8

Функция распределения увеличивается, достигая максимума, а затем асимптотически стремится к 0. Значение скорости, при которой функция распределения максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью** $v_{\text{вер}}$. Найдем значение наиболее вероятной скорости: для этого нужно взять производную от (1.24) и приравнять ее к 0. Величины, не зависящие от скорости $4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2}$, при нахождении экстремума можно не рассматривать.

$$\frac{d}{dv} \left(v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \right) = 0. \quad (1.25)$$

$$2ve^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} + v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(-\frac{m_0 2v}{2kT} \right) = 0, \quad 2ve^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \left(1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) = 0,$$

$$1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} = 0, \quad \frac{m_0 v^2}{2kT} = 1,$$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}. \quad (1.26)$$

Очевидно, что наиболее вероятная скорость зависит от массы молекулы и температуры газа. При повышении температуры наиболее вероятная скорость молекул также увеличивается. При одинаковой температуре наиболее вероятная скорость молекул более тяжелого газа будет меньше наиболее вероятной скорости молекул более легкого газа. Наиболее вероятную скорость можно переписать в другом виде:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2kTN_A}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}, \quad (1.27)$$

где μ – молярная масса; R – универсальная газовая постоянная.

Относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v + dv$, находится как площадь заштрихованной полоски (рис. 1.8). Если сложить все заштрихованные полоски, мы получим единицу, так как и в числителе, и в знаменателе будет стоять одинаковое число – количество молекул N , поэтому площадь под кривой равна единице:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (1.28)$$

Вид функции распределения зависит от температуры газа. Найдем максимальное значение функции распределения (при наиболее вероят-

ной скорости). Для этого подставим наиболее вероятную скорость (1.27) в (1.24):

$$\begin{aligned}
 f(v_{\text{вер}}) &= 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left(\sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \right)^2 e^{-\frac{m_0 \left(\sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \right)^2}{2kT}} = \\
 &= 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2kT}{m_0} e^{-\frac{m_0 \frac{2kT}{m_0}}{2kT}} = 4e^{-1} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}. \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

Таким образом, при повышении температуры, согласно (1.27), значение наиболее вероятной скорости должно увеличиваться, т. е. максимум функции должен сдвигаться вправо, а значение функции распределения в максимуме (1.29) должно уменьшаться. Вместе с тем площадь под кривой, согласно (1.28), не должна меняться. Поэтому кривая функции распределения с увеличением температуры будет растягиваться и понижаться (рис. 1.9).

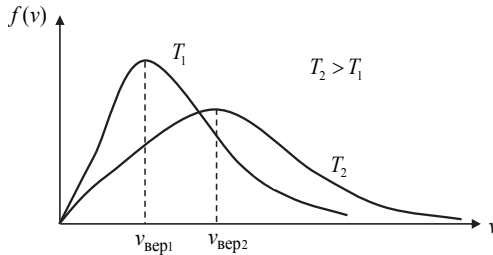


Рис. 1.9

С помощью функции распределения можно найти величину **средней скорости молекул** \bar{v} (средняя арифметическая скорость)

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (1.30)$$

После подстановки функции распределения и интегрирования получим

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} = 1,13v_{\text{вер}}. \quad (1.31)$$

С помощью функции распределения также можно найти величину *средней квадратичной скорости молекул* $\overline{v^2}$, которая уже встречалась в выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории:

$$\overline{v^2} = \int_0^{\infty} v^2 f(v) dv. \quad (1.32)$$

После подстановки функции распределения и интегрирования получим

$$\overline{v^2} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,22v_{\text{вер}}. \quad (1.33)$$

Таким образом, средняя квадратичная скорость больше средней арифметической и больше наиболее вероятной скорости:

$$\overline{v^2} > \bar{v} > v_{\text{вер}}.$$

Рассмотрим функцию распределения по компонентам скорости. Это нагляднее всего провести с помощью прибора, называемого доской Гальтона. Доска Гальтона представляет собой тонкий ящик с прозрачной передней стенкой, в заднюю стенку которого в шахматном порядке вбиты гвозди. Вверху ящика имеется отверстие, в которое можно засыпать мелкие частицы – песок или крупу. Внизу доски помещены стеклянные трубочки, в которые в итоге попадают частицы (рис. 1.10).

Когда песчинка или зернышко попадают внутрь доски Гальтона, она испытывает многочисленные столкновения с гвоздями, и предугадать, в какую из стеклянных трубочек попадет частица, невозможно. Однако если таких частиц очень много, то их распределение по трубочкам имеет вид нормального распределения Гаусса (рис.1.11)

$$f(v_Z) = A e^{-\alpha v_Z^2}. \quad (1.34)$$

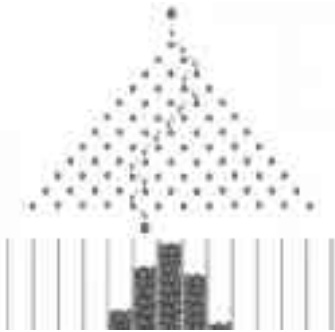


Рис. 1.10

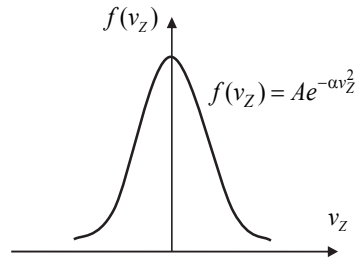


Рис. 1.11

Вычислив константы в функции распределения (1.34) из условия нормировки, получим функцию распределения Максвелла по компонентам скорости

$$f(v_z) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_z^2}{2kT}}. \quad (1.35)$$

Чтобы лучше понять различие между распределением Максвелла по скоростям и по компонентам скорости, рассмотрим стрельбу по мишени. Попадание в разные области мишени – это тоже случайный процесс, зависящий от многих факторов, умения стрелка, состояния спусковой пружины, одинаковости патронов, ветра и т. д. Оказывается, что при большом количестве выстрелов распределение пуль вокруг цели (центра мишени) будет подчиняться вполне определенному закону. Пусть мишень после большого количества выстрелов выглядит так, как показано на рис. 1.12, а. Посчитать количество попаданий в разные участки мишени можно разными способами. Если разбить мишень на полоски одинаковой толщины и посчитать количество попаданий в каждой полоске, получим распределение Максвелла по компонентам скорости (рис. 1.12, б). Если разбить мишень на концентрические кольца одинаковой толщины и посчитать количество попаданий в каждом кольце, то получим распределение Максвелла по скоростям (рис. 1.12, в).

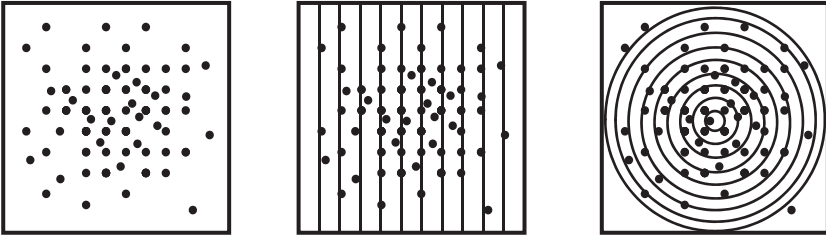
Из распределения Максвелла по скоростям можно найти распределение по значениям кинетической энергии. Введем новую переменную

$$E = \frac{m_0 v^2}{2}, \text{ тогда}$$

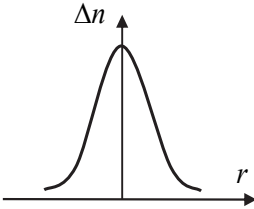
$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}, \quad dv = \frac{1}{\sqrt{2Em_0}} dE, \quad (1.36)$$

и подставим в (1.23) и (1.24)

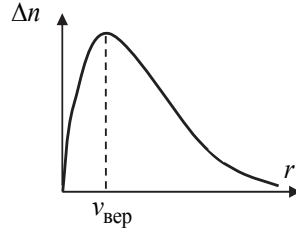
$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= f(v)dv = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} V^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv = \\ &= 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{2E}{m_0} e^{-\frac{m_0 \frac{2E}{m_0}}{2kT}} \frac{1}{\sqrt{2Em_0}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE. \end{aligned} \quad (1.37)$$



a



б



в

Рис. 1.12

Таким образом, функция распределения молекул по энергиям теплового движения имеет вид

$$f(E) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (1.38)$$

Вычислим среднюю энергию идеального газа

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \int_0^{\infty} E f(E) dE = \int_0^{\infty} E \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} dE = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} E^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} dE = \frac{3}{2} kT .\end{aligned}\quad (1.39)$$

Очевидно, что мы получили результат, выведенный ранее: средняя кинетическая энергия молекулы составляет $3/2 kT$

$$\bar{E} = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT .$$

1.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА ПО СКОРОСТЯМ И АТМОСФЕРЫ ПЛАНЕТ

Молекулы газов, находящихся в атмосфере Земли, движутся с различными скоростями. Причем есть молекулы, согласно распределению Максвелла, скорость которых превышает первую космическую скорость v_1 , и они движутся вокруг Земли по круговым либо эллиптическим орбитам (рис. 1.13). Есть молекулы, скорость которых превышает вторую космическую скорость v_2 , и они покидают атмосферу Земли, а также существуют молекулы, движущиеся с третьей космической скоростью v_3 , способные покинуть пределы Солнечной системы. Наша задача – оценить долю молекул, способных покинуть атмосферу Земли.

Между молекулой и Землей действует сила гравитационного притяжения

$$F = \frac{GmM}{r^2},$$

где m – масса молекулы; M – масса Земли; r – расстояние от молекулы до Земли; $G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Нм}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

Чтобы молекула могла улететь за пределы Земли, ее кинетическая энергия должна равняться работе гравитационных сил, затраченной на удаление тела от Земли в бесконечность:

$$\frac{mv_2^2}{2} = -\int_R^{\infty} \frac{GmM}{r^2} dr = \frac{GmM}{R},$$

где R – радиус Земли. Тогда вторая космическая скорость для Земли

$$v_2 = \sqrt{2G \frac{M}{R}} = \sqrt{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6}} = 1,12 \cdot 10^4 \text{ м/с}.$$

Наиболее вероятная скорость при $T = 273 \text{ К}$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 3,94 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

Отношение второй космической скорости к наиболее вероятной для Земли

$$\frac{v_2}{v_{\text{вер}}} = \frac{1,12 \cdot 10^4}{3,94 \cdot 10^2} = 28.$$

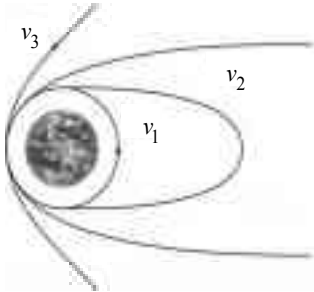


Рис. 1.13

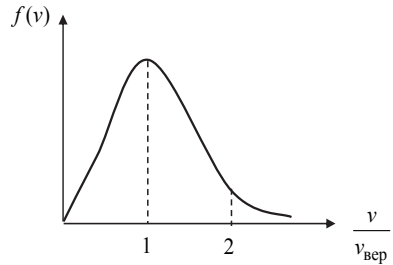


Рис. 1.14

Аналогичное отношение для Луны:

$$\frac{v_2}{v_{\text{вер}}} = \frac{2,4 \cdot 10^3}{3,94 \cdot 10^2} = 6.$$

На рис. 1.14 показана зависимость функции распределения от отношения $\frac{v}{v_{\text{вер}}}$. Очевидно, что максимум функции распределения нахо-

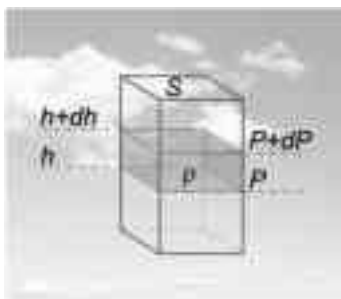
дится при $\frac{v}{v_{\text{вер}}} = 1$. Из рис. 1.14 также видно, что доля молекул, способных покинуть Землю, ничтожно мала. Доля молекул, способных покинуть атмосферу Луны, также мала, но значительно больше, чем для Земли. Поэтому с течением времени все молекулы воздуха покинули Луну, и у Луны нет атмосферы.

1.8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

Хаотическое движение молекул газа приводит к тому, что они полностью занимают весь объем сосуда, равномерно распределяясь в нем. Если посчитать в некоторый момент времени количество молекул в единице объема, находящейся в произвольном месте сосуда, и сравнить с количеством молекул в единице объема, расположенном в другом месте сосуда, то эти числа будут примерно одинаковые. Однако если поместить сосуд с газом в некоторое поле сил, например в поле тяжести Земли, картина распределения молекул в сосуде изменится.

Рассмотрим газ, находящийся в поле тяжести Земли. Если бы не было теплового движения молекул, то они все бы упали на Землю под действием силы тяжести. Если бы не было силы тяжести, то все молекулы разлетелись по всему мировому пространству, и у Земли не было бы атмосферы. Таким образом, атмосфера Земли – результат действия теплового движения молекул и сил гравитации, причем молекулы в атмосфере распределены по вполне определенному закону.

Вычислим давление P , которое создает вертикальный столб газа высотой h (рис. 1.15):



$$P = \frac{mg}{S} = \frac{\rho ghS}{S} = \rho gh,$$

где m – масса газа; S – площадь поперечного сечения; ρ – плотность газа.

С повышением высоты dh давление газа уменьшается на dP :

$$dP = -\rho g dh. \quad (1.40)$$

Рис. 1.15

Выразим плотность газа ρ из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$PV = \frac{m}{\mu}RT, \quad P = \frac{m}{V} \frac{1}{\mu}RT = \rho \frac{1}{\mu}RT,$$

$$\rho = \frac{\mu P}{RT}. \quad (1.41)$$

Подставим (1.41) в (1.40)

$$dP = -\frac{\mu P}{RT} g dh$$

и разделим переменные

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu}{RT} g dh. \quad (1.42)$$

Если считать, что температура не зависит от высоты, то уравнение (1.42) можно проинтегрировать:

$$\int \frac{dP}{P} = -\frac{\mu}{RT} g \int dh, \quad \ln P = -\frac{\mu gh}{RT} + \ln \text{const},$$

$$P = \text{const} e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (1.43)$$

Постоянная в уравнении (1.43) берется из известного давления P_0 при $h = 0$:

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (1.44)$$

Учтем, что $\mu = m_0 N_A$ и $R = k N_A$, где m_0 – масса молекулы; k – постоянная Больцмана, тогда (1.44) можно переписать в виде

$$P = P_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}. \quad (1.45)$$

Выражения (1.44) и (1.45) называются *барометрической формулой*, с их помощью можно рассчитать давление в зависимости от высоты или

по известному давлению вычислить высоту. График зависимости давления от высоты при двух температурах показан на рис. 1.16.

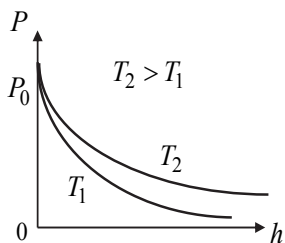


Рис. 1.16

Если учесть, что концентрация молекул n связана с давлением основным уравнением молекулярно-кинетической теории $P = nkT$, то можно получить формулу зависимости концентрации от высоты

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}. \quad (1.46)$$

Выражение (1.46) учитывает влияние поля тяжести Земли и его называют **распределением Больцмана**. Концентрация молекул газа уменьшается с ростом высоты как экспоненциальная функция.

2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ ЗАКОН РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

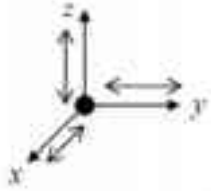

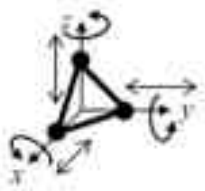
В классической модели идеального одноатомного газа молекулы рассматриваются как материальные точки. В многоатомных молекулах молекула состоит из 2, 3 или нескольких материальных точек, соединенных между собой жесткой связью (жесткими невесомыми стержнями). Энергия молекулы определяется ее кинетическими энергиями поступательного движения вдоль взаимно перпендикулярных осей и кинетическими энергиями вращательного движения вокруг взаимно перпендикулярных осей.

Число степеней свободы — количество независимых переменных, полностью определяющих положение системы в пространстве. В табл. 2.1 показаны модели одно-, двух- и трехатомных молекул с соответствующими степенями свободы.

Молекула одноатомного газа может двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей, поэтому она обладает **тремя поступатель-**

ными степенями свободы. Вращательные степени свободы для нее отсутствуют, поскольку момент инерции материальной точки относительно оси, проходящей через нее, равен 0.

Таблица 2.1

| Степени свободы | Одноатомный газ | Двухатомный газ | Трехатомный газ |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Модель |  |  |  |
| Поступательные степени свободы | 3 | 3 | 3 |
| Вращательные степени свободы | 0 | 2 | 3 |
| Общее число степеней свободы | 3 | 5 | 6 |

Молекула двухатомного газа – это две материальные точки, соединенные между собой жесткой связью (два шарика на тонком невесомом стержне). Она обладает **тремя поступательными степенями свободы и двумя вращательными** (момент инерции молекулы относительно оси, проходящей через ее жесткую связь, равен 0).

Молекула трехатомного газа – это три материальные точки, соединенные между собой жесткими связями. Она обладает **тремя поступательными степенями свободы и тремя вращательными** вокруг трех взаимно перпендикулярных осей.

Необходимо отметить, что в реальных молекулах жесткая связь между атомами отсутствует, и в них необходимо дополнительно рассматривать колебательные степени свободы.

В разделе 1.4 мы получили выражение для средней кинетической энергии одноатомного газа

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT.$$

В одноатомном газе три степени свободы, следовательно, на каждую степень свободы приходится энергия $\frac{kT}{2}$.

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы: на каждую поступательную и вращательную степень свободы приходится энергия $\frac{kT}{2}$, а на каждую колебательную степень свободы приходится энергия kT . Средняя энергия одной молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT, \quad (2.1)$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$ – число степеней свободы молекулы.

Чтобы вычислить энергию всех молекул

$$U = \langle E \rangle = \frac{m}{\mu} N_A \langle \varepsilon \rangle = \frac{m}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT, \quad (2.2)$$

где $\frac{m}{\mu}$ – количество молей газа.

Выражение (2.2) определяет **внутреннюю энергию** идеального газа. Внутренняя энергия идеального газа определяется только его температурой. Внутренняя энергия газа не зависит от способа перехода в состояние с данной температурой. Такие величины называются **функциями состояния**.

2.2. РАБОТА ГАЗА

Рассмотрим газ, находящийся в сосуде под поршнем (рис. 2.1).

При расширении газ передвинул поршень на расстояние $d\ell$ и совершил элементарную работу

$$\delta A = Fd\ell = PSd\ell = PdV, \quad (2.3)$$

где P – давление газа; S – площадь поршня; dV – изменение объема газа при расширении. Обозначение δA показывает, что элементарная работа зависит от способа перехода газа из одного состояния в другое, т. е. работа не является функцией состояния.

Чтобы найти полную работу A , совершаемую газом при расширении от объема V_1 до объема V_2 , необходимо проинтегрировать выражение (2.3):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV . \quad (2.4)$$

Рассмотрим геометрический смысл работы. Изобразим некоторый переход газа из состояния 1 в состояние 2 в осях давление – объем (на $P-V$ диаграмме), рис.2.2.

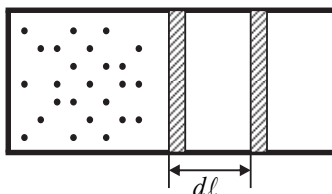


Рис. 2.1

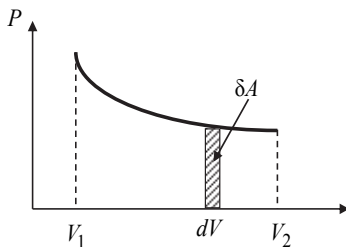


Рис. 2.2

Площадь заштрихованного прямоугольника – это элементарная работа δA , таким образом, площадь под всей кривой – это работа, совершаемая газом. Если газ расширяется, то работа положительная, если газ сжимается, то работа отрицательная.

Наиболее просто с точки зрения геометрии вычисляется работа для изобарного процесса $P = \text{const}$. Процесс изобарного расширения от объема V_1 до объема V_2 показан на рис. 2.3.

Площадь под кривой – это работа газа

$$A = S = P(V_2 - V_1) .$$

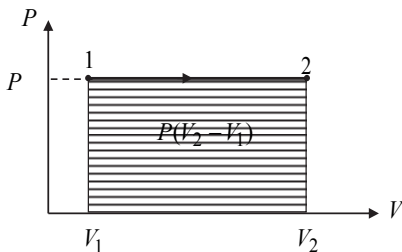


Рис. 2.3

2.3. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Внутреннюю энергию системы можно изменить двумя путями: совершая работу либо передавая тепло. Если вдвигать поршень в сосуд с газом (рис. 2.1), то меняется давление и объем газа, следовательно, меняется и температура. Температуру газа можно изменить также за счет теплообмена с более горячим или более холодным телом, т. е., сообщая или отбирая тепло у газа. Во всех этих случаях должен выполняться закон сохранения энергии, который в термодинамике носит название *первого начала термодинамики*.

Пусть газ в некотором состоянии обладал внутренней энергией U_1 , затем он получил некоторое тепло Q , совершил работу против внешних сил A и перешел в состояние с внутренней энергией U_2 . По закону сохранения энергии $\Delta U = U_2 - U_1$:

$$\Delta U = Q - A, \quad (2.5)$$

$$Q = \Delta U + A. \quad (2.6)$$

Выражение (2.6) является математическим выражением первого начала термодинамики: тепло, подведенное к системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение работы против внешних сил. В выражении (2.6) тепло берется со знаком «+», если оно подводится к системе, и со знаком «-», если оно отбирается у системы. Работа считается положительной, когда система совершает ее против внешних сил.

Для бесконечно малых изменений состояний системы первое начало термодинамики имеет вид

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2.7)$$

где символы бесконечно малых элементарных работ δA и тепла δQ подчеркивают, что и тепло, и работа зависят от способа перехода системы из одного состояния в другое.

Если система возвращается в исходное состояние, то изменение ее внутренней энергии $\Delta U = 0$ и $Q = A$, т. е. невозможен двигатель, который бы совершал большую работу, чем сообщенная ему извне энергия.

2.4. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Удельная теплоемкость – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг вещества на 1 К

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}. \quad (2.8)$$

Единицы измерения удельной теплоемкости $[c] = \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$.

Молярная теплоемкость – количество теплоты, необходимое для нагревания 1 моля вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\frac{m}{\mu} dT}, \quad (2.9)$$

где $\frac{m}{\mu}$ – количество молей вещества.

Единицы измерения молярной теплоемкости $[C_m] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Молярная теплоемкость C_m связана с удельной теплоемкостью c соотношением

$$C_m = c\mu. \quad (2.10)$$

Различают молярные теплоемкости при постоянном объеме C_V и при постоянном давлении C_P .

Запишем первое начало термодинамики для одного моля:

$$\begin{aligned} \delta Q_m &= dU_m + \delta A_m, \\ C_m dT &= dU_m + PdV_m. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Если процесс идет при постоянном объеме $V = \text{const}$, то $\delta A = PdV_m = 0$ и

$$C_V dT = dU_m. \quad (2.12)$$

Согласно (2.2) для 1-го моля $dU_m = \frac{i}{2}RdT$, тогда молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V dT = \frac{i}{2}RdT ,$$
$$C_V = \frac{i}{2}R . \quad (2.13)$$

Таким образом, можно записать формулу для вычисления изменения внутренней энергии

$$dU = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2}RdT = \frac{m}{\mu} C_V dT . \quad (2.14)$$

Молярная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_P dT = C_V dT + PdV . \quad (2.15)$$

Выразим PdV из уравнения Клапейрона–Менделеева для 1-го моля

$$PdV = RdT$$

и подставим в (2.15)

$$C_P dT = C_V dT + RdT ,$$
$$C_P = C_V + R . \quad (2.16)$$

Выражение (2.16) связывает между собой молярные теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме и называется **уравнением Майера**.

Теплоемкость при постоянном давлении C_P всегда больше теплоемкости при постоянном объеме C_V , поскольку при изобарном процессе требуется дополнительное количество теплоты на совершение газом работы. Если подставить в уравнение Майера выражение (2.13), получим зависимость C_P от числа степеней свободы газа:

$$C_P = \frac{i+2}{2}R . \quad (2.17)$$

В термодинамике важную роль играет отношение

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (2.18)$$

Теплоемкости при постоянном давлении и при постоянном объеме легко вычислить, зная, сколько атомов содержится в молекуле газа. Эти данные приведены в табл. 2.2.

Т а б л и ц а 2.2

| Газ | Одноатомный газ | Двухатомный газ | Трехатомный газ |
|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| i | 3 | 5 | 6 |
| C_V | $\frac{3}{2}R$ | $\frac{5}{2}R$ | $3R$ |
| C_P | $\frac{5}{2}R$ | $\frac{7}{2}R$ | $4R$ |
| $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{3}{4}$ |

2.5. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИЗОПРОЦЕССАМ

Изохорный процесс $V = \text{const}$

При изохорном процессе не совершается работа $\delta A = PdV = 0$, поэтому первое начало термодинамики запишется в виде

$$\delta Q_V = dU = \frac{m}{\mu} C_V dT. \quad (2.19)$$

Изобарный процесс $P = \text{const}$

Для изобарного процесса первое начало термодинамики запишется в виде

$$\delta Q_P = dU + \delta A,$$

$$\frac{m}{\mu} C_P dT = \frac{m}{\mu} C_V dT + PdV. \quad (2.20)$$

Возьмем дифференциал от правой и левой части уравнения Клапейрона–Менделеева, учитывая, что $P = \text{const}$ и вычислим элементарную работу:

$$\delta A = PdV, \quad PdV = \frac{m}{\mu} R dT, \\ \delta A = \frac{m}{\mu} R dT. \quad (2.21)$$

Если температура тела меняется от T_1 до T_2 , то работа, совершаемая газом при изобарном нагревании

$$A = \frac{m}{\mu} R (T_2 - T_1). \quad (2.22)$$

Из (2.22) понятен физический смысл универсальной газовой постоянной R – это работа изобарного расширения 1-го моля газа при нагревании его на 1 К.

Изотермический процесс $T = \text{const}$

При изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется $dU = 0$, поэтому все подводимое тепло идет на совершение работы

$$\delta Q = \delta A = PdV. \quad (2.23)$$

Воспользуемся уравнением Клапейрона–Менделеева, чтобы выразить из него давление

$$P = \frac{m}{\mu} R \frac{T}{V},$$

подставим в (2.23)

$$\delta A = \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V}$$

и проинтегрируем для нахождения полной работы

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{\mu} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.24)$$

При изотермическом процессе $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$, поэтому работу можно записать еще и в таком виде:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (2.25)$$

Таким образом, чтобы при изотермическом расширении поддерживать постоянной температуру газа, к нему необходимо подводить тепло, равное работе расширения.

2.6. АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

При адиабатическом процессе не происходит теплообмена с окружающей средой, поэтому работа, связанная с изменением объема газа, сопровождается изменением его внутренней энергии

$$\delta Q = 0, \quad dU = -\delta A. \quad (2.26)$$

Знак « \leftarrow » в (2.26) показывает, что при адиабатном расширении температура газа понижается, а при адиабатном сжатии температура газа увеличивается. Последнее утверждение легко понять, рассмотрев кинематику столкновения молекулы газа с движущимся поршнем. Пусть газ заключен в сосуд с подвижным поршнем и пусть происходит расширение газа (рис. 24).

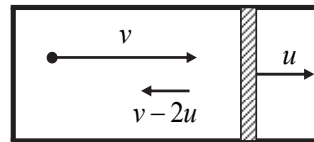


Рис. 2.4

Для простоты рассмотрим молекулу, движущуюся в горизонтальном направлении со скоростью v относительно стенок сосуда, скорость движения поршня u . Скорость молекулы относительно поршня $v - u$. После абсолютно упругого удара о поршень молекула полетит обратно со скоростью $v - u$ относительно поршня. Однако относительно стенок сосуда скорость молекулы теперь станет $|v - u - u| = |v - 2u|$. Таким образом, после удара о поршень понизилась скорость молекулы, следовательно, понизилась ее кинетическая энергия и температура газа. Если поршень будет двигаться в обратном направлении (сжатие газа), то скорость молекулы до удара будет $v + u$, а после удара $v + 2u$, и температура газа наоборот повысится.

Выведем уравнение, связывающее давление и объем газа при адиабатическом процессе. Согласно (2.26)

$$\frac{m}{\mu} C_V dT = -PdV . \quad (2.27)$$

Продифференцируем уравнение Клапейрона – Менделеева

$$dPV + PdV = \frac{m}{\mu} R dT . \quad (2.28)$$

Поделим (2.28) на (2.27)

$$\frac{dPV + PdV}{PdV} = - \frac{\frac{m}{\mu} R dT}{\frac{m}{\mu} C_V dT} ,$$

$$\frac{dPV + PdV}{PdV} = - \frac{R}{C_V} = - \frac{C_P - C_V}{C_V} = -(\gamma - 1) = 1 - \gamma ,$$

$$\frac{dPV}{PdV} + 1 = 1 - \gamma , \quad \frac{dPV}{PdV} = -\gamma , \quad \frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} . \quad (2.29)$$

Проинтегрируем (2.29):

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = -\gamma \ln \frac{V_2}{V_1} , \quad \ln \frac{P_2}{P_1} = \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma , \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma = \text{const} , \quad (2.30)$$

где $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ называется **показателем адиабаты**.

Уравнение (2.30) называется **уравнением Пуассона**, или уравнением адиабатического процесса.

Уравнение адиабатического процесса также можно записать и в других переменных:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} , \quad (2.31)$$

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{const} . \quad (2.32)$$

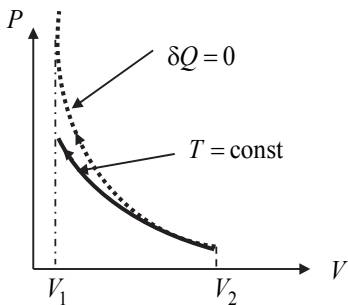


Рис. 2.5

Адиабата и изотерма, построенные в осях $P-V$, показаны на рис. 2.5. Адиабата идет круче, чем изотерма.

Чтобы найти работу адиабатного расширения, надо проинтегрировать (2.27):

$$A = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{m}{\mu} C_V dT = - \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \quad (2.33)$$

Приведем и другие формулы для работы, которые можно получить с помощью уравнения Пуассона и выражения (2.33):

$$A = \frac{m}{\mu} \frac{R}{\gamma - 1} T_1 \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right), \quad (2.34)$$

$$A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right). \quad (2.35)$$

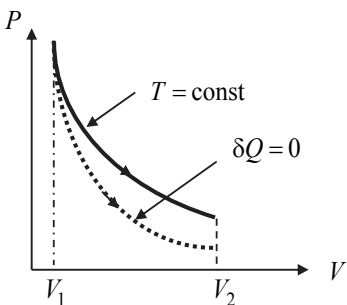


Рис. 2.6

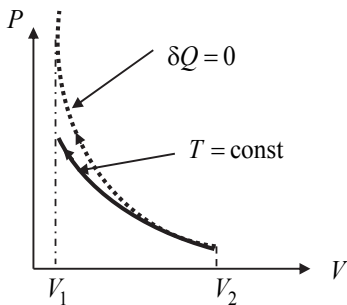


Рис. 2.7

Сравним работы адиабатического расширения и изотермического расширения от объема V_1 до объема V_2 . Для этого построим графики

изотермического и адиабатического процессов на $P-V$ -диаграмме (рис. 2.6). Работа – это площадь под кривой, построенной в указанных осях. Очевидно, что площадь под изотермой больше площади под адиабатой, поэтому работа газа, затраченная на адиабатическое расширение, меньше работы, затраченной на изотермическое расширение.

Если построить аналогичные кривые для изотермического и адиабатического сжатия (рис. 2.7), то получим обратный результат, работа изотермического сжатия меньше работы адиабатического сжатия.

2.7. ЦИКЛЫ

Циклом (круговым процессом) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд промежуточных состояний, возвращается в исходное состояние. На диаграммах цикл изображается замкнутой кривой. Если работа, совершенная за цикл положительная, то цикл называется **прямым** (рис. 2.8, а), если работа отрицательная, то цикл называется **обратным** (рис. 2.8, б).

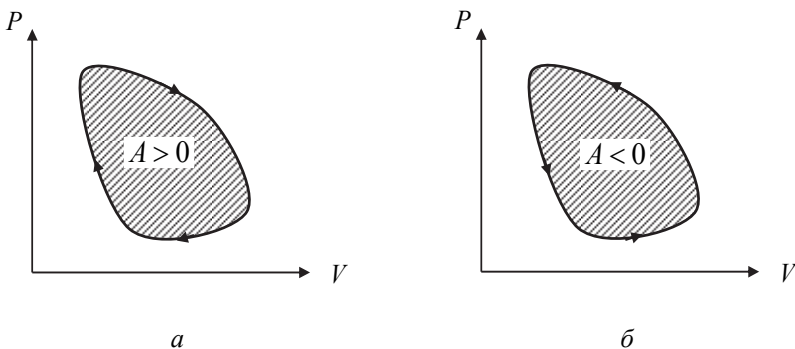


Рис. 2.8

Работа – это площадь под кривой, построенной в осях $P-V$. На рис. 2.8, а положительная работа расширения больше отрицательной работы сжатия, поэтому результирующая работа положительна и ее величина – площадь фигуры, образованной различными стадиями цикла. На рис. 2.8, б положительная работа расширения меньше отрицательной работы сжатия, поэтому результирующая работа отрицательна, и ее модуль – площадь фигуры, образованной различными стадиями цикла. Прямые циклы используются в тепловых двигателях, совершающих ра-

боту за счет полученной извне теплоты. Обратные циклы применяются в холодильных машинах, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится от менее нагретого тела к более нагретому.

Вычислим работу прямого цикла, состоящего из двух изобар и двух изохор. Объем в пределах цикла меняется от V_1 до V_2 , давление от P_1 до P_2 (рис. 2.9).

Работа для приведенного прямого цикла вычисляется достаточно просто – это площадь заштрихованного прямоугольника на рис. 2.9.

$$A = (P_2 - P_1)(V_2 - V_1).$$

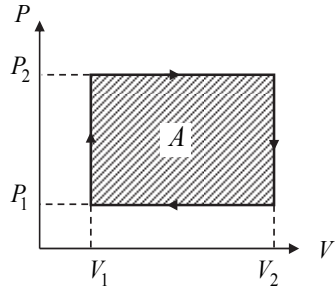


Рис. 2.9

В цикле система возвращается в исходное состояние, поэтому изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$ и совершенная работа равна теплу $A = Q$. Однако в процессе цикла система может как получать тепло (обозначим полученное тепло Q_1), так и отдавать его (обозначим отданное тепло Q_2), поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2. \quad (2.36)$$

Термическим коэффициентом полезного действия для кругового процесса называется

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2.37)$$

Термодинамический процесс называется *обратимым*, если он может проходить как в прямом, так и в обратном направлении. Причем, если пройдя ряд промежуточных состояний система вернулась в исходное, то в окружающей среде и в самой системе не происходит никаких изменений. Конечно, обратимый процесс является идеализированной моделью, поскольку в реальных системах всегда присутствуют силы трения, теплопроводность и т. д. Обратимые процессы являются равновесными, поскольку в любом состоянии термодинамической системы ей безразлично, идет процесс в прямом или в обратном направлении.

Все остальные процессы, не являющиеся обратимыми, называются *необратимыми*.

2.8. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ

Понятие энтропии было введено в 1865 году Р. Клаузиусом, который ввел понятие *приведенного количества теплоты* $\frac{\delta Q}{T}$ на бесконечно малом участке процесса, когда $T = \text{const}$. Теоретический анализ показывает, что для любого обратимого кругового процесса

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (2.38)$$

С точки зрения математики это означает, что приведенное тепло является полным дифференциалом некоторой функции состояния, для которой не важен путь, по которому идет процесс. Эта функция состояния была названа *термодинамической энтропией*

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.39)$$

Если система совершает равновесный переход из состояния 1 в состояние 2, то изменение энтропии

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.40)$$

Таким образом, энтропия, так же как и потенциальная энергия, определяется с точностью до некоторой постоянной, и *физический смысл имеет разность энтропий*.

Воспользуемся первым началом термодинамики, чтобы вычислить изменение энтропии при различных процессах:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dU + \delta A}{T} = \int_1^2 \frac{m C_V dT + PdV}{T}. \quad (2.41)$$

Из уравнения Клапейрона–Менделеева выразим давление

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad P = \frac{1}{V} \frac{m}{\mu} RT$$

и подставим его в (2.41)

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2} &= \int_1^2 \frac{\frac{m}{\mu} C_V dT + \frac{1}{V} \frac{m}{\mu} RT dV}{T} = \int_1^2 \frac{m}{\mu} C_V \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{m}{\mu} R \frac{dV}{V} = \\ &= \frac{m}{\mu} C_V \int_1^2 \frac{dT}{T} + \frac{m}{\mu} R \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Как видно из (2.42), *изменение энтропии не зависит от способа перехода системы из состояния 1 в состояние 2.*

Для *изотермического процесса* $T = \text{const}$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} R \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.43)$$

Для *изохорного процесса* $V = \text{const}$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} C_V \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.44)$$

Для *изобарного процесса* $P = \text{const}$ изменение энтропии определяется формулой (2.42).

Для *адиабатического процесса* $\delta Q = 0$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 0.$$

Таким образом, *адиабатический процесс – это изоэнтропийный процесс.*

Энтропия обладает *свойством аддитивности*, энтропия системы газов равна сумме энтропий каждого газа в отдельности. Аналогичным свойством обладает, например, масса тела.

Рассмотрим теплоизолированный сосуд, разделенный перегородкой на две части. В одной части объемом V_1 находится $\frac{m_1}{\mu_1}$ молей одного газа с теплоемкостью C_{V1} при температуре T_1 . В другой части объемом V_2 находится $\frac{m_2}{\mu_2}$ молей одного газа с теплоемкостью C_{V2}

при температуре T_2 . Перегородку медленно убирают, и газы перемешиваются. Найдем изменение энтропии в этом случае.

Температуру T , которая установится после перемешивания газов, можно найти из условия

$$\frac{m_1}{\mu_1} C_{V1} (T - T_1) = \frac{m_2}{\mu_2} C_{V2} (T_2 - T),$$

$$T = \frac{\frac{m_1}{\mu_1} C_{V1} T_1 + \frac{m_2}{\mu_2} C_{V2} T_2}{\frac{m_1}{\mu_1} C_{V1} + \frac{m_2}{\mu_2} C_{V2}}. \quad (2.45)$$

Тогда для первого газа изменение энтропии в соответствии с (2.42)

$$\Delta S_1 = \frac{m_1}{\mu_1} C_{V1} \int_{T_1}^T \frac{dT}{T} + \frac{m_1}{\mu_1} R \int_{V_1}^V \frac{dV}{V} = \frac{m_1}{\mu_1} \left(C_{V1} \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{V}{V_1} \right),$$

для второго газа

$$\Delta S_2 = \frac{m_2}{\mu_2} C_{V2} \int_{T_2}^T \frac{dT}{T} + \frac{m_2}{\mu_2} R \int_{V_2}^V \frac{dV}{V} = \frac{m_2}{\mu_2} \left(C_{V2} \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V}{V_2} \right).$$

Суммарное изменение энтропии

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_1 + \Delta S_2 = \\ &= \frac{m_1}{\mu_1} \left(C_{V1} \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{V}{V_1} \right) + \frac{m_2}{\mu_2} \left(C_{V2} \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V}{V_2} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

В частном случае, когда $\frac{m_1}{\mu_1} = \frac{m_2}{\mu_2} = 1$ и $C_{V1} = C_{V2}$, установившаяся

температура $T = \frac{T_1 + T_2}{2}$, тогда

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + C_V \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2} + R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}.$$

Если $T_1 = T_2$ и $V_1 = V_2$, то

$$\Delta S = C_V \ln \frac{2T_1}{2T_1} + R \ln \frac{2V_1}{V_1} + C_V \ln \frac{2T_2}{2T_2} + R \ln \frac{2V_2}{V_2} = 2R \ln 2.$$

2.9. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНТРОПИИ

Более глубокий смысл энтропии скрывается в ее статистическом определении, которое связано с понятием термодинамической вероятности W . Термодинамической вероятностью называется число способов, которым может быть реализовано данное макросостояние системы. Термодинамическая вероятность всегда больше либо равна единице:

$$W \geq 1,$$

поэтому ее нельзя отождествлять с математической вероятностью, которая всегда меньше либо равна единице.

Пусть у нас имеется две ячейки и две молекулы, которые мы можем различить. Возможные варианты распределения молекул между ячейками показаны на рис. 2.10.



Рис. 2.10

Термодинамическая вероятность того, что обе молекулы расположены в правой ячейке, равна единице. Термодинамическая вероятность того, что молекулы распределены равномерно между ячейками, равна двум. Отметим, что термодинамическая вероятность равномерного распределения молекул больше. Количество способов, которыми можно распределить две молекулы между двумя ячейками, равно $4 = 2^2$.

Если у нас имеется две ячейки и четыре молекулы, то возможные варианты распределения молекул между ячейками показаны на рис. 2.11.

Термодинамическая вероятность равномерного распределения молекул между ячейками равна шести, а общее число возможных вариантов распределения молекул $16 = 2^4$. Очевидно, что для случая N молекул их можно распределить между ячейками $Z = 2^N$ способами.

Больцман ввел статистическое определение энтропии

$$S = k \ln W. \quad (2.47)$$

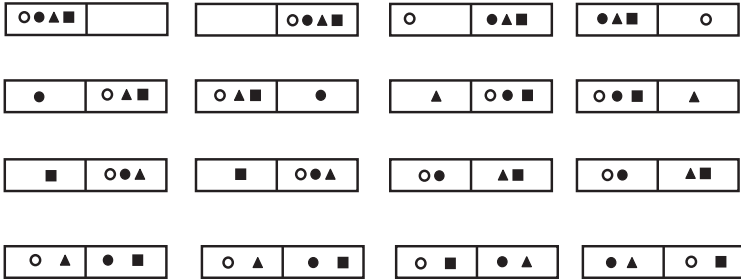


Рис. 2.11

Следовательно, энтропия может рассматриваться *как мера вероятности данного состояния системы*.

Энтропия также указывает направление протекания самопроизвольных термодинамических процессов.

Рассмотрим два одинаковых сосуда, соединенных между собой так, чтобы газ мог перетекать из одного сосуда в другой. Если в начальный момент времени весь газ находился в одном сосуде, то с течением времени установится равновесное состояние, при котором газ заполнит оба сосуда равномерно. Обратный переход из равновесного состояния в неравновесное, когда весь газ заключен в одном из сосудов, невозможен. Состояние равновесия характеризуется максимальным значением энтропии. Следовательно, процессы, приводящие систему из неравновесного состояния в равновесное, происходят с увеличением энтропии. Это утверждение называется **законом возрастания энтропии**: в замкнутых системах при необратимых процессах энтропия всегда возрастает. Отметим, что закон возрастания энтропии справедлив только для очень большого числа частиц, если же число частиц невелико, то энтропия системы может не меняться или даже уменьшаться.

2.10. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Первое начало термодинамики выражает закон сохранения энергии, однако оно не позволяет предсказать направление протекания процессов. Направление протекания процессов можно предсказать с помощью энтропии.

Из определения энтропии следует, что при обратимых процессах в замкнутых системах энтропия не меняется:

$$\Delta S = 0, \quad (2.48)$$

при необратимых процессах в замкнутых системах энтропия всегда возрастает:

$$\Delta S > 0. \quad (2.49)$$

Соотношения (2.48) и (2.49) можно объединить в одно, которое называется неравенством Клаузиуса

$$\Delta S \geq 0. \quad (2.50)$$

Итак, закон возрастания энтропии определяет направление протекания термодинамических процессов – **второе начало термодинамики**. С точки зрения статистики процесс протекает от менее вероятного к более вероятному, т. е. процесс идет с возрастанием энтропии.

Третье начало термодинамики было сформулировано в 1906 году немецким физиком Нернстом на основе обобщения эмпирических фактов и получило название теоремы Нернста: при стремлении температуры любой равновесной термодинамической системы к нулю, ее энтропия также стремится к 0:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0. \quad (2.51)$$

Объяснение теоремы Нернста можно дать только на основе квантово-механических представлений. Следствием теоремы Нернста является невозможность охладить тело до абсолютного нуля.

2.11. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ И ХОЛОДИЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Первые тепловые машины были изобретены в 1690 году и предназначались для подъема воды из шахт. После изобретения Уаттом в 1784 году паровой машины двойного действия, в которой пар совершал работу по обе стороны от поршня, появились тепловые двигатели, работающие на различных термодинамических циклах. Двигатели внутреннего сгорания, реактивные двигатели, тепловые турбины – это примеры тепловых машин.

Тепловые двигатели предназначены для получения полезной работы за счет теплоты, которая может выделяться, например, в результате химической реакции (сгорание топлива) или по другим причинам. Для работы тепловой машины необходимы три составляющие: нагрева-

тель, холодильник, рабочее тело. Иногда в качестве холодильника может выступать окружающая среда. Принцип действия тепловой машины и ее термодинамический цикл показаны на рис. 2.12.

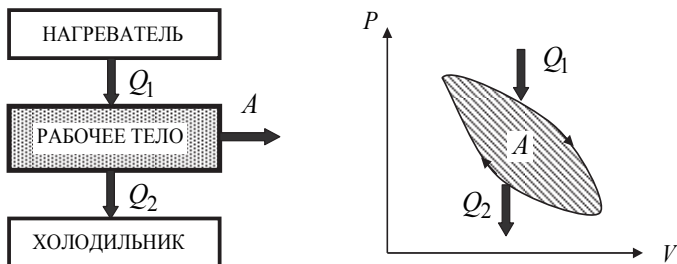


Рис. 2.12

Нагреватель передает рабочему телу тепло Q_1 , нагревая его. Рабочее тело совершает работу (например, вращает турбину), и для возвращения в исходное состояние ему необходимо понизить температуру, т. е. отдать холодильнику тепло Q_2 . Наличие холодильника – обязательное условие для функционирования тепловой машины, поскольку без него невозможно возвращение рабочего тела в исходное состояние для повторения цикла.

Поскольку рабочее тело после завершения цикла возвращается в исходное состояние, его внутренняя энергия не меняется, $\Delta U = 0$, и работа равна разности полученного и отданного тепла

$$A = Q_1 - Q_2. \quad (2.52)$$

Коэффициент полезного действия теплового двигателя – отношение совершенной работы к подведенному теплу:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (2.53)$$

Термодинамический цикл, осуществляемый в обратном направлении, может быть использован для работы холодильной машины (рис. 2.13).

Холодильные машины не предназначены для совершения механической работы за счет полученной теплоты, с их помощью можно охлаждать тела за счет совершенной работы. При этом происходит отвод

теплоты Q_2 от охлаждаемого тела и передача теплоты Q_1 тепловому резервуару, в качестве которого может выступать окружающая среда.

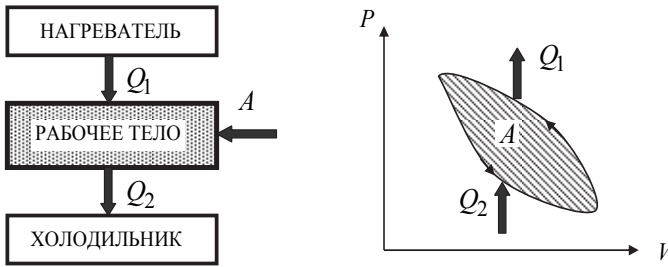


Рис. 2.13

Коэффициент полезного действия холодильной машины – отношение отнятого тепла Q_2 к затраченной работе

$$\eta = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (2.54)$$

В зависимости от соотношения количества тепла, отводимого от охлаждаемого тела и работы, КПД холодильной машины может быть как больше, так и меньше единицы. Отметим, что для теплового двигателя КПД всегда меньше единицы.

Холодильная машина может быть использована не только для охлаждения различных тел, но и для отопления помещения. Примером этого служит обыкновенный бытовой холодильник, который, охлаждая продукты, нагревает воздух в комнате.

2.12. ЦИКЛ КАРНО

Теория создания экономичного теплового двигателя впервые была изложена французским физиком и военным инженером Никола Леонардом Сади Карно в 1924 году в работе «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу».

Рассмотрим цикл Карно подробнее. Пусть первоначально газ занимает объем V_1 и находится при температуре нагревателя T_1 , затем он приводится в контакт с нагревателем и совершает работу за счет изотермического расширения (рис. 2.14).

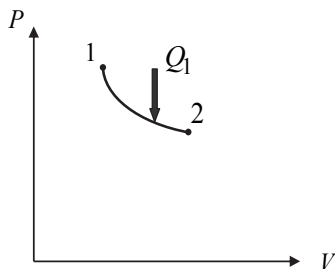


Рис. 2.14

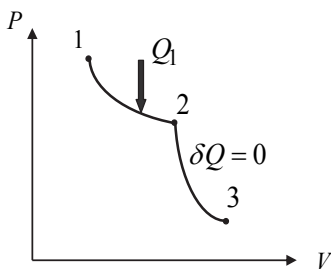


Рис. 2.15

Затем, чтобы вернуться в исходное состояние, газ должен быть сжат при температуре $T_2 < T_1$, чтобы работа цикла была положительна. Вопрос состоит в том, как охладить газ до температуры T_2 ? Газ надо охлаждать так, чтобы при теплопередаче еще и совершалась бы работа (для наиболее эффективной работы теплового двигателя). Поэтому единственно возможным процессом, при котором совершается работа да еще и происходит охлаждение газа, является адиабатическое расширение (рис. 2.15).

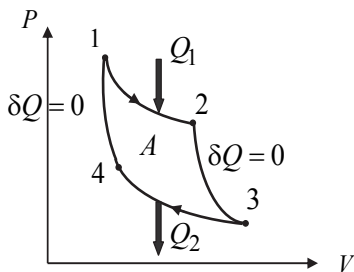


Рис. 2.16

Очевидно, что два последующих этапа цикла должны быть изотермическое сжатие при температуре холодильника T_2 (процесс 3–4, рис. 2.16) и адиабатическое сжатие для возвращения газа в исходное состояние (процесс 4–1, рис. 2.16). Полностью цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат, показан на рис. 2.16.

Вычислим КПД цикла Карно. По определению

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Тепло Q_1 получается газом в процессе изотермического расширения 1–2, для которого

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (2.55)$$

Тепло Q_2 отдается газом в процессе изотермического сжатия 3–4, для которого

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (2.56)$$

Процессы 2–3 и 4–1 – адиабатические, поэтому для них выполняются уравнения Пуассона

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \quad (2.57)$$

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1}. \quad (2.58)$$

Поделив (2.56) на (2.57), получим

$$\frac{V_2^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}} = \frac{V_3^{\gamma-1}}{V_4^{\gamma-1}},$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (2.59)$$

Теперь можно вычислить КПД цикла Карно с учетом (2.54), (2.55) и (2.59):

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2.60)$$

Таким образом, КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2 .

Цикл Карно удобно изображать в осях температура – энтропия ($T-S$), рис. 2.17. В этих осях изотермические процессы изображаются горизонтальными линиями, а адиабатические (изоэнтропийные) процессы – вертикальными.

Площадь под кривой в осях $T - S$ – это полученное или отданное тепло. Если энтропия увеличивается, то тепло получается газом, если энтропия уменьшается, то тепло отдается газом. Для цикла Карно полученное тепло

$$Q_1 = T_1 \Delta S,$$

где $\Delta S = S_2 - S_1 = S_3 - S_4$ – изменение энтропии.

Отданное тепло

$$Q_2 = T_2 \Delta S.$$

КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 \Delta S - T_2 \Delta S}{T_1 \Delta S} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Мы получили такое же значение КПД, как и в формуле (2.60), только более простым способом.

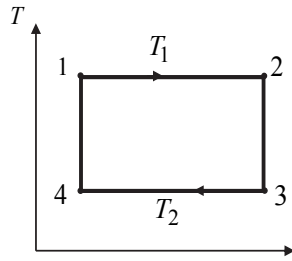


Рис. 2.17

2.13. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ КПД ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЦИКЛОВ

Двигатель внутреннего сгорания

Рассмотрим цикл двигателя внутреннего сгорания для идеального газа с показателем адиабаты γ , состоящего из двух изохор и двух адиабат, причем объем меняется в пределах цикла в n раз (рис. 2.18).

КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

Следовательно, необходимо выяснить, на каких участках газ получает тепло, а на каких отдает. Рассмотрим подробно каждый участок цикла.

1–2 – адиабатическое расширение, при котором не происходит теплообмена $\delta Q = 0$.

2–3 – изохорическое охлаждение газа, газ отдает тепло

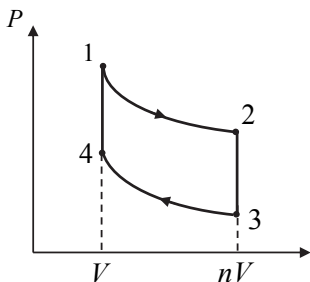


Рис. 2.18

$$Q_2 = \frac{m}{\mu} C_V (T_3 - T_2) < 0. \quad (2.61)$$

3–4 – адиабатическое сжатие, при котором не происходит теплообмена $\delta Q = 0$.

4–1 – изохорическое нагревание газа, газ получает тепло

$$Q_1 = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_4) > 0. \quad (2.62)$$

КПД цикла

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_4) - \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_3)}{\frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_4)} = \frac{T_1 - T_4 - T_2 + T_3}{T_1 - T_4}. \quad (2.63)$$

Температуры газа на участках 1–2 и 3–4 (адиабатах) связаны между собой уравнением Пуассона

$$T_1 V^{\gamma-1} = T_2 (nV)^{\gamma-1}, \quad T_1 = T_2 n^{\gamma-1}, \quad (2.64)$$

$$T_4 V^{\gamma-1} = T_3 (nV)^{\gamma-1}, \quad T_4 = T_3 n^{\gamma-1}. \quad (2.65)$$

Подставим (2.63) и (2.64) в (2.62):

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{T_2 n^{\gamma-1} - T_3 n^{\gamma-1} - T_2 + T_3}{T_2 n^{\gamma-1} - T_3 n^{\gamma-1}} = \frac{(T_2 - T_3) n^{\gamma-1} - (T_2 - T_3)}{(T_2 - T_3) n^{\gamma-1}} = \\ &= \frac{n^{\gamma-1} - 1}{n^{\gamma-1}} = 1 - n^{1-\gamma}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

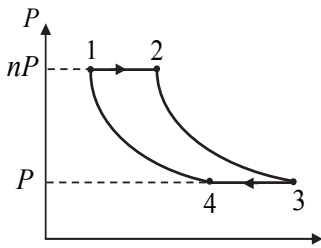


Рис. 2.19

с показателем адиабаты γ , состоящего из двух изобар и двух адиабат, причем давление меняется в пределах цикла в n раз (рис. 2.19).

КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

1–2 – изобарическое расширение, при котором температура повышается ($T_2 > T_1$):

$$Q_{1-2} = \frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1) = Q_1 > 0. \quad (2.67)$$

2–3 – адиабатическое расширение газа, при котором не происходит теплообмена $\delta Q = 0$;

3–4 – изобарическое сжатие, при котором температура понижается ($T_4 < T_3$):

$$Q_{3-4} = Q_2 = \frac{m}{\mu} C_P (T_4 - T_3) < 0; \quad (2.68)$$

4–1 – адиабатическое сжатие газа, при котором не происходит теплообмена $\delta Q = 0$.

КПД цикла

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1) - \frac{m}{\mu} C_P (T_3 - T_4)}{\frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1 - T_3 + T_4}{T_2 - T_1}. \quad (2.69)$$

Например, для двухатомного газа $\gamma = 1,4$ и для $n = 5$ получим

$$\eta = 1 - 5^{1-1,4} = 1 - 5^{-0,4} = 0,47.$$

Чтобы выразить ответ в процентах, надо полученный результат умножить на 100 %.

Воздушно-реактивный двигатель

Рассмотрим цикл воздушно-реактивного двигателя для идеального газа

с показателем адиабаты γ , состоящего из двух изобар и двух адиабат,

причем давление меняется в пределах цикла в n раз (рис. 2.19).

КПД цикла

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1}.$$

1–2 – изобарическое расширение, при котором температура повышается ($T_2 > T_1$):

$$Q_{1-2} = \frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1) = Q_1 > 0. \quad (2.67)$$

2–3 – адиабатическое расширение газа, при котором не происходит теплообмена $\delta Q = 0$;

3–4 – изобарическое сжатие, при котором температура понижается ($T_4 < T_3$):

$$Q_{3-4} = Q_2 = \frac{m}{\mu} C_P (T_4 - T_3) < 0; \quad (2.68)$$

4–1 – адиабатическое сжатие газа, при котором не происходит теплообмена $\delta Q = 0$.

КПД цикла

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1) - \frac{m}{\mu} C_P (T_3 - T_4)}{\frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1 - T_3 + T_4}{T_2 - T_1}. \quad (2.69)$$

Температуры газа на участках 2–3 и 4–1 (адиабатах) связаны между собой уравнением Пуассона:

$$(nP)^{1-\gamma}T_2^\gamma = P^{1-\gamma}T_3^\gamma, \quad (n)^{1-\gamma}T_2^\gamma = T_3^\gamma,$$

$$T_3 = T_2 n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (2.70)$$

$$(nP)^{1-\gamma}T_1^\gamma = P^{1-\gamma}T_4^\gamma, \quad (n)^{1-\gamma}T_1^\gamma = T_4^\gamma$$

$$T_4 = T_1 n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (2.71)$$

Подставим (2.69) и (2.70) в (2.68):

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu}C_P(T_2 - T_1) - \frac{m}{\mu}C_P(T_3 - T_4)}{\frac{m}{\mu}C_P(T_2 - T_1)} = \frac{T_2 - T_1 - T_2 n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + T_1 n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{T_2 - T_1} =$$

$$= \frac{(T_2 - T_1) - (T_2 - T_1)n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{T_2 - T_1} = 1 - n^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}. \quad (2.72)$$

Например, для двухатомного газа $\gamma = 1,4$ и для $n = 5$ получим

$$\eta = 1 - 5^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 1 - 5^{-\frac{0,4}{1,4}} = 0,37.$$

Чтобы выразить ответ в процентах, надо полученный результат умножить на 100 %.

Цикл, заданный в осях температура–энтропия ($T - S$)

Рассмотрим некоторый цикл, график которого представлен на рис. 2.20 в осях температура – энтропия ($T - S$), если температура меняется в пределах цикла в n раз.

В осях температура – энтропия ($T - S$) тепло – это площадь под кривой. Пусть энтропия изменяется в цикле на ΔS . В изотермиче-

ском процессе 1–2 газ получает тепло $Q_{1-2} = Q_1$, в адиабатическом процессе 2–3 теплообмена нет $\delta Q = 0$, в неизвестном процессе 3–1 газ отдает тепло $Q_{3-1} = Q_2$. Также очевидно, что площадь треугольника 1–2–3 – это разница

$$Q_1 - Q_2 = \frac{1}{2}(nT - T)\Delta S = \frac{1}{2}T\Delta S(n-1).$$

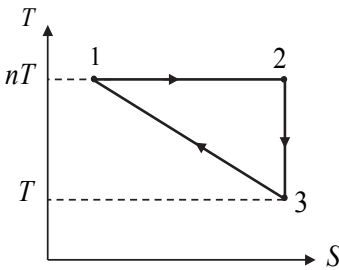


Рис. 2.20

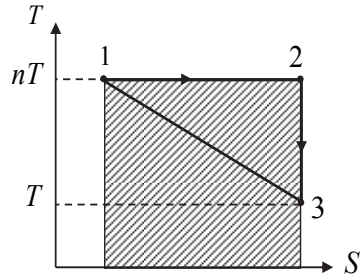


Рис. 2.21

Полученное тепло $Q_1 = nT\Delta S$ – площадь заштрихованного прямоугольника (рис. 2.21).

КПД

$$\eta = \frac{Q_1 - |Q_2|}{Q_1} = \frac{\frac{1}{2}T\Delta S(n-1)}{nT\Delta S} = \frac{n-1}{n}.$$

3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

3.1. МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Уравнение Клапейрона–Менделеева хорошо описывает поведение реальных газов только при высоких температурах и малых давлениях. При повышении давления и понижении температуры связь между объемом, давлением и температурой газа уже не описывается уравнением Клапейрона–Менделеева. В этом нет ничего удивительного, поскольку в молекулярно-кинетической теории мы вводили понятие идеального газа, в котором отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия, и мы пренебрегали размерами молекул. В реальных газах атомы состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов, между которыми действуют силы притяжения и отталкивания. Таким образом, в основе межмолекулярного взаимодействия лежат электромагнитные силы.

Рассмотрим силы притяжения между молекулами. Они бывают трех типов: ориентационные, индукционные и дисперсионные.

Ориентационные силы притяжения возникают между полярными молекулами, обладающими дипольными моментами. В полярной молекуле (HCl , H_2O , NH_3) центры тяжести положительных и отрицательных зарядов не совпадают, поэтому соседние молекулы ориентируются таким образом, чтобы рядом находилась область с противоположным зарядом (рис. 3.1).

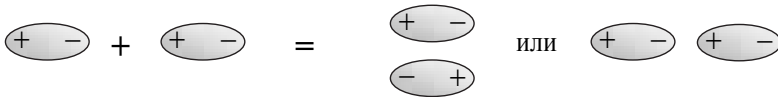


Рис. 3.1

Ориентационные силы убывают с расстоянием по закону

$$F_{\text{ориен}} \sim \frac{1}{r^7} \quad (r - \text{расстояние между молекулами}).$$

Индукционные силы притяжения возникают между полярными молекулами и неполярными молекулами. У неполярной молекулы центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают. Под действием сил притяжения со стороны полярной молекулы отрицательные и положительные заряды неполярной молекулы смещаются в

противоположные стороны, и неполярная молекула превращается в полярную (рис. 3.2).

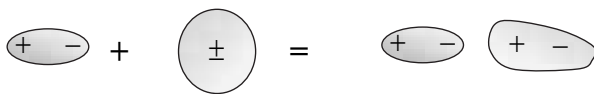


Рис. 3.2

Индукционные силы также убывают с расстоянием по закону

$$F_{\text{инд}} \sim \frac{1}{r^7}.$$

Дисперсионные силы притяжения возникают между неполярными молекулами. В результате движения электронов по орбитам неполярная молекула на короткое мгновение становится полярной и взаимодействует с соседней молекулой, также превращая ее в полярную (рис. 3.3).

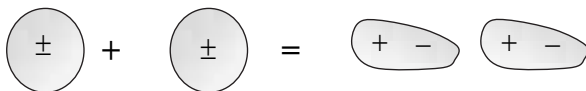


Рис. 3.3

Дисперсионные силы также убывают с расстоянием по закону

$$F_{\text{дисп}} \sim \frac{1}{r^7}.$$

Силы отталкивания действуют между молекулами на очень малых расстояниях, когда взаимодействуют электронные оболочки соседних атомов. Сила отталкивания обратно пропорциональна расстоянию между атомами в 13 степени:

$$F_{\text{оттал}} \sim \frac{1}{r^{13}}.$$

Результирующая сила межмолекулярного взаимодействия:

$$F = F_{\text{прит}} + F_{\text{оттал}} \approx -\frac{\alpha}{r^7} + \frac{\beta}{r^{13}}, \quad (3.1)$$

где силы притяжения берутся со знаком «-», а силы отталкивания со знаком «+», α и β – постоянные, учитывающие тип межмолекулярного взаимодействия. Зависимости сил притяжения, отталкивания и результирующей силы от расстояния между атомами показаны на рис. 3.4.

На расстояниях, равных 2–3 диаметрам молекулы, между молекулами действуют силы притяжения, при увеличении расстояния между молекулами сила притяжения уменьшается. На расстояниях, сравнимых с размерами молекул, начинают играть роль силы отталкивания, а при увеличении расстояния между молекулами силы отталкивания убывают быстрее, чем силы притяжения.

При $r = r_0$, приближенно равном диаметру молекулы, силы притяжения уравниваются силами отталкивания, и результирующая сила равна 0. Эта точка – положение равновесия. При расстояниях $r > r_0$ между молекулами действуют силы притяжения, при расстояниях $r < r_0$ между молекулами действуют силы отталкивания.

Потенциальную энергию взаимодействия молекул можно вычислить, проинтегрировав (3.1):

$$U(r) = -\int F_{\text{рез}} dr \approx -\frac{\alpha}{r^6} + \frac{\beta}{r^{12}}. \quad (3.2)$$

Потенциальная энергия, описываемая выражения (3.2), называется потенциалом Ленарда–Джонса, её график показан на рис. 3.5.

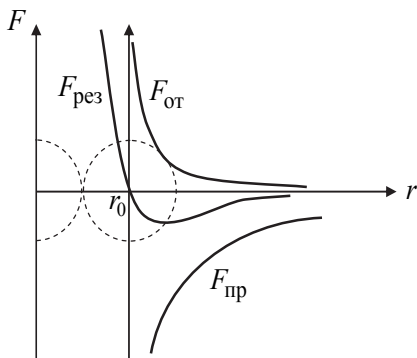


Рис. 3.4

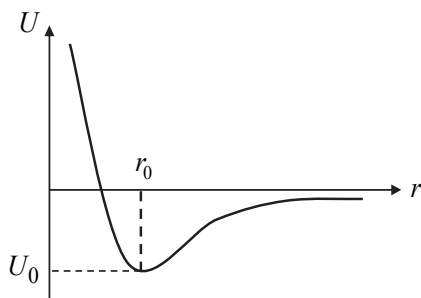


Рис. 3.5

Проанализируем потенциальную энергию взаимодействия молекул. При $r \rightarrow \infty$ потенциальная энергия $U \rightarrow 0$. Действительно, удаленные друг от друга молекулы не взаимодействуют между собой. При $r = r_0$ потенциальная энергия принимает минимальное значение U_0 , молекулы находятся в состоянии устойчивого равновесия, и чтобы их разъединить, необходимо приложить энергию U_0 . При уменьшении расстояния между молекулами $r < r_0$ существенную роль начинают играть силы отталкивания.

По величине U_0 можно условно определить, в каком агрегатном состоянии находится вещество. Если $U_0 \ll kT$, то вещество находится в газообразном состоянии, молекулы легко могут удалиться друг от друга, так как для этого необходима совсем небольшая энергия. Наоборот, если $U_0 \gg kT$, то вещество находится в твердом состоянии, молекулы не могут удалиться друг от друга на большое расстояние и колеблются около положения равновесия. Если $U_0 \approx kT$, то вещество находится в жидком состоянии, молекулы не удаляются друг от друга на расстояние, большее r_0 .

Необходимо отметить, что одно и то же вещество в зависимости от температуры может находиться в различных агрегатных состояниях.

3.2. УЧЕТ ОБЪЕМА МОЛЕКУЛ

При выводе уравнения Клапейрона–Менделеева мы считали, что молекулы – это материальные точки, которые не имеют объема. В реальных газах реальные молекулы имеют конечный объем, поэтому необходимо вводить соответствующие поправки.

Пусть в кубическом сосуде объемом V находится одна молекула, диаметром $d = 2r$. Тогда объем сосуда, доступный для движения молекулы, уменьшится (рис. 3.6), поскольку уменьшится сторона куба, в котором может двигаться молекула:

$$V' = \left(\sqrt[3]{V} - 2r\right)^3 = \left(\sqrt[3]{V} - d\right)^3. \quad (3.3)$$

Если в сосуд поместить вторую молекулу, то еще появится недоступный дополнительный объем вокруг первой молекулы, в который не может проникнуть центр второй молекулы (рис. 3.7):

$$V' = (\sqrt[3]{V} - d)^3 - \frac{4}{3}\pi d^3. \quad (3.4)$$

Для N молекул

$$V' = (\sqrt[3]{V} - d)^3 - \frac{N}{2} \frac{4}{3}\pi d^3. \quad (3.5)$$

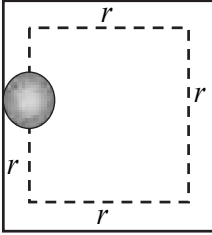


Рис. 3.6

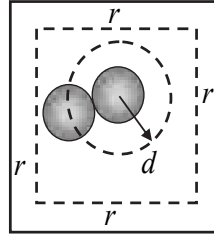


Рис. 3.7

Размер сосуда все-таки много больше размера молекулы $\sqrt[3]{V} \gg d$, поэтому (3.5) можно переписать:

$$V' = V - \frac{2}{3}N\pi d^3 = V - \frac{16}{3}N\pi r^3 = V - 4NV_{\text{мол}}. \quad (3.6)$$

Таким образом, поправка на объем, занимаемый молекулами, равна учетверенному объему всех молекул:

$$b = 4NV_{\text{мол}}. \quad (3.7)$$

3.3. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Уравнение, учитывающее объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия, называется **уравнением Ван-дер-Ваальса**. Для одного моля газа оно имеет вид

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT, \quad (3.8)$$

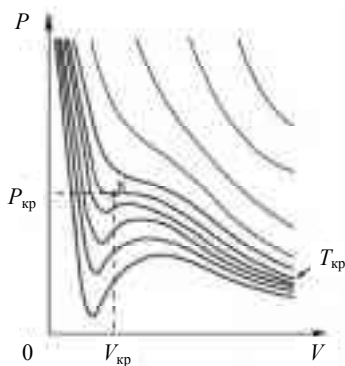


Рис. 3.8

где V_m – молярный объем; слагаемое $\frac{a}{V_m^2}$ описывает увеличение давления газа за счет сил межмолекулярного взаимодействия; b – поправка на объем, занимаемый молекулами. Изотермы Ван-дер-Ваальса содержат характерные максимумы и минимумы и показаны на рис. 3.8. При высоких температурах они превращаются в изотермы идеального газа.

При некоторой температуре, называемой **критической**, максимумы и минимумы на изотерме превращаются в точку перегиба, и при температурах выше критической реальный газ ведет себя как идеальный. Критическую температуру можно найти, приравняв первую производную зависимости давления от объема к нулю:

$$\frac{\partial P}{\partial V_m} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = 0.$$

Выразим давление из (3.8)

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \quad (3.9)$$

и приравняем к нулю производную по молярному объему V_m :

$$\frac{\partial P}{\partial V_m} = -\frac{RT}{(V_m - b)^2} + \frac{2a}{V_m^3} = 0. \quad (3.10)$$

Найдем температуру из (3.10):

$$T = \frac{2a(V_m - b)^2}{RV_m^3}. \quad (3.11)$$

В точке перегиба вторая производная должна быть равна 0:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V_m^2} = \frac{2RT}{(V_m - b)^3} - \frac{6a}{V_m^4} = 0. \quad (3.12)$$

Подставим (3.11) в (3.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial V_m^2} &= \frac{2R}{(V_m - b)^3} \frac{2a(V_m - b)^2}{RV_m^3} - \frac{6a}{V_m^4} = \frac{4a}{(V_m - b)V_m^3} - \frac{6a}{V_m^4} = 0, \\ 2V_m - 3(V_m - b) &= 0, \\ V_m &= 3b = V_{\text{кр}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выражение (3.13) определяет значение критического объема при критической температуре. Тогда после подстановки (3.13) в (3.11) получим критическую температуру:

$$T_{\text{кр}} = \frac{2a(V_m - b)^2}{RV_m^3} = \frac{2a(3b - b)^2}{R(3b)^3} = \frac{2 \cdot 4b^2}{R \cdot 27b^3} = \frac{8a}{27Rb}. \quad (3.14)$$

Критическое давление можно получить, подставив (3.14) и (3.13) в (3.9):

$$P_{\text{кр}} = \frac{RT_{\text{кр}}}{V_{\text{кр}} - b} - \frac{a}{V_{\text{кр}}^2} = \frac{a}{27b^2}. \quad (3.15)$$

3.4. ИЗОТЕРМЫ РЕАЛЬНОГО ГАЗА

Изотермы Ван-дер-Ваальса имеют участок BD (рис. 3.9), на котором рост давления сопровождается увеличением объема. Практика показывает, что в природе такого не происходит никогда, и изотермы реальных газов имеют горизонтальный участок AC .

Участок изотермы справа от точки A соответствует газообразному состоянию вещества, участок изотермы слева от точки C – жидкому состоянию вещества. На горизонтальном участке изотермы AC наблюдается двухфазное состояние: равновесие жидкой и газообразной фаз вещества. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже

критической называется **паром**. Пар, находящийся в равновесии с жидкостью, называется **насыщенным паром**. Участки *AB* и *CD* могут быть реализованы при некоторых условиях. Это неустойчивые метастабильные состояния, называемые переохлажденным паром (*AB*) и перегретой жидкостью (*CD*).

Если через крайние точки горизонтальных участков изотерм провести кривые, то получим колоколообразную кривую, ограничивающую область двухфазного состояния вещества (рис. 3.10).

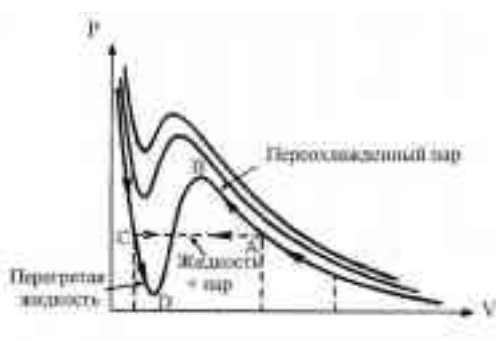


Рис. 3.9

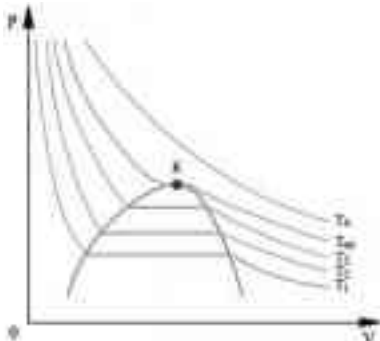


Рис. 3.10

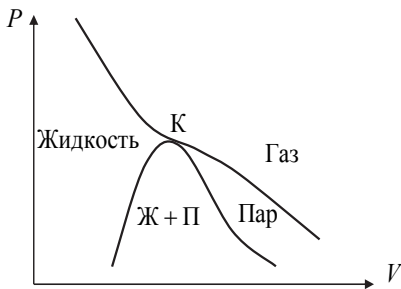


Рис. 3.11

Колоколообразная кривая делит диаграмму на три части: под колоколообразной кривой находится двухфазное состояние вещества, слева от нее – жидкое состояние и справа – газообразное (рис. 3.11).

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

4.1. ОПЫТНЫЕ ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА–МЕНДЕЛЕЕВА

Задача 1. Азот массой $m=10$ г находится под давлением $P=2$ кПа и температуре $T_1=300$ К. Газ нагрели изобарно так, что его объем стал $V_2=600$ л. Найти: 1) объем газа до расширения V_1 ; 2) температуру газа после расширения T_2 .

Дано:

$$m=10 \text{ г}=10^{-2} \text{ кг},$$

$$\mu=28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$P=2 \text{ кПа}=2 \cdot 10^3 \text{ Па},$$

$$T_1=300 \text{ К},$$

$$V_2=600 \text{ л}=0,6 \text{ м}^3$$

$$1) V_1=? , 2) T_2=?$$

1) Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального состояния газа

$$PV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1.$$

Откуда

$$V_1 = \frac{m}{\mu} \frac{RT_1}{P} = \frac{10^{-2} \cdot 8,31 \cdot 300}{28 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3} = \\ = \frac{8,31 \cdot 3}{28 \cdot 2} = 0,45 \text{ м}^3.$$

2) Чтобы найти температуру газа после изобарного нагревания ($P = \text{const}$), запишем еще раз уравнение Клапейрона–Менделеева для конечного состояния газа:

$$PV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2,$$

откуда

$$T_2 = \frac{PV_2}{\frac{m}{\mu} R} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{\frac{10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31} = 404 \text{ К}.$$

Ответ: 1) $V_1 = 0,45 \text{ м}^3$; 2) $T_2 = 404 \text{ К}$.

Задача 2. В закрытом сосуде емкостью $V = 30$ л находится кислород массой $m_1 = 10$ г и гелий массой $m_2 = 5$ г. Найти давление газовой смеси, если температура $T = 350$ К.

Дано:

$$m_1 = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$\mu_1 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$m_2 = 5 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ кг},$$

$$\mu_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$T_1 = 350 \text{ К},$$

$$V = 30 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$P = ?$$

Давление смеси газов по закону Дальтона (1.14) равно сумме парциальных давлений газов

$$P = P_1 + P_2.$$

Парциальное давление – это давление, которое создавал бы газ, если бы он был в сосуде один. Его можно найти из уравнения Клапейрона–Менделеева, записанного для каждого газа в отдельности:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT,$$

$$P_1 = \frac{m_1}{\mu_1} \frac{RT}{V} = \frac{10}{32} \frac{8,31 \cdot 350}{3 \cdot 10^{-2}} = 30,3 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Аналогично для второго газа:

$$P_2 = \frac{m_2}{\mu_2} \frac{RT}{V} = \frac{5}{4} \frac{8,31 \cdot 350}{3 \cdot 10^{-2}} = 121,2 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Давление смеси газов

$$P = P_1 + P_2 = (30,3 + 121,2) \cdot 10^3 = 151,5 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Ответ: $P = 151,5 \cdot 10^3 \text{ Па}$.

Задача 3. В закрытом сосуде находится газ массой $m_1 = 2$ кг под давлением $P_1 = 4$ МПа. Сколько газа выпустили из сосуда, если давление стало $P_2 = 2,5$ МПа. Считать, что температура газа не изменилась.

Дано:

$$m_1 = 2 \text{ кг},$$

$$P_1 = 4 \text{ МПа},$$

$$P_2 = 2,5 \text{ МПа}$$

$$\Delta m = ?$$

Запишем уравнение Клапейрона–Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu} RT, \quad P_2 V = \frac{m_2}{\mu} RT.$$

Поделим первое уравнение на второе:

$$\frac{P_1 V}{P_2 V} = \frac{\frac{m_1}{\mu} RT}{\frac{m_2}{\mu} RT}, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

откуда можно выразить конечную массу газа

$$m_2 = m_1 \frac{P_2}{P_1} = 2 \frac{2,5}{4} = 1,25 \text{ кг}.$$

Масса газа, выпущенная из сосуда,

$$\Delta m = m_2 - m_1 = 2,5 - 1,25 = 1,25 \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 1,25 \text{ кг}$.

4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

Задача 4. Вычислить наиболее вероятную $v_{\text{вер}}$, среднюю квадратичную $\overline{v^2}$ и среднюю арифметическую \bar{v} скорости молекул воздуха, находящегося при температуре $T = 300 \text{ К}$.

Дано:

$$T = 300 \text{ К},$$

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$v_{\text{вер}} = ?, \overline{v^2} = ?, \bar{v} = ?$$

Наиболее вероятная скорость молекул вычисляется по (1.7):

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{29 \cdot 10^{-3}}} = 414,6 \text{ м/с}.$$

Средняя арифметическая скорость вычисляется по (1.31):

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 1,13v_{\text{вер}} = 1,13 \cdot 414,6 = 468,5 \text{ м/с} .$$

Средняя квадратичная скорость вычисляется по (1.33):

$$\overline{v^2} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 1,22v_{\text{вер}} = 1,22 \cdot 414,6 = 505,8 \text{ м/с} .$$

Ответ: $v_{\text{вер}} = 414,6 \text{ м/с}$, $\bar{v} = 468,5 \text{ м/с}$, $\overline{v^2} = 505,8 \text{ м/с}$.

Задача 5. Вычислить относительное количество молекул азота $\frac{\Delta N}{N}$, скорости которых лежат в пределах от $v_{\text{вер}}$ до $v_{\text{вер}} + 0,01 \text{ м/с}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$.

Дано:

$$T = 300 \text{ К} ,$$

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль} ,$$

$$v_{\text{вер}} , v_{\text{вер}} + 0,01 \text{ м/с}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = ?$$

Относительное количество молекул, скорости которых лежат в пределах от v до $v + dv$, определяется выражением (1.23):

$$\frac{dN}{N} = f(V)dV ,$$

где $f(v)$ – функция распределения Максвелла.

Значение функции распределения при наиболее вероятной скорости определяется выражением (1.29):

$$f(v_{\text{вер}}) = 4e^{-1} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} .$$

Тогда относительное количество молекул, скорости которых лежат в пределах от v до $v + dv$:

$$\frac{dN}{N} = 4e^{-1} \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} dv .$$

Вычислим массу молекулы азота:

$$m_0 = \frac{\mu}{N_A} = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 4,65 \cdot 10^{-26} \text{ кг.}$$

Тогда

$$\frac{dN}{N} = \frac{4}{2,72} \sqrt{\frac{4,65 \cdot 10^{-26}}{2 \cdot 3,14 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}} \cdot 0,01 = 1,97 \cdot 10^{-5}.$$

Ответ: $\frac{dN}{N} = 1,97 \cdot 10^{-5}$.

Задача 6. На какой высоте h давление воздуха составляет 80 % от давления над уровнем моря? Считать, что температура по всей высоте постоянна и равна $t = 10^\circ \text{C}$.

Дано:

$$t = 10^\circ \text{C}$$

$$\mu = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль,}$$

$$\frac{P}{P_0} = 0,8$$

$$h = ?$$

Давление P на высоте h связано с давлением над уровнем моря P_0 распределением Больцмана (1.44)

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}},$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{-\frac{\mu gh}{RT}}. \quad (4.1)$$

Отношение $\frac{P}{P_0}$ известно, поэтому, прологарифмировав (4.1), можно найти неизвестную высоту h :

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{\mu gh}{RT},$$

$$h = -\frac{RT}{\mu g} \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{8,31(10 + 273)}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} \ln 0,8 = 1846 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 1846 \text{ м.}$

4.3. ЗАКОН РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ, ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Задача 7. Кислород находится при температуре $T = 400$ К. Вычислить: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы кислорода $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы кислорода $\langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle$; 3) среднее значение полной кинетической энергии молекулы $\langle \epsilon \rangle$; 4) кинетическую энергию поступательного движения $W_{\text{пост}}$ всех молекул кислорода, содержащихся в $m = 10$ г.

Дано:

$$T = 400 \text{ К},$$

$$m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$1) \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = ?$$

$$2) \langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle = ?$$

$$3) \langle \epsilon \rangle = ?$$

$$4) W_{\text{пост}} = ?$$

Кислород – двухатомный газ, обладающий тремя поступательными и двумя вращательными степенями свободы. На каждую степень свободы, согласно закону равномерного распределения по степеням свободы (2.1), приходится энергия $\frac{kT}{2}$.

1) На три поступательных степени свободы приходится энергия

$$\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400 = 8,28 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

2) На две вращательных степени свободы приходится энергия

$$\langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle = kT = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 400 = 5,52 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

3) Среднее значение полной кинетической энергии молекулы

$$\begin{aligned} \langle \epsilon \rangle &= \langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle + \langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT + kT = \\ &= (8,28 + 5,52) 10^{-21} = 13,8 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}. \end{aligned}$$

4) Кинетическая энергия поступательного движения $W_{\text{пост}}$ всех молекул кислорода – произведение средней энергии поступательного движения одной молекулы $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$ на количество молекул N .

$$W_{\text{пост}} = \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle N. \quad (4.2)$$

Количество молекул можно посчитать, умножив количество молей $\frac{m}{\mu}$ на число Авогадро N_A :

$$N = \frac{m}{\mu} N_A.$$

После подстановки этого выражения в (4.2) получим

$$W_{\text{пост}} = \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle \frac{m}{\mu} N_A = 8,28 \cdot 10^{-21} \frac{10}{32} 6,02 \cdot 10^{23} = 1,56 \text{ кДж}.$$

Ответ: 1) $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = 8,28 \cdot 10^{-21}$ Дж; 2) $\langle \varepsilon_{\text{вращ}} \rangle = 5,52 \cdot 10^{-21}$ Дж;
3) $\langle \varepsilon \rangle = 13,8 \cdot 10^{-21}$ Дж; 4) $W_{\text{пост}} = 1,56$ кДж.

Задача 8. Найти внутреннюю энергию водорода, находящегося в сосуде объемом $V = 3$ л под давлением $P = 50$ кПа.

Дано:

$$V = 3 \text{ л} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$P = 50 \text{ кПа} = 5 \cdot 10^4 \text{ Па},$$

$$\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$U = ?$$

Водород – двухатомный газ, обладающий пятью степенями свободы. Внутренняя энергия идеального газа вычисляется по формуле (2.2):

$$U = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} RT, \quad (4.3)$$

где $i = 5$ – число степеней свободы.

Температуру газа можно найти из уравнения Клапейрона–Менделеева:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad T = \frac{\mu}{m} \frac{PV}{R}.$$

Подставим температуру и число степеней свободы в формулу для внутренней энергии (4.3):

$$U = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \frac{\mu}{m} \frac{PV}{R} = \frac{5}{2} PV = \frac{5}{2} 3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^4 = 375 \text{ Дж}.$$

Ответ: $U = 375$ Дж.

4.4. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Задача 9. Вычислить удельную теплоемкость аргона при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P .

Дано:

$$\mu = 40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$c_V = ?, c_P = ?$$

Удельная теплоемкость c связана с молярной теплоемкостью C_m соотношением (2.10)

$$C_m = c\mu.$$

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении зависят от числа степеней свободы газа (2.13) и (2.17):

$$C_V = \frac{i}{2} R, \quad C_P = \frac{i+2}{2} R.$$

Аргон – одноатомный газ, у которого только три поступательные степени свободы $i = 3$. Тогда молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \frac{3}{2} R,$$

а молярная теплоемкость при постоянном давлении

$$C_P = \frac{5}{2} R.$$

Соответственно удельная теплоемкость при постоянном объеме

$$c_V = \frac{C_V}{\mu} = \frac{3R}{2\mu} = \frac{3 \cdot 8,31}{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 311,6 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}$$

и при постоянном давлении

$$c_P = \frac{C_P}{\mu} = \frac{5R}{2\mu} = \frac{5 \cdot 8,31}{2 \cdot 40 \cdot 10^{-3}} = 519,4 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}.$$

Ответ: $c_V = 311,6 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}$, $c_P = 519,4 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}$.

Задача 10. Вычислить удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V смеси гелия (массой $m_1 = 10$ г) и азота (массой $m_2 = 50$ г).

Дано:

$$m_1 = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$\mu_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$m_2 = 50 \text{ г} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ кг},$$

$$\mu_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$c_{V\text{смеси}} = ?$$

Для смеси газов выполняется соотношение

$$c_{\text{смеси}}(m_1 + m_2)\Delta T = c_1 m_1 \Delta T + c_2 m_2 \Delta T,$$

тогда теплоемкость смеси

$$c_{\text{смеси}} = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2},$$

для теплоемкости при постоянном объеме

$$c_{V\text{смеси}} = \frac{c_{1V} m_1 + c_{2V} m_2}{m_1 + m_2}.$$

Заменяя удельные теплоемкости через молярные, получим

$$c_{V\text{смеси}} = \frac{C_{1V} \frac{m_1}{\mu_1} + C_{2V} \frac{m_2}{\mu_2}}{m_1 + m_2}. \quad (4.4)$$

Молярные теплоемкости мы знаем, поскольку известно число степеней свободы для каждого газа

$$C_{1V} = \frac{3}{2} R, \quad C_{2V} = \frac{5}{2} R.$$

Подставляя это выражении в (4.4), получим

$$c_{V\text{смеси}} = \frac{\frac{3}{2} R \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{5}{2} R \frac{m_2}{\mu_2}}{m_1 + m_2} = \frac{R}{2} \frac{3 \frac{m_1}{\mu_1} + 5 \frac{m_2}{\mu_2}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{8,31}{2} \cdot \frac{3 \cdot \frac{10}{4} + 5 \cdot \frac{50}{28}}{10 + 50} = 1,13 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}.$$

Ответ: $c_{V\text{смеси}} = 1,13 \frac{\text{Дж} \cdot \text{кг}}{\text{К}}.$

4.5. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИЗОПРОЦЕССАМ

Задача 11. Азот массой $m = 2$ кг нагревают при постоянном объеме на $\Delta T = 200$ К. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

Дано:

$$m = 2 \text{ кг},$$

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\Delta T = 200 \text{ К},$$

$$V = \text{const}$$

$$1) Q = ?$$

$$2) A = ?$$

$$3) \Delta U = ?$$

При изохорическом процессе $V = \text{const}$ газ не совершает работы $A = 0$. Поэтому все подведенное тепло идет на изменение внутренней энергии

$$Q_V = \Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T. \quad (4.5)$$

Азот – двухатомный газ, поэтому его молярная теплоемкость при постоянном объеме

$$C_V = \frac{5}{2} R.$$

После подстановки этого выражения в (4.5) получим

$$Q_V = \Delta U = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{5}{2} \frac{2}{28 \cdot 10^{-3}} 8,31 \cdot 200 = 296,8 \text{ кДж}.$$

Ответ: $Q_V = \Delta U = 296,8 \text{ кДж}, A = 0.$

Задача 12. Кислород нагревают при постоянном давлении $P = 200$ кПа, при этом его объем изменился с $V_1 = 1 \text{ м}^3$ до $V_2 = 5 \text{ м}^3$.

Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A , 3) изменение внутренней энергии ΔU .

Дано:

$$P = 200 \text{ кПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

$$V_1 = 1 \text{ м}^3,$$

$$V_2 = 5 \text{ м}^3,$$

$$P = \text{const}$$

$$1) Q = ?$$

$$2) A = ?$$

$$3) \Delta U = ?$$

Работа газа при изобарическом процессе $P = \text{const}$ легко вычисляется по формуле

$$A = P(V_2 - V_1) = 2 \cdot 10^5 (5 - 1) = 8 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Тепло, сообщенное газу при изобарном процессе,

$$Q_P = \frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1), \quad (4.6)$$

где $C_P = \frac{7}{2} R$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении для

двухатомного газа, а $\frac{m}{\mu} (T_2 - T_1)$ можно найти из уравнения Клапейрона–Менделеева

$$PV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad PV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2, \quad P(V_2 - V_1) = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1),$$

$$\frac{m}{\mu} (T_2 - T_1) = \frac{P(V_2 - V_1)}{R}.$$

После подстановки в (4.6) окончательно получим

$$Q_P = \frac{m}{\mu} C_P (T_2 - T_1) = \frac{7R}{2} \frac{P(V_2 - V_1)}{R} = \frac{7}{2} P(V_2 - V_1) =$$

$$= \frac{7}{2} A = \frac{7}{2} \cdot 8 \cdot 10^5 = 28 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Согласно первому началу термодинамики $Q_P = \Delta U + A$,

$$\Delta U = Q_P - A = \frac{7}{2} A - A = \frac{5}{2} A = \frac{5}{2} \cdot 8 \cdot 10^5 = 20 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 8 \cdot 10^5 \text{ Дж}$, $\Delta U = 20 \cdot 10^5 \text{ Дж}$, $Q_P = 28 \cdot 10^5 \text{ Дж}$.

Задача 13. Азот массой $m = 0,4$ кг расширяется изотермически при температуре $T = 300$ К так, что его объем увеличивается в два раза. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

Дано:

$$m = 0,4 \text{ кг},$$

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 2,$$

$$T = 300 \text{ К} = \text{const}$$

$$1) Q = ?$$

$$2) A = ?$$

$$3) \Delta U = ?$$

При изотермических процессах не меняется внутренняя энергия газа $\Delta U = 0$, поэтому все сообщаемое газу тепло идет на совершение работы $Q = A$.

Работа газа при изотермическом процессе вычисляется по (2.24):

$$A = Q = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{400}{28} \cdot 8,31 \cdot 300 \cdot \ln 2 = 24,7 \text{ кДж}.$$

Ответ: $A = Q = 24,7$ кДж, $\Delta U = 0$.

Задача 14. Водород при нормальных условиях занимал объем $V_1 = 50$ л, затем адиабатно расширился до объема $V_2 = 150$ л. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

Дано:

$$\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$P_1 = 10^5 \text{ Па},$$

$$V_1 = 50 \text{ л} = 50 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3,$$

$$V_2 = 150 \text{ л} = 150 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$1) Q = ?$$

$$2) A = ?$$

$$3) \Delta U = ?$$

При адиабатических процессах не происходит теплообмена с окружающей средой $\delta Q = 0$, поэтому вся работа затрачивается на изменение внутренней энергии $\Delta U = A$.

Работа газа при адиабатическом процессе вычисляется по (2.35):

$$A = U = \frac{R V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right),$$

для двухатомного газа $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4$. Тогда работа

$$A = U = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right) = \frac{10^5 \cdot 50 \cdot 10^{-3}}{1,4 - 1} \left(1 - \left(\frac{50}{150} \right)^{1,4 - 1} \right) =$$

$$= \frac{50 \cdot 10^2}{0,4} \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{0,4} \right) = 4,445 \text{ кДж.}$$

Ответ: $A = U = 4,445 \text{ кДж}$, $Q = 0$.

Задача 15. Азот массой $m = 10 \text{ г}$, находящийся при температуре $T_1 = 350 \text{ К}$ подвергли адиабатическому расширению, в результате которого его давление уменьшилось в три раза. Затем газ изотермически сжали до первоначального давления. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

Дано:

$$m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$\mu = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 3, P_1 = P_3,$$

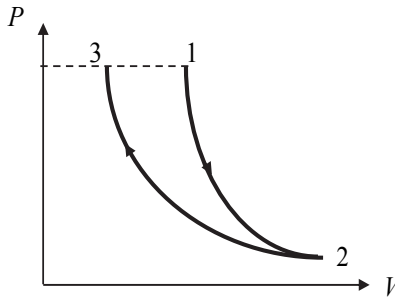
$$T_1 = 350 \text{ К}$$

$$1) Q = ?$$

$$2) A = ?$$

$$3) \Delta U = ?$$

Изобразим график процесса в осях $P-V$.



Процесс 1–2 – адиабатическое расширение, в котором работа положительна, а теплообмена с окружающей средой нет:

$$Q_{1-2} = 0, A_{1-2} = -\Delta U_{1-2} > 0.$$

Процесс 2–3 – изотермическое сжатие, в котором работа отрицательна, а внутренняя энергия не меняется:

$$\Delta U_{23} = 0, \quad A_{2-3} = Q_{2-3} < 0.$$

Результирующая теплота

$$Q = Q_{2-3} < 0,$$

изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \Delta U_{1-2}.$$

Работа

$$A = A_{1-2} - |A_{2-3}|.$$

Вычислим изменение внутренней энергии

$$\Delta U = \Delta U_{1-2} = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1). \quad (4.7)$$

Температуру T_2 можно найти из уравнения адиабаты (2.32)

$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma, \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}},$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{7}{5} = 1,4, \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 350 \cdot 3^{\frac{1-1,4}{1,4}} = \frac{350}{3^{0,29}} = 255,7 \text{ К}.$$

Подставим в (4.7), окончательно получим

$$\Delta U = \Delta U_{1-2} = \frac{m}{\mu} C_V (T_2 - T_1) = \frac{10}{28} \frac{5}{2} 8,31 (255,7 - 350) = -699,7 \text{ Дж}.$$

Найдем теплоту, отданную газом

$$Q = Q_{2-3} = A_{2-3}.$$

Работа при изотермическом процессе определяется по формуле (2.25)

$$Q = A_{2-3} = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{P_2}{P_3} = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{P_2}{P_1} = \frac{10}{28} 8,31 \cdot 255,7 \cdot \ln \frac{1}{2} = -526 \text{ Дж}.$$

Работу при адиабатическом процессе мы уже нашли:

$$A_{1-2} = -\Delta U_{1-2} = 699,7 \text{ Дж}.$$

Результирующая работа

$$A = A_{1-2} - |A_{2-3}| = 699,7 - 526 = 173,7 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = 173,7 \text{ Дж}$; $Q = -526 \text{ Дж}$; $\Delta U = -699,7 \text{ Дж}$.

4.6. ЦИКЛЫ

Примеры вычисления КПД некоторых циклов рассмотрены подробно в разделе 2.13.

Задача 16. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500 \text{ К}$, температура холодильника $T_2 = 250 \text{ К}$. Работа изотермического расширения газа $A_{1-2} = 2 \text{ кДж}$. Найти КПД цикла η и тепло Q_2 , отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии.

Дано:

$$T_1 = 500 \text{ К},$$

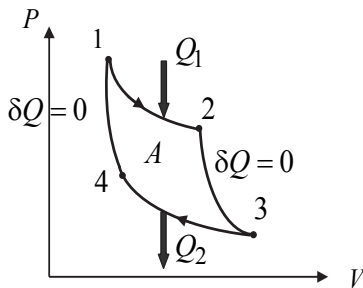
$$T_2 = 250 \text{ К},$$

$$A_{1-2} = 2 \text{ кДж}$$

$$\eta = ?, Q_2 = ?$$

Цикл Карно показан на рисунке. Так как процесс 1-2 – изотермический, то полученное тепло Q_1 равно работе изотермического расширения газа A_{1-2}

$$Q_1 = A_{1-2}.$$



Цикл Карно

КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} = A_{12} \frac{T_2}{T_1} = 2 \frac{500}{250} = 4 \text{ кДж}.$$

Найдем КПД цикла Карно:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{500 - 250}{500} = 0,5.$$

Значение КПД, выраженное в процентах, составляет

$$\eta = 0,5 \cdot 100 \% = 50 \%.$$

Ответ: $\eta = 50 \%$, $Q_2 = 4 \text{ кДж}$.

4.7. ЭНТРОПИЯ

Задача 17. Найти приращение энтропии $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ при переходе кислорода массой $m = 320 \text{ г}$ от объема $V_1 = 5 \text{ л}$ при температуре $T_1 = 350 \text{ К}$ к объему $V_2 = 15 \text{ л}$ при температуре $T_2 = 500 \text{ К}$.

Дано:

$$m = 320 \text{ г},$$

$$\mu = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль},$$

$$T_1 = 350 \text{ К},$$

$$T_2 = 500 \text{ К},$$

$$V_1 = 5 \text{ л},$$

$$V_2 = 15 \text{ л}$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = ?$$

Изменение энтропии в общем случае определяется формулой (2.41):

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Для двухатомного газа $C_V = \frac{5}{2} R$, тогда изменение энтропии

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2} &= \frac{m}{\mu} \left(C_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right) = \\ &= \frac{320}{32} \left(\frac{5}{2} \cdot 8,31 \cdot \ln \frac{500}{350} + 8,31 \cdot \ln \frac{15}{5} \right) = \\ &= 10 \cdot 8,31 \left(\frac{5}{2} \ln 1,42 + \ln 3 \right) = 165,4 \text{ Дж/К.} \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = 165,4 \text{ Дж/К}$

Задача 18. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части. В одной части находится три моля водяного пара при температуре $T_1 = 400 \text{ К}$. В другой части находится два моля кислорода при температуре $T_2 = 500 \text{ К}$. Перегородку медленно убирают, и газы перемешиваются. Найти изменение энтропии в этом случае.

Дано:

$$\frac{m_1}{\mu_1} = 3, \quad \frac{m_2}{\mu_2} = 2,$$

$$V_1 = V_2 = \frac{V}{2},$$

$$\mu_1 = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль,}$$

$$\mu_2 = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль,}$$

$$T_1 = 400 \text{ К,}$$

$$T_2 = 500 \text{ К}$$

$$\Delta S = ?$$

Изменение энтропии в общем случае определяется формулой (2.45):

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{m_1}{\mu_1} \left(C_{V1} \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{V}{V_1} \right) + \\ &+ \frac{m_2}{\mu_2} \left(C_{V2} \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V}{V_2} \right). \end{aligned}$$

Для двухатомного газа $C_{V2} = \frac{5}{2}R$, для

трехатомного $C_{V1} = \frac{6}{2}R$.

Установившаяся температура вычисляется по (2.44):

$$T = \frac{\frac{m_1}{\mu_1} C_{V1} T_1 + \frac{m_2}{\mu_2} C_{V2} T_2}{\frac{m_1}{\mu_1} C_{V1} + \frac{m_2}{\mu_2} C_{V2}} = \frac{3 \cdot 2,5R \cdot 400 + 2 \cdot 3R \cdot 500}{3 \cdot 2,5R + 2 \cdot 3R} =$$

$$= \frac{7,5 \cdot 400 + 6 \cdot 500}{7,5 + 6} = 444 \text{ К.}$$

Тогда изменение энтропии

$$\begin{aligned} \Delta S &= \frac{m_1}{\mu_1} \left(C_{V1} \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{V}{V_1} \right) + \frac{m_2}{\mu_2} \left(C_{V2} \ln \frac{T}{T_2} + R \ln \frac{V}{V_2} \right) = \\ &= 3 \cdot 8,31 \left(3 \cdot \ln \frac{444}{400} + \ln 2 \right) + 2 \cdot 8,31 \left(2,5 \cdot \ln \frac{444}{500} + \ln 2 \right) = \\ &= 25,09 + 6,58 = 31,67 \text{ Дж/К.} \end{aligned}$$

Ответ: $\Delta S = 31,67 \text{ Дж/К}$

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.1. ОПЫТНЫЕ ЗАКОНЫ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. УРАВНЕНИЕ КЛАПЕЙРОНА–МЕНДЕЛЕЕВА

1. Найти температуру кислорода массой $m = 10 \text{ г}$, занимающего объем $V = 300 \text{ л}$ при давлении $P = 8 \text{ кПа}$.

2. Какой объем занимает азот массой $m = 10 \text{ г}$ при давлении $P = 0,5 \text{ МПа}$ и температуре $T = 300 \text{ К}$.

3. Сосуд объемом $V = 15 \text{ л}$ заполнен водородом при давлении $P = 2 \text{ МПа}$ и температуре $T = 400 \text{ К}$. Какая масса водорода находится в сосуде?

4. Найти массу воздуха, заполняющего аудиторию высотой $h = 3,5 \text{ м}$ и площадью $S = 100 \text{ м}^2$. Давление воздуха $P = 100 \text{ кПа}$, температура $t = 20 \text{ }^\circ\text{С}$.

5. Во сколько раз плотность воздуха, заполняющего помещение зимой при $t = -20 \text{ }^\circ\text{С}$, больше плотности воздуха, заполняющего то же помещение летом при $t = +20 \text{ }^\circ\text{С}$?

6. Азот нагревают в закрытом сосуде от температуры $t_1 = 20 \text{ }^\circ\text{С}$ до температуры $t_2 = 50 \text{ }^\circ\text{С}$. Найти отношение давлений газа до и после нагревания.

7. В закрытом сосуде находится газ массой $m_1 = 1$ кг под давлением $P_1 = 2$ МПа . Сколько газа выпустили из сосуда, если давление стало $P_2 = 0,5$ МПа . Считать, что температура газа не изменилась.

8. В закрытом сосуде находится кислород массой $m_1 = 2$ кг . После того как половину газа выпустили из сосуда, его давление стало $P_2 = 1$ МПа . Найти первоначальное давление газа, считая, что его температура не изменилась.

9. В закрытом сосуде находится $\nu = 6$ молей кислорода при нормальных условиях. После того как половину газа выпустили из сосуда, его давление стало $P_2 = 0,15$ МПа . Найти конечную температуру газа.

10. В сосуде объемом $V = 0,5$ л при комнатной температуре находится некоторый газ. На сколько понизится давление в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $N = 10^{19}$ молекул? Считать, что температура газа не изменилась.

11. Газ массой $m = 20$ г занимает объем $V = 5$ л при температуре $T_1 = 350$ К. После нагревания при постоянном давлении его плотность стала $\rho = 0,4$ кг/м³ . До какой температуры T_2 нагрели газ?

12. Кислород массой $m = 12$ г находится при давлении $P = 300$ кПа и температуре $T = 290$ К . После нагревания при постоянном давлении газ занял объем $V_2 = 10$ л . Найти объем газа до расширения, температуру газа после расширения и плотности газа до и после расширения.

13. В закрытом сосуде объемом $V = 1$ м³ находятся $m_1 = 2$ кг кислорода и $m_2 = 0,9$ кг воды. Найти давление смеси газов при температуре $T = 550$ К , предполагая, что вся вода превращается в пар.

14. В первом сосуде объемом $V_1 = 3$ л под давлением $P_1 = 200$ кПа находится некоторый газ. Во втором сосуде объемом $V_2 = 4$ л под давлением $P_2 = 100$ кПа находится тот же газ. Температура газа в обоих сосудах одинакова. Найти давление, установившееся в сосудах, после того как их соединили трубкой, объемом которой можно пренебречь.

15. В сосуде объемом $V = 2$ л находится углекислый газ (CO_2) массой $m_1 = 5$ г и закись азота (N_2O) массой $m_2 = 3$ г при температуре $T = 450$ К . Найти давление смеси газов в сосуде.

5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И БОЛЬЦМАНА

16. Вычислить наиболее вероятную $v_{\text{вер}}$, среднюю квадратичную $\overline{v^2}$ и среднюю арифметическую \bar{v} скорости молекул кислорода, находящегося при температуре $T = 400 \text{ К}$.

17. Найти отношение наиболее вероятных скоростей молекул водорода, находящегося при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$ и температуре $T_2 = 600 \text{ К}$.

18. Найти отношение среднеквадратичных скоростей молекул кислорода и водорода при одинаковой температуре.

19. Во сколько раз среднеквадратичная скорость пылинки массой $m = 0,001 \text{ г}$, находящейся в воздухе, меньше среднеквадратичной скорости молекулы воздуха?

20. Среднеквадратичная скорость молекул некоторого газа $\overline{v^2} = 450 \text{ м/с}$. Давление газа $P = 100 \text{ кПа}$. Вычислить плотность газа при этих условиях.

21. Среднеквадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях $\overline{v^2} = 480 \text{ м/с}$. Сколько молекул содержится в 1 г этого газа?

22. Вычислить давление газа, если его плотность $\rho = 0,01 \text{ кг/м}^3$, а средняя квадратичная скорость $\overline{v^2} = 480 \text{ м/с}$.

23. При какой температуре среднеквадратичная скорость молекул азота больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с ?

24. Вычислить долю молекул воздуха, скорости которых отличаются от наиболее вероятной на $0,05 \text{ м/с}$ при температуре $T = 400 \text{ К}$.

25. Вычислить долю молекул воздуха, скорости которых отличаются от среднеквадратичной на $0,05 \text{ м/с}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$.

26. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти среднюю кинетическую энергию молекул.

27. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найти наиболее вероятную энергию молекул.

28. На какой высоте h давление воздуха составляет 50 % от давления над уровнем моря? Считать, что температура по всей высоте постоянна и равна $t = 10 \text{ }^\circ\text{С}$.

29. Найти отношение давления воздуха в шахте на глубине $h = 1$ км к давлению воздуха на поверхности Земли, если считать что температура не зависит от высоты и равна $t = 20^\circ\text{C}$.

30. На какой высоте плотность воздуха меньше в три раза по сравнению с плотностью воздуха над уровнем моря. Считать, что температура по всей высоте постоянна и равна $t = 10^\circ\text{C}$.

31. Пылинки массой $m = 0,0001$ г взвешены в воздухе. Во сколько раз изменится их концентрация на высоте $h = 5$ км? Считать, что температура по всей высоте постоянна и равна $t = 20^\circ\text{C}$.

32. Барометр в кабине летящего самолета все время показывает одинаковое давление $P = 80$ кПа, и летчик считает высоту полета неизменной. Однако температура воздуха изменилась на 1 К. Какую ошибку в определении высоты Δh допустил летчик? Считать, что температура не зависит от высоты и что давление у поверхности Земли составляет $P_0 = 100$ кПа.

33. Пассажирский самолет совершает полет на высоте $h_1 = 8300$ м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками в кабине с помощью компрессора поддерживается давление, соответствующее высоте $h_2 = 2700$ м. Найти разность давлений внутри и снаружи кабины. Температуру наружного воздуха считать постоянной $t = 0^\circ\text{C}$.

5.3. ЗАКОН РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ПО СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

34. Азот находится при температуре $T = 350$ К. Вычислить: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы $\langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle$; 3) среднее значение полной кинетической энергии молекулы $\langle \epsilon \rangle$; 4) кинетическую энергию поступательного движения $W_{\text{пост}}$ всех молекул азота, содержащихся в $m = 1$ кг.

35. Углекислый газ находится при температуре $T = 500$ К. Вычислить: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle$; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного

движения молекулы $\langle \varepsilon_{\text{вращ}} \rangle$; 3) среднее значение полной кинетической энергии молекулы $\langle \varepsilon \rangle$; 4) кинетическую энергию поступательного движения $W_{\text{пост}}$ всех молекул углекислого газа, содержащихся в $m = 0,5$ кг.

36. Гелий находится при температуре $T = 350$ К. Вычислить: 1) среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы гелия $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle$; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекулы кислорода $\langle \varepsilon_{\text{вращ}} \rangle$; 3) среднее значение полной кинетической энергии молекулы $\langle \varepsilon \rangle$; 4) кинетическую энергию поступательного движения $W_{\text{пост}}$ всех молекул гелия, содержащихся в $m = 1$ кг.

37. При какой температуре энергии атомов гелия будет достаточно, чтобы они покинули атмосферу Земли?

38. При какой температуре энергии атомов гелия будет достаточно, чтобы они покинули Луну?

39. Газ находится под давлением $P = 50$ мПа, концентрация молекул $n = 10^{10}$ см⁻³. Определить среднюю энергию поступательного движения молекул газа.

40. Найти внутреннюю энергию $m = 20$ г водорода при температуре $T = 420$ К. Какая часть внутренней энергии приходится на поступательное движение молекул, а какая на вращательное?

41. Найти внутреннюю энергию двухатомного газа, находящегося в сосуде объемом $V = 10$ л под давлением $P = 150$ кПа.

42. Найти внутреннюю энергию аммиака (NH_3), находящегося в сосуде объемом $V = 2$ л под давлением $P = 5$ кПа.

43. Найти внутреннюю энергию гелия массой $m = 50$ г, находящегося при температуре $T = 500$ К.

5.4. ТЕПЛОЕМКОСТЬ

44. Вычислить молярные теплоемкости при постоянном объеме C_V для следующих газов: 1) гелий; 2) кислород; 3) углекислый газ.

45. Вычислить молярные теплоемкости при постоянном давлении C_P для следующих газов: 1) гелий; 2) кислород; 3) углекислый газ.

46. Вычислить удельную теплоемкость гелия при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P .

47. Вычислить удельную теплоемкость кислорода при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P .

48. Вычислить удельную теплоемкость углекислого газа при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P .

49. Молярная масса некоторого двухатомного газа $\mu = 0,03$ кг/моль. Найти удельную теплоемкость газа при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P .

50. Найти удельную теплоемкость некоторого газа при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_P , если известно, что при нормальных условиях его удельный объем $V = 0,7$ м³/кг.

51. Вычислить удельную теплоемкость при постоянном объеме c_V смеси азота (массой $m_1 = 10$ г) и кислорода (массой $m_2 = 50$ г).

52. Вычислить удельную теплоемкость при постоянном давлении c_P смеси гелия (массой $m_1 = 50$ г) и водорода (массой $m_2 = 30$ г).

53. Вычислить отношение удельных теплоемкостей $\frac{c_P}{c_V}$ смеси водорода (массой $m_1 = 50$ г) и углекислого газа (массой $m_2 = 30$ г).

54. Вычислить отношение удельных теплоемкостей $\frac{c_P}{c_V}$ смеси ксенона и кислорода, если количество молей у одного и у другого газа одинаково и равно 4.

5.5. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВОГО НАЧАЛА ТЕРМОДИНАМИКИ К ИЗОПРОЦЕССАМ

55. Водород помещен в закрытый сосуд объемом $V = 20$ л, давление в сосуде $P_1 = 50$ кПа. После нагревания газа давление в сосуде увеличилось до $P_2 = 200$ кПа. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

56. При изохорном нагревании кислорода в сосуде объемом $V = 100$ л давление изменилось на $\Delta P = 100$ кПа. Найти количество теплоты, сообщенное газу Q .

57. Сосуд объемом $V = 20$ л содержит азот при температуре $T_1 = 100$ К и давлении $P_1 = 0,2$ МПа. Какие температура T_2 и давление P_2 установятся в сосуде, если газу будет передано тепло $Q = 10$ кДж.

58. Кислород массой $m = 32$ г находится в закрытом сосуде при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = 0,1$ МПа. После нагревания давление в сосуде увеличилось в четыре раза. Найти: 1) объем сосуда; 2) температуру T_2 , до которой нагрели газ; 3) количество теплоты, сообщенное газу Q .

59. Два моля идеального двухатомного газа, находящегося при нормальных условиях, нагревают при постоянном объеме. Найти количество теплоты, которое нужно сообщить газу, чтобы увеличить его давление в пять раз.

60. Два моля некоторого газа нагревают при постоянном давлении на $\Delta T = 90$ К. При этом газу было сообщено количество теплоты $Q = 5,25$ кДж. Найти: 1) работу, совершаемую газом; 2) изменение внутренней энергии; 3) показатель адиабаты γ .

61. Азот массой $m = 280$ г, находящийся при температуре $T_1 = 300$ К расширяется изобарно при давлении $P = 1$ МПа. Найти работу расширения и конечный объем газа, если на расширение было затрачено тепло $Q = 6$ кДж.

62. Водород объемом $V_1 = 2$ л находится под давлением $P = 2$ МПа. Определить, какое количество теплоты надо сообщить газу, чтобы увеличить его объем в три раза при изобарном нагревании.

63. Кислород нагревается изобарно от объема $V_1 = 40$ л до объема $V_2 = 80$ л при давлении $P = 80$ кПа. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

64. Водород нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщена теплота $Q = 21$ кДж. Определить работу A , которую совершил газ и изменение его внутренней энергии ΔU .

65. Водяной пар нагревался при постоянном давлении, причем ему было сообщена теплота $Q = 4$ кДж. Определить работу A , которую совершил газ и изменение его внутренней энергии ΔU .

66. Гелий массой $m = 40$ г был нагрет на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

67. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 400$ К от давления $P_1 = 200$ кПа до давления $P_2 = 500$ кПа. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

68. Водород массой $m = 200$ г расширяется изотермически при температуре $T = 350$ К так, что его объем увеличивается в три раза. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

69. Какое количество теплоты выделится, если азот массой $m = 56$ г, находящийся при температуре $T = 300$ К и давлении $P_1 = 200$ кПа, изотермически сжать до давления $P_2 = 2$ МПа?

70. Углекислый газ массой $m = 500$ г занимает объем $V_1 = 2$ м³ при давлении $P_1 = 20$ кПа. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3$ м³, а затем при постоянном объеме до давления $P_2 = 60$ кПа. Построить график процесса. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

71. Водород массой $m = 300$ г находится при температуре $T = 250$ К. При изохорном охлаждении его давление уменьшилось в три раза, а при последующем изобарном расширении его температура стала равна первоначальной. Построить график процесса. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

72. Кислород в начальном состоянии занимает объем $V_1 = 3$ л, находится под давлением $P_1 = 830$ кПа при температуре $T_1 = 300$ К. В конечном состоянии он занимает объем $V_2 = 4,5$ л под давлением $P_2 = 600$ кПа. Найти для двух способов перехода газа из состояния 1 в состояние 2: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU , если: а) газ переходит из состояния 1 в состояние 2 сначала изохорно, затем

изобарно; б) сначала изобарно; затем изохорно. Построить график процесса.

73. Кислород объемом $V_1 = 3$ л сжимается адиабатически до объема $V_2 = 1$ л. В конце сжатия установилось давление $P_2 = 1,6$ МПа. Определить первоначальное давление газа.

74. Азот расширяется адиабатически так, что его объем увеличивается в два раза. Начальная температура азота $T_1 = 300$ К. Найти температуру газа после расширения.

75. При адиабатическом сжатии водяного пара давление меняется от $P_1 = 800$ кПа до $P_2 = 1,6$ МПа. Начальная температура $T_1 = 400$ К. Найти температуру газа после сжатия.

76. Некоторый газ расширяется адиабатически так, что его объем увеличивается в два раза, а температура уменьшается в 1,32 раза. Найти показатель адиабаты для этого газа. Сколько атомов содержит молекула этого газа?

77. Двухатомный газ, находящийся при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $P_1 = 100$ кПа сжимают адиабатически так, что его объем уменьшается в три раза. Определить конечную температуру и давление газа.

78. Один моль азота, находящийся при температуре $T = 400$ К, расширяется адиабатически так, что его объем увеличивается в пять раз. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

79. Два моля водорода сжимают от объема $V_1 = 3$ л до объема $V_2 = 1$ л. В каком случае надо затратить большую работу: при изотермическом или адиабатическом сжатии, если $T_1 = 400$ К?

80. Один моль кислорода расширяется от объема $V_1 = 3$ л до объема $V_2 = 9$ л. Найти отношение при изотермическом и адиабатическом расширении.

81. При адиабатическом сжатии двух киломолей одноатомного газа была совершена работа $A = 150$ кДж. Найти изменение температуры ΔT газа при сжатии.

82. Азот массой $m = 280$ г, находящийся при температуре $T_1 = 320$ К и при давлении $P_1 = 200$ кПа, сжимают до объема $V_2 = 12$ л. Найти температуру и давление газа после сжатия, если оно происходи-

ло: 1) изотермически; 2) адиабатически. Найти совершенную работу A в обоих случаях.

83. Два газа, один из которых одноатомный, а другой двухатомный находятся при одинаковой температуре и занимают одинаковый объем. Газы сжимают адиабатически так, что их объем уменьшился вдвое. Какой из газов нагреется сильнее и во сколько раз?

84. Углекислый газ занимает объем $V_1 = 0,5$ л при давлении $P_1 = 50$ кПа. Газ сжимается адиабатически до объема V_2 и давления P_2 . Затем он изохорно охлаждается до первоначальной температуры. В этом состоянии его давление стало $P_3 = 100$ кПа. Построить график процесса. Найти: 1) объем V_2 ; 2) давление P_2 .

85. Газ расширяется адиабатически так, что его давление уменьшается от $P_1 = 200$ кПа до $P_2 = 100$ кПа. Затем газ нагревают при постоянном объеме до первоначальной температуры, причем его давление становится равным $P_3 = 122$ кПа. Построить график процесса. Найти показатель адиабаты γ .

86. Водород массой $m = 20$ г, находящийся при температуре $T_1 = 400$ К, подвергли адиабатическому расширению, в результате которого его давление уменьшилось в четыре раза. Затем газ изотермически сжали до первоначального давления. Построить график процесса. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

87. В цилиндре под поршнем находится азот массой $m = 100$ г, находящийся при температуре $T_1 = 300$ К. Газ сначала расширился адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, затем был сжат изотермически так, что объем также уменьшился в пять раз. Построить график процесса. Найти: 1) количество теплоты, сообщенное газу Q ; 2) совершенную газом работу A ; 3) изменение внутренней энергии ΔU .

5.6. ЦИКЛЫ

88. Идеальный двухатомный газ, занимающий объем $V_1 = 5$ л, подвергли адиабатному расширению. При этом его объем увеличился в три раза. Затем газ изобарно сжали до начального объема. Для возвращения в исходное состояние газ был изохорно нагрет. Построить график процесса и определить КПД цикла.

89. Два моля двухатомного идеального газа, занимающего объем $V_1 = 5$ л при давлении $P_1 = 100$ кПа, изохорно нагрели до температуры $T_2 = 500$ К. Затем произошло изотермическое расширение до начального давления, а затем газ был возвращен в первоначальное состояние путем изобарного сжатия. Построить график процесса и определить КПД цикла.

90. Рабочее тело теплового двигателя совершает цикл, состоящий из изобарного, адиабатного и изотермического процессов. В результате изобарного процесса температура газа изменилась от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К. Построить график процесса и определить КПД цикла, если рабочее тело – двухатомный газ.

91. Азот массой $m = 300$ г, находящийся под давлением $P_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К, изотермически расширился, в результате чего давление уменьшилось в четыре раза. Затем газ был адиабатно сжат до начального давления, после чего изобарно сжат до начального объема. Построить график процесса и определить КПД цикла.

92. Идеальный двухатомный газ в количестве трех молей совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Наименьший объем газа в цикле $V_{\min} = 5$ л, наибольший объем $V_{\max} = 15$ л. Наименьшее давление газа в цикле $P_{\min} = 200$ кПа, наибольшее $P_{\max} = 500$ кПа. Построить график процесса и определить КПД цикла.

93. Три моля идеального трехатомного газа совершают цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар, причем максимальное и минимальное давление отличаются в два раза, а максимальный и минимальный объем в пять раз. Построить график процесса и определить КПД цикла.

94. Идеальный газ совершает цикл Карно, причем 0,4 тепла, полученного от нагревателя, он отдает охладителю. Температура охладителя $T_2 = 280$ К. Найти температуру нагревателя T_1 .

95. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура охладителя $T_2 = 290$ К. Как изменится КПД цикла, если изменить температуру нагревателя с 400 К на 600 К?

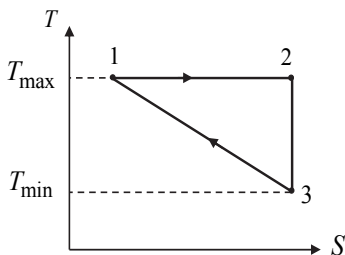
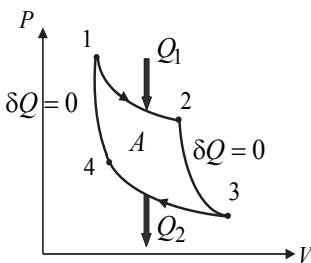
96. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура охладителя в три раза меньше температуры нагревателя. Найти работу, совершенную газом, если переданное в цикле тепло $Q_1 = 42$ кДж.

97. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура охладителя $T_2 = 280 \text{ К}$, температура нагревателя $T_1 = 470 \text{ К}$. Работа изотермического расширения составляет 100 кДж . Найти КПД цикла и отданное в цикле тепло Q_2 .

98. В цикле Карно идеальный газ получил от нагревателя тепло $Q_1 = 4,2 \text{ кДж}$ и совершил работу $A = 590 \text{ Дж}$. Найти КПД цикла и отношение температур и холодильника.

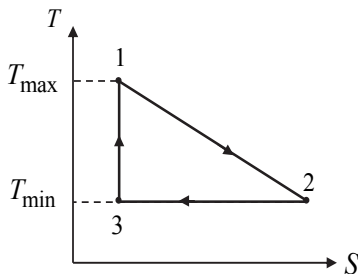
99. Идеальный газ совершает цикл Карно с коэффициентом полезного действия $\eta = 20\%$. Определить работу изотермического сжатия, если работа изотермического расширения $A = 600 \text{ Дж}$.

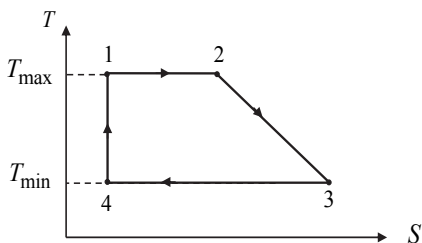
100. Идеальный двухатомный газ совершает цикл Карно. Объемы газов в точках 2 и 3 соответственно $V_2 = 12 \text{ л}$ и $V_3 = 15 \text{ л}$. Найти КПД цикла.



101. Найти КПД цикла, изображенного на рисунке, если максимальная и минимальная температуры отличаются в пять раз.

102. Найти КПД цикла, изображенного на рисунке, если максимальная и минимальная температуры отличаются в n раз.





103. Найти КПД цикла, изображенного на рисунке, если максимальная и минимальная температуры отличаются в n раз и $S_2 - S_1 = S_3 - S_2$.

5.7. ЭНТРОПИЯ

104. При нагревании двух молей двухатомного идеального газа его температура увеличилась в три раза. Найти изменение энтропии, если процесс протекал: а) изохорно; б) изобарно.

105. Найти изменение энтропии водорода массой $m = 20$ г при изотермическом расширении от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 15$ л.

106. В результате изохорного нагревания водорода массой $m = 200$ г давление газа увеличилось в два раза. Найти изменение энтропии.

107. Найти изменение энтропии азота массой $m = 28$ г при изобарном расширении от объема $V_1 = 5$ л до объема $V_2 = 25$ л.

108. Три моля идеального газа сначала нагрели изобарно так, что его объем увеличился в два раза, а потом изохорно охладил так, что его давление уменьшилось в четыре раза. Найти изменение энтропии.

109. Кислород массой $m = 320$ г адиабатно расширили так, что объем увеличился в три раза, затем изобарно сжали до начального объема. Найти изменение энтропии.

110. Теплоизолированный сосуд разделен перегородкой на две равные части. В одной части находится два моля азота при температуре $T_1 = 300$ К, в другой части находится три моля гелия при температуре $T_2 = 400$ К. Перегородку медленно убирают, и газы перемешиваются. Найти изменение энтропии в этом случае.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики. – М., 2007.
2. *Иродов И.Е.* Физика макросистем. Основные законы. – М., 2009.
3. *Кикоин А, Кикоин И.* Молекулярная физика. – Лань, 2008.
4. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачи по физике. – М., 2008.
5. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики. – Спб., 2003.
6. *Трофимова Т.И.* Сборник задач по курсу физики. – М., 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение | 3 |
| 1. Кинетическая теория идеальных газов | 5 |
| 1.1. Давление газа | 5 |
| 1.2. Температура..... | 8 |
| 1.3. Опытные законы идеального газа | 10 |
| 1.4. Уравнение Клапейрона–Менделеева | 12 |
| 1.5. Понятие вероятности и функции распределения | 13 |
| 1.6. Распределение Максвелла по скоростям, компонентам скорости и энергиям теплового движения | 16 |
| 1.7. Распределение Максвелла по скоростям и атмосферы планет | 22 |
| 1.8. Распределение Больцмана..... | 24 |
| 2. Основы термодинамики | 26 |
| 2.1. Число степеней свободы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы..... | 26 |
| 2.2. Работа газа | 28 |
| 2.3. Первое начало термодинамики..... | 30 |
| 2.4. Теплоемкость..... | 31 |
| 2.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам | 33 |
| 2.6. Адиабатический процесс..... | 35 |
| 2.7. Циклы..... | 38 |
| 2.8. Термодинамическое определение энтропии..... | 40 |
| 2.9. Статистическое определение энтропии | 43 |
| 2.10. Второе начало термодинамики | 44 |
| 2.11. Тепловые двигатели и холодильные машины | 45 |
| 2.12. Цикл Карно | 47 |
| 2.13. Примеры вычисления КПД для некоторых циклов | 50 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3. Реальные газы | 55 |
| 3.1. Межмолекулярное взаимодействие | 55 |
| 3.2. Учет объема молекул | 58 |
| 3.3. Уравнение Ван-дер-Ваальса | 59 |
| 3.4. Изотермы реального газа | 61 |
| 4. Примеры решения задач | 63 |
| 4.1. Опытные законы идеального газа. Уравнение Клапейрона–Менделеева | 63 |
| 4.2. Распределения Максвелла и Больцмана | 65 |
| 4.3. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы, внутренняя энергия идеального газа | 68 |
| 4.4. Теплоемкость | 70 |
| 4.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам | 72 |
| 4.6. Циклы | 77 |
| 4.7. Энтропия | 78 |
| 5. Задачи для самостоятельного решения | 80 |
| 5.1. Опытные законы идеального газа. Уравнение Клапейрона–Менделеева | 80 |
| 5.2. Распределения Максвелла и Больцмана | 82 |
| 5.3. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы. Внутренняя энергия идеального газа | 83 |
| 5.4. Теплоемкость | 84 |
| 5.5. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам | 85 |
| 5.6. Циклы | 89 |
| 5.7. Энтропия | 92 |
| Библиографический список | 93 |

Сарина Марина Павловна

**МЕХАНИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА**

**МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА**

Учебное пособие

Редактор *Л.Н. Ветчакова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 31.05.2016. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.
Уч.-изд. л. 5,58. Печ. л. 6,0. Изд. № 347/15. Заказ № 845. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20