Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.П. САРИНА

МЕХАНИКА МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Часть 1

МЕХАНИКА

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2014

УДК 531 + 539.19 + 536.7](075.8)
С 201

Рецензенты:
А.В. Баранов, канд. физ.-мат. наук, доцент
Ю.В. Соколов, канд. техн. наук, доцент

Сарина М.П.
С 201 Механика. Молекулярная физика и термодинамика. Ч. 1. Механика : учеб. пособие / М.П. Сарина. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – 187 с.

ISBN 978-5-7782-2512-1

В учебном пособии представлена теория по разделу «Механика», разобраны типичные задачи, подобраны задачи для самостоятельного решения. Учебное пособие может быть использовано преподавателями и студентами при изучении раздела «Механика».

Работа подготовлена на кафедре прикладной
и теоретической физики

УДК 531 + 539.19 + 536.7](075.8)

ISBN 978-5-7782- 2512-1

ВВЕДЕНИЕ

1. ВЕКТОРНЫЕ И СКАЛЯРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

В физике встречаются два типа величин – векторные и скалярные.

Скалярные величины имеют только численное значение, они могут быть как положительными, так и отрицательными, с ними можно выполнять любые алгебраические действия. Примеры скалярных величин: масса, температура, путь, давление, время.

Однако в физике часто наряду с численным значением величины необходимо указывать ее направление. Например, когда говорят о скорости какого-то тела, всегда указывают направление движения. ***Векторные величины*** кроме численного значения еще имеют и направление. Примеры векторных величин: сила, импульс, ускорение, напряженность электрического поля и др. Векторные величины обозначаются буквой со стрелкой вверху $\vec{a}$ (или жирным прямым шрифтом), если мы говорим о длине вектора (его модуле), то можно записывать либо $|\vec{a}|$, либо a. Действия с векторами производятся по правилам векторной алгебры.

2. ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРОВ

Проекции вектора на оси координат вычисляются с помощью простых геометрических правил. В двухмерном случае, показанном на рис. В1,

$$a_x = a\cos\alpha\ ,\ a_y = a\sin\alpha\ ,\ a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2}\ ,\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{a_y}{a_x}\ .$$

Проекция берется со знаком «+», если она совпадает с направлением оси, и со знаком «–», если она противоположна направлению оси. Проекция на ось равна нулю, если вектор перпендикулярен этой оси.

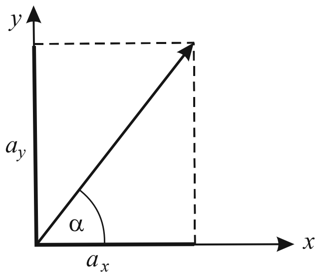


Рис. В1

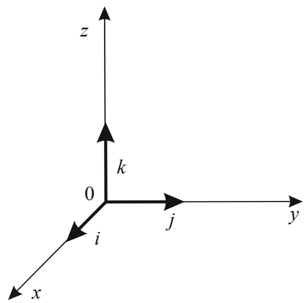


Рис. В2

Любой вектор можно выразить через единичные орты осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис. В2), $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$.

3. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, направление которого определяется по правилу параллелограмма или треугольника, а длина вычисляется с помощью теоремы косинусов.

Правило параллелограмма: нужно перенести векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы их начала находились в одной точке, затем достроить параллелограмм на этих векторах, и тогда диагональ параллелограмма, выходящая из общей точки, и будет искомой суммой векторов (рис. В3).

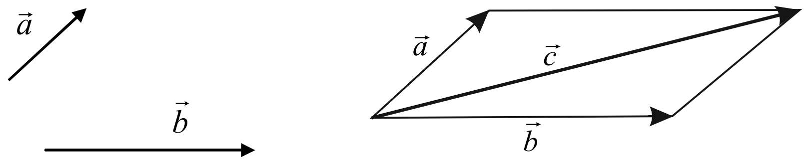


Рис. В3

Правило треугольника: если к концу вектора $\vec{a}$ приложить начало вектора $\vec{b}$, а затем провести вектор, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$, то этот вектор и будет результатом сложения двух векторов (рис. В4).

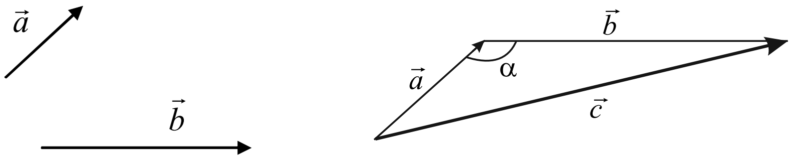


Рис. В4

Длина (модуль) вектора $|\vec{c}|$ вычисляется по теореме косинусов

$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\alpha}\,.$$

Для проекций векторов можно записать:

$$c_x = a_x + b_x\,,\ c_y = a_y + b_y\,,\ c_z = a_z + b_z\,,\ |\vec{c}| = \sqrt{c_x{}^2 + c_y{}^2 + c_z{}^2}\ .$$

4. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

Вычитание векторов можно представить как сложение одного вектора и взятого с противоположным знаком другого:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right).$$

Складывать векторы мы уже умеем по правилу параллелограмма или треугольника, только сначала надо нарисовать вектор $\left(-\vec{b}\right)$, направленный противоположно вектору $\vec{b}$ (рис. В5).

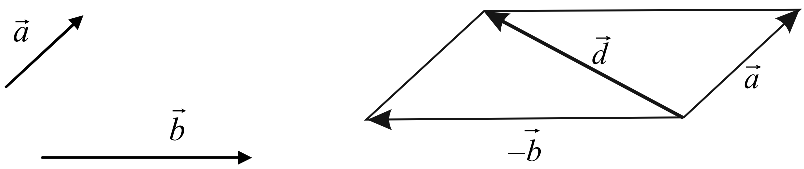


Рис. В5

Для проекций векторов можно записать:

$$d_x = a_x - b_x\,,\ d_y = a_y - b_y\,,\ d_z = a_z - b_z\,.$$

5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Результатом скалярного произведения векторов является число, которое вычисляется по следующему правилу:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Скалярное произведение векторов равно 0, если векторы перпендикулярны друг другу ($\cos\alpha=0$), скалярное произведение векторов может быть отрицательным, если угол между векторами – тупой ($\cos\alpha<0$).

Скалярное произведение векторов можно выразить через их проекции:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z .$$

6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Результатом векторного произведения векторов $\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ является вектор, модуль которого вычисляется по следующему правилу:

$$\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\alpha ,$$

где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

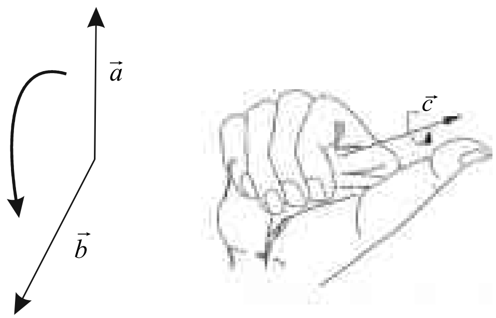


Рис. В6

Направление результирующего вектора определяется правилом правой руки: если нарисовать дугу, соединяющую по наименьшему углу первый сомножитель в векторном произведении со вторым, и расположить четыре согнутых пальца правой руки по направлению этой дуги, то оттопыренный большой палец покажет направление векторного произведения (рис. В6).

Векторное произведение векторов равно 0, если векторы параллельны друг другу ($\sin\alpha = 0,\ \ \alpha = 0°,\ \ \alpha = 180°$).

1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Механика – это раздел физики, изучающий движение тел, его закономерности и вызывающие его причины. Говоря о движении тела, мы всегда указываем, относительно чего это тело движется. Так, пассажир, сидящий в движущемся трамвае, покоится относительно трамвая, но движется относительно человека, стоящего на остановке. С телом отсчета связывают систему координат (декартову или любую другую) и часы для отсчета времени. Заметим, что в классической механике время течет одинаково во всех системах отсчета, а в релятивистской механике ход времени зависит от выбора системы отсчета. Совокупность системы координат и часов называют ***системой отсчета***.

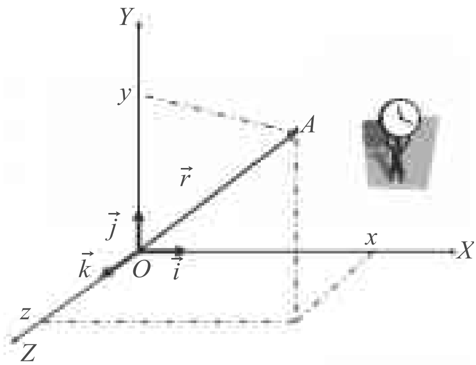


Рис. 1.1

В декартовой системе координат, которая чаще всего используется на практике, положение точки задается тремя взаимно перпендикулярными координатами (x, y, z), зависящими от времени *t*. Положение материальной точки также можно задать радиусом-вектором

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}\,, \tag{1.1}$$

проведенным из начала координат к месту нахождения точки (рис. 1.1).

1.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВИЖЕНИЯ

Пусть материальная точка движется в некоторой системе отсчета. Кривая, вдоль которой движется материальная точка, называется ***траекторией***, а длина траектории – это ***путь***, пройденный материальной точкой. Вектор, проведенный из положения материальной точки в момент времени t_1 (точка A, которой соответствует радиус-вектор $\vec{r}_1$) к положению точки в момент t_2 (точка B, которой соответствует радиус-вектор $\vec{r}_2$), называется ***вектором перемещения***

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 . \tag{1.2}$$

Траектория точки и вектор перемещения показаны на рис. 1.2.

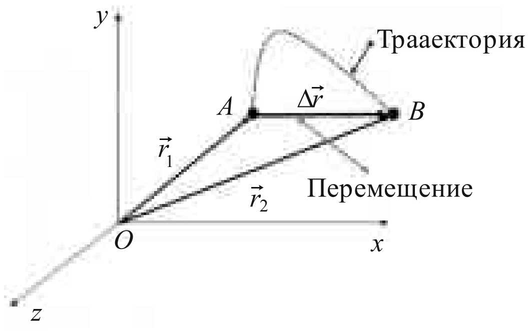


Рис. 1.2

Чтобы оценить быстроту движения и его направление, вводится понятие мгновенной скорости. ***Мгновенная скорость*** – первая производная радиуса-вектора точки по времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} . \tag{1.3}$$

Мгновенная скорость в каждый момент времени направлена по касательной к траектории движения (рис. 1.3).

Иногда бывает необходимо определить среднюю скорость за некоторый промежуток времени. ***Средней скоростью*** называется отношение вектора перемещения к промежутку времени, за который произошло перемещение,

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} . \tag{1.4}$$

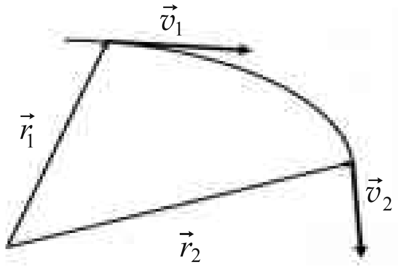


Рис. 2.3

Вектор средней скорости направлен так же, как вектор перемещения.

Если материальная точка движется неравномерно, т. е. направление и величина скорости меняются с течением времени, то для характеристики быстроты изменения скорости вводят понятие ***ускорения***. ***Мгновенным ускорением*** называют производную мгновенной скорости по времени:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{1.5}$$

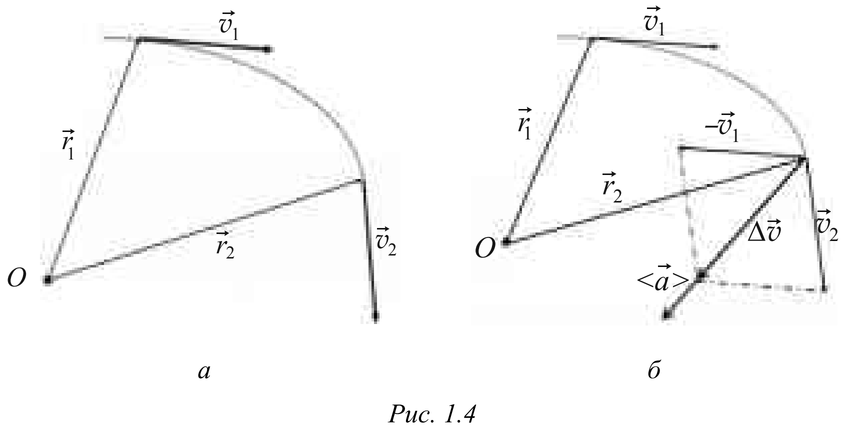


Рис. 1.4

Поскольку мгновенная скорость сама является производной вектора перемещения по времени, то про ускорение можно сказать, что это вторая производная вектора перемещения по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.6)$$

Средним ускорением называется отношение

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Обсудим направление вектора среднего ускорения. Из (1.7) видно, что его направление должно совпадать с направлением вектора изменения скорости $\Delta\vec{v}$. Нарисуем траекторию движения материальной точки и ее мгновенные скорости в двух точках этой траектории (рис. 1.4, *а*). Найдем вектор изменения скорости $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 1.4, *б*). Вектор среднего ускорения направлен так же, как вектор средней скорости.

1.2. КООРДИНАТНЫЙ СПОСОБ ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Во введении мы вспомнили, что любой вектор можно задать через его проекции на оси координат и единичные орты координатных осей. Для радиуса-вектора, зависящего в общем случае от трех координат и времени, это можно записать так:

$$\vec{r}(x,y,z,t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.8)$$

Найдем первую производную радиуса-вектора по времени:

$$\frac{d\vec{r}(x,y,z,t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}. \quad (1.9)$$

Первая производная радиуса-вектора по времени – это мгновенная скорость, которую тоже можно записать через ее проекции и единичные орты осей:

$$\vec{v}(x,y,z,t) = \frac{d\vec{r}(x,y,z,t)}{dt} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}. \quad (1.10)$$

Сравнивая (1.9) и (1.10), можно увидеть, что

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt}. \quad (1.11)$$

Если известны проекции скорости точки на оси координат, то легко найти и модуль скорости

$$\left|v(x,y,z,t)\right| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}}\ . \tag{1.12}$$

Аналогично можно записать для ускорения:

$$\vec{a}(x,y,z,t) = \frac{d\vec{v}(x,y,z,t)}{dt} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ . \tag{1.13}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2},\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y(t)}{dt^2},\ \ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z(t)}{dt^2}\ . \tag{1.14}$$

$$\left|\vec{a}(x,y,z,t)\right| = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\ . \tag{1.15}$$

Можно решать и обратную задачу: по проекциям скорости искать траекторию движения, в этом случае надо будет проинтегрировать уравнения (1.11).

1.3. ТАНГЕНЦИАЛЬНОЕ, НОРМАЛЬНОЕ И ПОЛНОЕ УСКОРЕНИЯ

В некоторых случаях при описании криволинейного движения бывает неудобно раскладывать ускорения на координатные составляющие. Тогда применяют способ описания движения, называемый естественным, когда ускорение раскладывают на тангенциальную составляющую τ, направленную по касательной к траектории движения в данной точке, и на нормальную составляющую n, перпендикулярную к касательной (рис. 1.5).

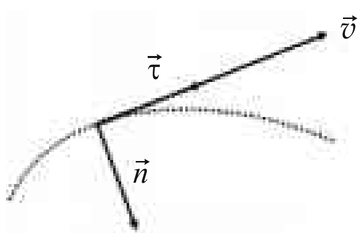


Рис. 1.5

Вдоль тангенциального и нормального направлений можно провести векторы единичной длины, которые теперь будут ортами осей:

$$\left|\vec{\tau}\right| = \left|\vec{n}\right| = 1, \quad \vec{\tau} \perp \vec{n} .$$

Вспомним, что скорость направлена по касательной к траектории движения, поэтому для нее можно написать:

$$\vec{v} = \left|v\right| \vec{\tau} . \tag{1.16}$$

Возьмем производную по времени от (1.16), учитывая, что со временем меняются и модуль скорости $(|v|)$, и ее направление ($\vec{\tau}$),

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\left|v\right|}{dt}\vec{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{dt}\left|v\right| . \tag{1.17}$$

Производная скорости по времени – это ускорение $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$. Тогда логично назвать составляющую ускорения, направленную вдоль вектора $\vec{\tau}$, тангенциальной (a_τ), а вторую составляющую – нормальной (a_n):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n} . \tag{1.18}$$

Сравнивая (1.18) и (1.17), можно найти тангенциальное и нормальное ускорения:

$$a_\tau = \frac{d\left|v\right|}{dt}, \tag{1.19}$$

$$a_n \vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\left|v\right| . \tag{1.20}$$

Тангенциальное ускорение определяет быстроту изменения скорости по величине, а нормальное – быстроту изменения скорости по направлению. Можно показать, что

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \tag{1.21}$$

где ρ – радиус кривизны траектории. При движении по окружности радиус кривизны траектории просто равен радиусу окружности.

Таким образом, полное ускорение $\vec{a}$ раскладывается на две составляющие так, как показано на рис. 1.6.

Модуль полного ускорения

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_\tau^{\,2} + a_n^{\,2}} \,. \tag{1.22}$$

В качестве примера рассмотрим движение точки по окружности радиуса R со скоростью v (рис. 1.7). Тангенциальное ускорение выглядит следующим образом: $a_\tau = \dfrac{d\left|v\right|}{dt}$, нормальное – $a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

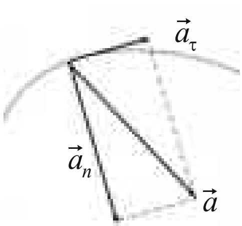


Рис. 1.6

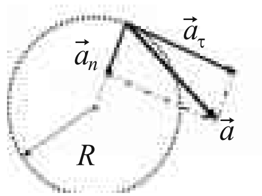


Рис. 1.7

В том случае, когда скорость не меняется по величине $\left|v\right| = \text{const}$, тангенциальное ускорение будет равно $a_\tau = 0$.

1.4. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную K и движущуюся относительно нее с постоянной скоростью $\vec{v}_0 = \text{const}$ инерциальную систему отсчета K' (рис. 1.8). Напомним, что ***инерциальные системы отсчета*** – это системы отсчета, движущиеся равномерно и прямолинейно.

Положение точки относительно системы отсчета K характеризуется радиусом-вектором $\vec{r}$, положение точки относительно системы отсчета K' – радиусом-вектором $\vec{r}\,'$. Вектор, соединяющий начала отсчета систем K и K', – $\vec{r}_0$. В системе отсчета K – время t, в системе отсчета K' – время t'. Из рис. 1.8 видно, что

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 \,, \tag{1.23}$$

при этом $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t$.

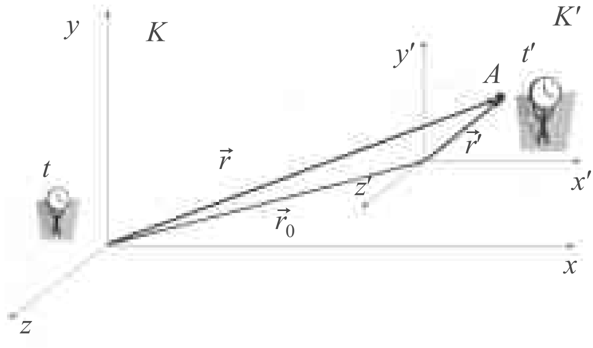


Рис. 1.8

В проекциях на оси координат уравнение (1.23) можно переписать:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t; \\ y = y' + v_{0y}t; \\ z = z' + v_{0z}t. \end{cases} \tag{1.24}$$

Продифференцируем (1.23) по времени с учетом того, что в классической механике время течет одинаково во всех системах отсчета $t = t'$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \frac{d\vec{r}_0}{dt}. \tag{1.25}$$

Тогда $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – скорость точки *A* относительно системы отсчета *K*; $\dfrac{d\vec{r}\,'}{dt} = \vec{v}\,'$ – скорость точки *A* относительно системы отсчета K', $\dfrac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0$ – скорость системы отсчета K' относительно системы отсчета *K*. Перепишем (1.25) с учетом введенных обозначений:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0. \tag{1.26}$$

Выражение (1.26) – это ***закон сложения скоростей*** в классической механике.

1.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ ПРИНЦИП ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ГАЛИЛЕЯ

Рассмотрим частный случай движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K в направлении оси X с постоянной скоростью $\vec{v}_0$:

$$\left|\vec{v}_0\right| = v_{0x}, \quad v_{0y} = v_{0z} = 0 .$$

Тогда (1.24) с учетом одинакового течения времени в различных системах отсчета в классической механике примет вид

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t'. \end{cases} \tag{1.27}$$

Уравнения (1.27) называются ***преобразованиями Галилея***. Очевидно, что можно записать формулу для преобразований Галилея для произвольного направления движения системы отсчета K' относительно системы отсчета K, но мы этого не будем делать, чтобы не усложнять выкладки и не уменьшать наглядность преобразований. В преобразованиях Галилея надо обратить особое внимание на одинаковое течение времени в различных инерциальных системах отсчета. Это утверждение справедливо в том случае, если скорость системы отсчета мала по сравнению со скоростью света в вакууме. При больших скоростях движения преобразования Галилея переходят в преобразования Лоренца, которые будут рассмотрены позже.

Продифференцируем уравнение (1.26) по времени:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{v}_0}{dt} . \tag{1.28}$$

Система отсчета K' движется относительно системы отсчета K с постоянной скоростью $\vec{v}_0 = \text{const}$. Поэтому в (1.28) $\dfrac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$. Производная скорости по времени – это ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt}.$$

После проведенных выше преобразований (1.28) примает вид

$$\vec{a} = \vec{a}' \tag{1.29}$$

и выражает ***принцип относительности Галилея***: все законы механики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета.

Рис. 1.9

Действительно, никакими опытами нельзя определить, движется система отсчета или покоится. Так, если бросить мячик с вершины мачты корабля вниз (рис. 1.9), то он упадет точно у подножия мачты независимо от того, покоится корабль или движется.

2. ИМПУЛЬС СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ И ЗАКОН ЕГО СОХРАНЕНИЯ

Пусть частица массой m движется со скоростью $\vec{v}$ (рис. 3.1). ***Импульсом*** частицы называется вектор, равный произведению массы частицы на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \tag{2.1}$$

Единица измерения импульса – килограмм-метр в секунду (кг · м/с).

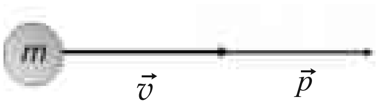


Рис. 3.1

Возьмем производную по времени от левой и правой частей уравнения (2.1):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} = \vec{F} \,. \tag{2.2}$$

Правая часть уравнения (2.2) – это сила, действующая на тело. Таким образом, изменение импульса тела меняется под воздействием силы. Если никакая сила на тело не действует ($\vec{F} = 0$), то импульс тела не меняется:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = \text{const} \,.$$

Рассмотрим систему из N частиц массами $m_1, m_2, ..., m_N$, движущихся со скоростями $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N$ (рис. 2.2).

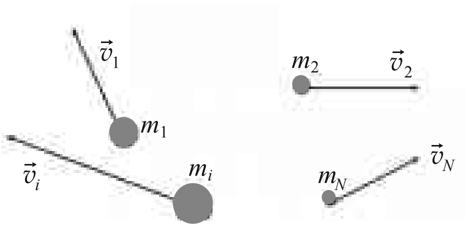


Рис. 2.2

Импульс системы частиц – это векторная сумма импульсов отдельных частиц:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \,. \tag{2.3}$$

Возьмем производную по времени от левой и правой частей (2.3):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{d\vec{p}_i}{dt}. \qquad (2.4)$$

В правой части (2.4) стоит векторная сумма сил, действующих на все частицы по отдельности. На одну частицу могут действовать силы со стороны других частиц – ***внутренние силы***, также на нее могут действовать ***внешние силы***:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k=1, k\neq i}^{N}\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{i\,(\text{out})}, \qquad (2.5)$$

где $\vec{F}_{ik}$ – равнодействующая внутренних сил со стороны остальных; $\vec{F}_{i\,(\text{out})}$ – равнодействующая внешних сил, действующих на i частицу. Подставим (2.5) в (2.4), получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1, k\neq i}^{N}\vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i(\text{out})}. \qquad (2.6)$$

Первое слагаемое в (2.6) – это векторная сумма всех внутренних сил, которая по третьему закону Ньютона равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1, k\neq i}^{N}\vec{F}_{ik} = 0.$$

Тогда

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_{i(\text{out})}. \qquad (2.7)$$

Если на систему частиц не действуют внешние силы, то такая система называется ***замкнутой***.

Для замкнутой системы

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0, \quad \vec{p} = \text{const}. \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.8) – это математическая запись ***закона сохранения импульса***: ***импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не меняется со временем.*** Может сохраняться импульс и незамкнутой системы в том случае, если равнодействующая внешних сил равна нулю.

Закон сохранения импульса – один из фундаментальных законов природы, который является следствием однородности пространства. Однородность пространства означает, что ход явлений и процессов не зависит от выбора системы отсчета, т. е. при одинаковых условиях физические процессы будут протекать одинаково в различных точках пространства. Закон сохранения импульса носит универсальный характер: ему подчиняются частицы, движущиеся с большими скоростями (близкими к скорости света), он выполняется и в системах микрочастиц, движущихся по законам квантовой механики.

3. ЦЕНТР МАСС СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Системы частиц могут состоять из большого количества частиц, и часто выкладки становятся громоздкими и неудобными в работе. В каждой системе материальных точек (или в системе частиц) есть одна замечательная воображаемая точка, описывая поведение которой можно говорить о поведении системы частиц в целом. Это точка называется ***центром масс***.

Пусть в систему материальных точек входят N частиц массами $m_1, m_2, ..., m_N$. Выберем начало отсчета и проведем из него радиусы-векторы к каждой материальной точке (рис. 3.1).

Радиус-вектор, определяющий положение центра масс $\vec{r}_C$ находится по следующему правилу:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} m_i}, \tag{3.1}$$

где m_i, $\vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор материальной точки i.

Также можно определить координаты центра масс:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \; y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}; \; z_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}. \quad (3.2)$$

Длина радиуса-вектора, определяющего положение центра масс,

$$\left|\vec{r}_C\right| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 + z_C^2}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим пример. Пусть четыре материальные точки расположены в вершинах квадрата со стороной a. Массы материальных точек и их расположение показано на рис. 3.2.

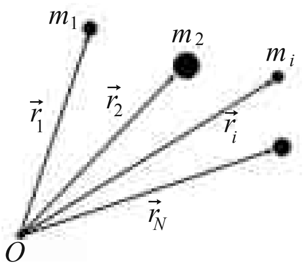


Рис. 3.1

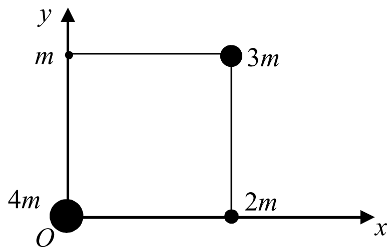


Рис. 3.2

Выберем начало отсчета в точке O. Найдем координаты центра масс:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{4m \cdot 0 + 2m \cdot a + 3m \cdot a + m \cdot 0}{m + 2m + 3m + 4m} = \frac{5ma}{10m} = 0{,}5a;$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{4m \cdot 0 + 2m \cdot 0 + 3m \cdot a + m \cdot a}{m + 2m + 3m + 4m} = \frac{4ma}{10m} = 0{,}4a.$$

Покажем расположение центра масс на рис. 3.3, используя найденные значения координат.

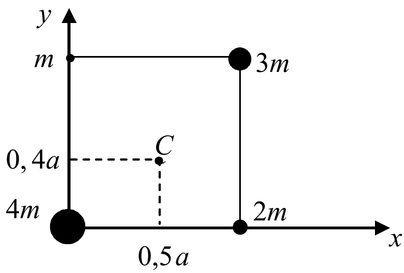


Рис. 3.3

Найдем скорость центра масс, для этого продифференцируем уравнение (3.1) по времени и заменим сумму масс материальных точек массой всей системы $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$:

$$\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}. \qquad (3.4)$$

Левая часть уравнения (3.4) – это скорость центра масс $v_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$; $\dfrac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ – скорость частицы *i*. После замены получим

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i . \qquad (3.5)$$

Если скорость центра масс системы равна нулю $\left(\vec{v}_C = 0\right)$, то система покоится как целое, однако при этом отдельные частицы могут двигаться относительно друг друга.

В правой части уравнения (3.5) стоит сумма импульсов отдельных частиц, которая согласно (2.3) равна импульсу системы частиц $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$. В итоге получается, что импульс системы частиц равен произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\vec{p} = M\vec{v}_C . \qquad (3.6)$$

Таким образом, *центр масс системы частиц движется как материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы*.

Если взять производную от (3.6) по времени, получим уравнение, называемое ***законом движения центра масс*:**

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_C}{dt};$$

$$\vec{F}_{\text{out}} = M\,\frac{d\vec{V}_C}{dt}\,, \qquad (3.7)$$

где $\vec{F}_{\text{out}}$ – результирующая внешних сил.

3.1. СИСТЕМА ЦЕНТРА ИНЕРЦИИ

В некоторых задачах нас интересует не движение всей системы в целом, а движение частиц внутри системы. В таком случае целесообразно пользоваться системой отсчета, где центр масс покоится. Система отсчета, жестко связанная с центром масс, называется ***системой центра инерции*** (**СЦИ**). В этой системе отсчета центр масс покоится. Кроме того, поскольку центр масс системы частиц покоится, то ***суммарный импульс системы частиц в* СЦИ *равен нулю***:

$$\vec{p} = M\vec{v}_C = 0\,. \qquad (3.8)$$

Рассмотрим систему из двух частиц (рис. 3.4), движущихся относительно неподвижного наблюдателя (система отсчета неподвижного наблюдателя называется ***лабораторной системой отсчета* – ЛСО**). Массы частиц равны m_1 и m_2, скорости частиц – v_1 и v_2 соответственно.

Рис. 3.4

Найдем скорости частиц в системе центра инерции v_1' и $\vec{v}_2'$. Для этого сначала надо найти скорость системы центра инерции $\vec{v}_C$, а потом применить закон сложения скоростей. Скорость центра масс находится согласно (3.5) следующим образом:

$$\vec{v}_C = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\,. \qquad (3.9)$$

Скорости частиц в СЦИ можно найти из закона сложения скоростей:

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_C, \\ \vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_C, \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_C, \\ \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_C. \end{cases} \tag{3.10}$$

Подставив в (3.10) выражение для скорости центра масс (3.9), получим

$$\begin{cases} \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2}, \\ \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \dfrac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Итак, мы нашли скорости частиц в СЦИ. Проверим правильность наших вычислений. Критерий проверки простой: сумма импульсов частиц в СЦИ должна равняться нулю. Находим импульсы частиц в СЦИ и складываем:

$$\vec{p} = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2';$$

$$\vec{p} = m_1\frac{m_2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)}{m_1 + m_2} + m_2\frac{m_1(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)}{m_1 + m_2} = 0.$$

Векторная сумма импульсов частиц равна нулю, значит, найденные нами величины верны. Отметим, что в СЦИ две частицы всегда движутся навстречу друг другу.

Рассмотрим еще более конкретный пример. Пусть в лабораторной системе отсчета (системе отсчета неподвижного наблюдателя) частица массы m движется, а другая частица такой же массы покоится (рис. 3.5).

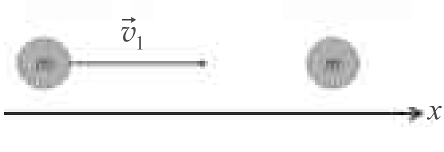


Рис. 3.5

Найдем скорости частиц в СЦИ. Выберем направление оси x так, как показано на рис. 3.5, и вычислим проекцию скорости центра инерции v_C на ось x согласно (3.9):

$$v_C = \frac{mv}{m+m} = \frac{mv}{2m} = \frac{v}{2}.$$

Находим скорость первой частицы по закону сложения скоростей (3.10):

$$v_1' = v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}.$$

Аналогично вычисляем скорость второй частицы:

$$v_2' = 0 - \frac{v}{2} = -\frac{v}{2}.$$

Рис. 3.6

Мы видим, что в СЦИ частицы движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, как показано на рис. 3.6.

4. РАБОТА И МОЩНОСТЬ

4.1. РАБОТА

Понятие работы вводится для описания процесса обмена энергией между телами.

Пусть под действием силы $\vec{F}$ тело перемещается вдоль траектории из точки *1* в точку *2*. На некотором участке движения вектор элементарного перемещения $d\vec{r}$ направлен под углом α к действующей силе $\vec{F}$ (рис. 4.1).

Элементарной работой dA силы $\vec{F}$ при перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cos\alpha. \qquad (4.1)$$

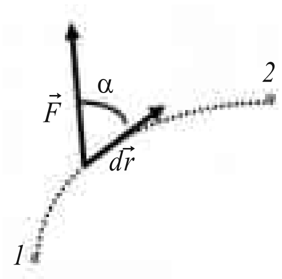


Рис. 4.1

Знак совершаемой работы зависит от угла между векторами силы и элементарного перемещения. Если угол между этими векторами острый, то работа положительная:

$$\alpha < 90°, \quad \cos\alpha > 0, \quad dA > 0\,;$$

если угол между этими векторами тупой, то работа отрицательная:

$$\alpha > 90°, \quad \cos\alpha < 0, \quad dA < 0\,;$$

если сила перпендикулярна перемещению, то работа не совершается:

$$\alpha = 90°, \quad \cos\alpha = 0, \quad dA = 0\,.$$

Чтобы найти полную работу на всем участке траектории от точки *1* до точки *2*, надо взять интеграл от (4.1)

$$A = \int dA = \int_1^2 \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha\,. \tag{4.2}$$

Единица измерения работы – джоуль (1 Дж = 1 Н · м).

4.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РАБОТЫ

Обозначим F_s проекцию силы $\vec{F}$ на вектор перемещения $d\vec{r}$ (рис. 4.2). Можно найти связь между силой $\vec{F}$ и ее проекцией F_s:

$$F_s = \left|\vec{F}\right|\cos\alpha\,. \tag{4.3}$$

При бесконечно малом перемещении длина вектора перемещения равна длине пути $\left|d\vec{r}\right| = ds$. Вся работа по перемещению материальной точки из положения *1* в положение *2* определяется уравнением (4.2), которое можно переписать с учетом (4.3):

$$A = \int_1^2 \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos\alpha = \int_1^2 F_s ds\,, \tag{4.4}$$

где $dA = F_s ds$ – элементарная работа.

Если нарисовать зависимость проекции силы F_s от пути s, то площадь под графиком и будет работой. Пусть, например, эта зависимость имеет вид, изображенный на рис. 4.3.

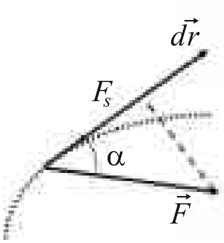


Рис. 4.2

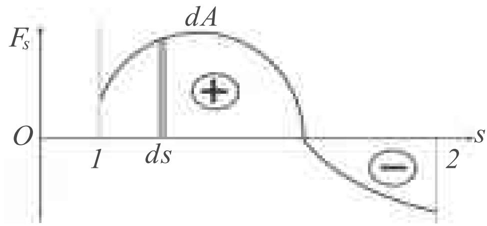


Рис. 4.3

Если рассмотреть на рис. 4.3 бесконечно малый участок пути ds, то произведение $F_s ds = dA$ – это элементарная работа, которая равна площади прямоугольника со сторонами F_s и ds (заштрихованный прямоугольник на рис. 4.3). Сумма всех площадей прямоугольников – это площадь под кривой, или интеграл от элементарных работ, т. е. полная работа на участке пути от точки *1* до точки *2*. При вычислении работы необходимо учитывать знак: если проекция силы на вектор перемещения положительна (верхняя часть кривой на рис. 4.3), то работа положительна. Если проекция силы на вектор перемещения отрицательна (нижняя часть кривой на рис. 4.3), то работа берется со знаком «минус».

4.3. РАБОТА УПРУГОЙ СИЛЫ

При растяжении или сжатии пружины в ней возникают упругие силы, стремящиеся вернуть пружину в положение равновесия. Эти силы подчиняются закону Гука:

$$F = -kx, \tag{4.5}$$

где k – коэффициент жесткости пружины; x – удлинение пружины (рис. 4.4); знак «–» показывает, что сила направлена в противоположную удлинению сторону.

Элементарная работа, совершаемая при растяжении пружины на расстояние dx,

$$dA = -Fdx. \tag{4.6}$$

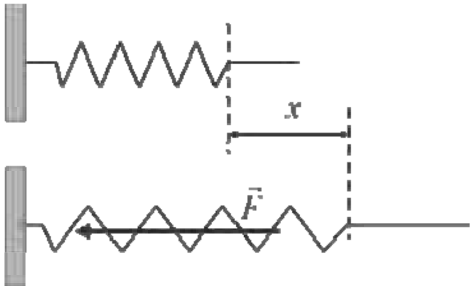


Рис. 4.4

Знак «–» стоит потому, что сила и удлинение пружины направлены в разные стороны. Подставив закон Гука в (4.6), получим

$$dA = -Fdx = kxdx \,. \tag{4.7}$$

Чтобы найти всю работу, необходимо проинтегрировать (4.7):

$$A = \int_0^x kxdx = \left.\frac{kx^2}{2}\right|_0^x = \frac{kx^2}{2} \,. \tag{4.8}$$

4.4. РАБОТА СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Найдем работу по перемещению тела массой m в поле тяжести Земли с расстояния r_1 на расстояние r_2 ($r_2 > r_1$) (рис. 4.5). На тело действует сила тяжести $F = mg$, направленная к Земле.

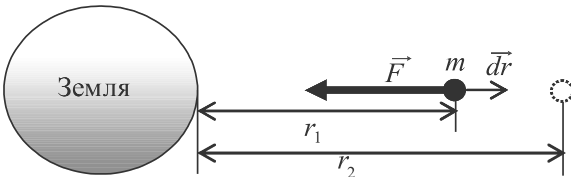


Рис. 4.5

При перемещении тела от Земли на расстояние dr совершается работа

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|d\vec{r}\right| \cos\alpha = mg \cdot dr \cdot \cos 180° = -mgdr \,. \tag{4.9}$$

Полная работа при перемещении тела с расстояния r_1 на расстояние r_2

$$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = -\int_{r_1}^{r_2} mgr = -mg(r_2 - r_1) = mg(r_1 - r_2)\,. \qquad (4.10)$$

Мы видим из (4.10), что работа зависит только от начального и конечного положений тела и не зависит от способа перемещения из одного положения в другое.

4.5. МОЩНОСТЬ

Для описания скорости изменения работы со временем вводят понятие мощности

$$N = \frac{dA}{dt}\,. \qquad (4.11)$$

Мощность – это работа, совершаемая в единицу времени. Мощность измеряется в ваттах (1 Вт = 1 Дж/с).

Если считать, что за время dt сила, действующая на тело, не меняется ни по величине, ни по направлению, то, подставив в (4.11) формулу элементарной работы (4.1), получим

$$N = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = \left(\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \left(\vec{F} \cdot \vec{v}\right) = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z\,, \qquad (4.12)$$

где $F_x, F_y, F_z, v_x, v_y, v_z$ – проекции силы и скорости на координатные оси.

Можно решать и обратную задачу, по известной мощности вычислять работу

$$A = \int_0^t N dt\,. \qquad (4.13)$$

5. ЭНЕРГИЯ

5.1. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Кинетическая энергия – это энергия движения системы. Если тело движется под действием силы $\vec{F}$, то при этом совершается работа, и кинетическая энергия тела dT увеличивается на величину совершенной работы dA:

$$dT = dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}). \tag{5.1}$$

Используя второй закон Ньютона $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ и связь между скоростью и перемещением $d\vec{r} = \vec{v}dt$, получим

$$dA = \left(m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt \right) = (m\vec{v} \cdot d\vec{v}) = mvdv. \tag{5.2}$$

При выводе (5.2) было учтено, что $(\vec{v} \cdot d\vec{v}) = vdv$.

Чтобы найти изменение кинетической энергии $(T_2 - T_1)$ при изменении скорости тела от v_1 до v_2 (совершенную работу), необходимо проинтегрировать (5.2):

$$A = \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \left.\frac{mv^2}{2}\right|_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2{}^2}{2} - \frac{mv_1{}^2}{2} = T_2 - T_1. \tag{5.3}$$

Таким образом, кинетическая энергия тела в данный момент времени определяется его скоростью и не зависит от того, каким способом эта скорость была достигнута. Физические величины, зависящие только от некоторых значений физических величин в данный момент времени и не учитывающие способа достижения этих значений, называются ***функциями состояния.*** Кинетическая энергия тела – это функция состояния

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{5.4}$$

Кинетическая энергия тела зависит от выбора системы отсчета, поскольку скорость тела всегда зависит от выбора системы отсчета.

Единица измерения кинетической энергии такая же, как и у работы, – джоуль (Дж). Кинетическая энергия системы тел – это сумма кинетических энергий каждого тела в отдельности:

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2}, \tag{5.5}$$

где N – количество частиц в системе; m_i, v_i – масса и скорость частицы i.

5.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Потенциальная энергия – это механическая энергия, которая определяется взаимным расположением тел и характером их взаимодействия. Понятие потенциальной энергии вводится в потенциальных полях.

Пространство, в каждой точке которого действуют силы, называется ***силовым полем***. Поле называют ***потенциальным***, если работа по перемещению тела из точки *1* в точку *2* не зависит от формы траектории (рис. 5.1).

Мы можем перемещать тело из точки *1* в точку *2* по кривой *1b2* или по кривой *1c2*, работа будет одинакова в потенциальном поле:

$$A_{1c2} = A_{1b2}. \tag{5.6}$$

Силы, действующие в потенциальных полях, называют ***консервативными***. Если же работа по перемещению тела в силовом поле зависит от траектории движения, то такие силы называются ***диссипативными***. Примером диссипативной силы служит сила трения.

Из (5.6) следует еще одно важное свойство потенциальных полей: в них работа по перемещению тела вдоль замкнутой траектории равна нулю. Пусть тело перемещается вдоль замкнутой траектории *1c2b1* в консервативном поле (рис. 5.2).

Из определения потенциальных полей следует, что

$$A_{1c2} = A_{1b2},$$

но $A_{1b2} = -A_{2b1}$. Найдем полную работу по перемещению вдоль замкнутой траектории *1b2c1*:

$$A_{1c2} + A_{2b1} = A_{1c2} - A_{1b2} = 0. \tag{5.7}$$

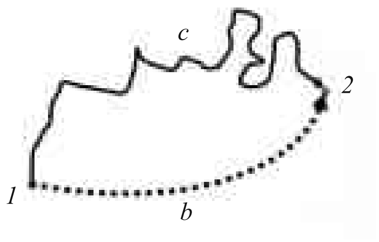


Рис. 5.1

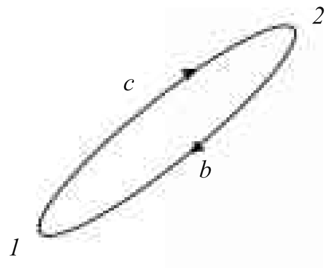


Рис. 5.2

Работа консервативной силы при бесконечно малом изменении конфигурации системы равна убыли потенциальной энергии

$$dA = -dU \; . \tag{5.8}$$

С другой стороны, элементарная работа определяется формулой (4.1) $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$, следовательно,

$$dU = -(\vec{F} \cdot d\vec{r}) \, , \tag{5.9}$$

а потенциальная энергия

$$U = -\int \left(\vec{F} \cdot d\vec{r} \right) + \mathrm{const} \tag{5.10}$$

определяется с точностью до некоторой постоянной, зависящей от выбора начала отсчета. На самом деле выбор начала отсчета не является критичным, поскольку практический смысл имеет разность потенциальных энергий. Чаще всего потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении условно считают равной нулю (например, потенциальная энергия поля тяжести на поверхности Земли), а потенциальную энергию в других положениях отсчитывают относительно нулевого значения.

Для консервативных сил между силой и потенциальной энергией выполняется соотношение

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU$$

или

$$F_x = -\frac{dU}{dx} \, , \; F_y = -\frac{dU}{dy} \, , \; F_z = -\frac{dU}{dz} \, . \tag{5.11}$$

Выражение (5.11) можно записать в векторном виде

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U \,, \tag{5.12}$$

где $\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ – оператор векторной алгебры, называемый градиентом; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты координатных осей. Знак «–» в (5.12) показывает, что сила направлена в сторону убыли потенциальной энергии.

Конкретный вид зависимости потенциальной энергии определяется характером силового поля.

5.2.1. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ПОЛЯ ТЯЖЕСТИ ЗЕМЛИ

При бесконечно малом перемещении тела в поле тяжести Земли совершается работа согласно (4.9)

$$dA = -mgdr \,.$$

С другой стороны, согласно (5.8) работа равна убыли потенциальной энергии:

$$dA = -dU = -mgdr \,,$$

$$dU = mgdr \,. \tag{5.13}$$

После интегрирования (5.13) в пределах от r_1 до r_2 получим

$$U_2 - U_1 = \int_{r_1}^{r_2} mgdr = mg(r_2 - r_1) \,. \tag{5.14}$$

Таким образом, потенциальная энергия тела, находящегося в поле тяжести Земли, пропорциональна массе тела и расстоянию до поверхности Земли, если условно считать, что на поверхности Земли потенциальная энергия равна нулю. Еще раз отметим, что выбор условия, где потенциальная энергия равна нулю, произволен, можно выбрать начало отсчета так, что потенциальная энергия равна нулю в центре Земли или на вершине Эвереста.

5.2.2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

При бесконечно малом перемещении тела под действием сил упругости совершаемая работа

$$dA = -kxdx .$$

С другой стороны, работа равна убыли потенциальной энергии.

После интегрирования в пределах от x_1 до x_2 получим формулу

$$U_2 - U_1 = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{k\left(x_2^2 - x_1^2\right)}{2}.$$

Таким образом, потенциальная энергия упругой деформации пропорциональна квадрату удлинения (x^2).

5.3. ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И ЗАКОН ЕЕ СОХРАНЕНИЯ

Полная механическая энергия системы – это энергия движения и взаимодействия, т. е. полная механическая энергия E есть сумма кинетической T и потенциальной U энергий:

$$E = T + U . \tag{5.15}$$

Рассмотрим систему материальных точек с массами $m_1, m_2, ..., m_N$, движущихся со скоростями $v_1, v_2, ..., v_N$. На каждую из этих точек могут действовать внешние и внутренние консервативные, а также неконсервативные силы. Введем обозначения: пусть $\vec{F}_{i(\text{in})}$ – равнодействующая внутренних консервативных сил, действующих на i материальную точку; $\vec{F}_{i(\text{out})}$ – равнодействующая внешних консервативных сил, действующих на материальную точку *i*; $\vec{f}_i$ – равнодействующая внешних неконсервативных сил, действующих на материальную точку *i*.

Запишем для каждой материальной точки уравнения движения (второй закон Ньютона):

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{1(\text{in})} + \vec{F}_{1(\text{out})} + \vec{f}_1; \\ m_2 \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{2(\text{in})} + \vec{F}_{2(\text{out})} + \vec{f}_2; \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_N \dfrac{d\vec{v}_N}{dt} = \vec{F}_{N(in)} + \vec{F}_{N(\text{out})} + \vec{f}_N. \end{cases} \tag{5.16}$$

Умножим скалярно каждое уравнение на $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$, получим

$$\begin{cases} m_1 \left(\vec{v}_1 dt \cdot \dfrac{d\vec{v}_1}{dt} \right) = \left(\left(\vec{F}_{1(\text{in})} + \vec{F}_{1(\text{out})} \right) \cdot d\vec{r}_1 \right) + \left(\vec{f}_1 \cdot d\vec{r}_1 \right); \\ m_2 \left(\vec{v}_2 dt \cdot \dfrac{d\vec{v}_2}{dt} \right) = \left(\left(\vec{F}_{2(\text{in})} + \vec{F}_{2(\text{out})} \right) \cdot d\vec{r}_2 \right) + \left(\vec{f}_2 \cdot d\vec{r}_2 \right); \\ \ldots\ldots\ldots \\ m_N \left(\vec{v}_N dt \cdot \dfrac{d\vec{v}_N}{dt} \right) = \left(\left(\vec{F}_{N(\text{in})} + \vec{F}_{N(\text{out})} \right) \cdot d\vec{r}_N \right) + \left(\vec{f}_N \cdot d\vec{r}_N \right), \end{cases} \tag{5.17}$$

а затем, после сокращения в левых частях на dt, сложим все N уравнений:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i(\text{in})} + \vec{F}_{i(\text{out})}) d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} (\vec{f}_i d\vec{r}_i). \tag{5.18}$$

Левая часть уравнения (5.18) – это приращение кинетической энергии системы

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{N} d \left(\frac{m_i v_i^2}{2} \right) = d \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} \right) = dT .$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (5.18) – изменение потенциальной энергии системы

$$\sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i(\text{in})} + \vec{F}_{i(\text{out})}) d\vec{r}_i = -dU .$$

Второе слагаемое в правой части (5.18) – это работа внешних неконсервативных сил

$$\sum_{i=1}^{N}(\vec{f}_i d\vec{r}_i) = dA .$$

Таким образом, (5.18) можно переписать и получим

$$dT = -dU + dA ,$$

или

$$d\left(T + U\right) = dA . \qquad (5.19)$$

Если система переходит из одного состояния (1) в другое (2), то после интегрирования (5.19) получим

$$\int_1^2 d(T+U) = \int_1^2 dA = A_{12} , \qquad (5.20)$$

т. е. изменение полной механической энергии при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 равно работе внешних неконсервативных сил.

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то $d\left(T+U\right) =$ $= dA = 0$ и

$$T + U = \mathrm{const} . \qquad (5.21)$$

Физический смысл уравнения (5.21) – это ***закон сохранения энергии***: *в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется*, т. е. не меняется со временем.

Закон сохранения энергии – это второй универсальный закон природы, он следует из ***однородности времени***. Однородность времени означает что в какое бы время ни проводился физический эксперимент, в одинаковых условиях будут получены одинаковые результаты. Или говорят иначе: что физические законы инвариантны (не меняются) относительно начала отсчета времени.

В консервативных системах при постоянстве полной механической энергии ее части (кинетическая и потенциальная энергии) могут меняться, при этом происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот. На рис. 5.3 показаны два положения сноубордиста (http://phet.colorado.edu/en/simulation/energy-skate-park-basics): если спортсмен находится на вершине трека, его потенциальная энергия максимальна, а кинетическая равна нулю; во втором положении потенциальная энергия уменьшилась по сравнению с первоначальной, а кинетическая, наоборот, возросла. Но общая сумма энергий осталась неизменной.

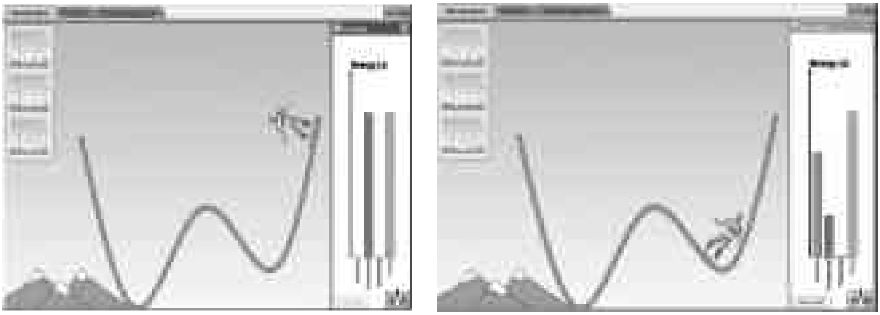


Рис. 5.3

Если же в системе появляются диссипативные силы, например (сила трения), то полная механическая энергия уменьшается, при этом та ее часть, на которую уменьшилась полная механическая энергия, переходит в другие виды энергии, к примеру, во внутреннюю энергию (при трении тела нагреваются).

6. СОУДАРЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ

Классическим примером применения законов сохранения импульса и энергии служит задача о соударении двух тел. Для наглядности рассмотрим одномерный случай и центральный удар, когда два тела движутся вдоль одной прямой так, что линия удара проходит через их центры масс. Пусть шар массы m_1 движется со скоростью $\vec{v}_1$, а шар массы m_2 – со скоростью $\vec{v}_2$ (рис. 6.1, *а*).

Любой удар можно разложить на два этапа: сначала кинетическая энергия шаров переходит в их энергию упругой деформации, а затем энергия упругой деформации снова переходит в кинетические энергии

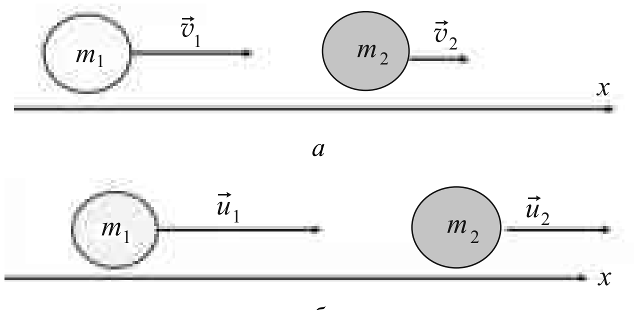


Рис. 6.1

шаров. Если энергия упругой деформации полностью переходит в кинетические энергии шаров, то такой удар называется ***абсолютно упругим***, если же часть энергии упругой деформации переходит в кинетическую энергию, а оставшаяся часть – во внутреннюю энергию, то такой удар называют ***неупругим***.

6.1. АБСОЛЮТНО УПРУГОЕ СОУДАРЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ

Рассмотрим абсолютно упругий удар. До удара скорости частиц имели величины $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара скорости частиц стали $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ соответственно (рис. 6.1, *б*). Направления скоростей после удара можно выбирать произвольно, если в результате получится отрицательное число, значит, скорость после удара направлена в противоположную сторону.

Запишем закон сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2\,, \qquad (6.1)$$

или в проекциях на ось x

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2\,. \qquad (6.2)$$

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}\,. \qquad (6.3)$$

Найдем скорости тел после удара. Преобразуем (6.2) и (6.3) соответственно:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2), \tag{6.4}$$

$$m_1\left(v_1^2 - u_1^2\right) = m_2\left(u_2^2 - v_2^2\right). \tag{6.5}$$

Чтобы найти скорости тел после удара u_1 и u_2, необходимо решить систему уравнений (6.4) и (6.5). Поделим (6.5) на (6.4) – это будет первое уравнение, и перепишем (6.4) – это будет второе уравнение:

$$\begin{cases} m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2); \\ v_1 + u_1 = u_2 + v_2; \end{cases} \tag{6.6}$$

$$\begin{cases} v_1 - u_1 = \dfrac{m_2}{m_1}(u_2 - v_2); \\ v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \end{cases} \tag{6.7}$$

Сложим первое и второе уравнения в (6.7), получим

$$2v_1 = \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)u_2 + \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)v_2$$

и выразим скорость второго шара после удара

$$u_2 = \frac{2v_1 - \left(1 - \dfrac{m_2}{m_1}\right)v_2}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}. \tag{6.8}$$

Аналогично можно выразить скорость первого шара после удара u_1

$$u_1 = \frac{2v_2\dfrac{m_2}{m_1} + \left(1 - \dfrac{m_2}{m_1}\right)v_1}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}}. \tag{6.9}$$

Рассмотрим случай, когда массы шаров одинаковы: $m_1 = m_2 = m$. Найдем скорости шаров после удара из (6.8) и (6.9).

Скорость второго шара после удара

$$u_2 = \frac{2v_1 - \left(1 - \dfrac{m}{m}\right)v_2}{1 + \dfrac{m}{m}} = \frac{2v_1 - (1-1)v_2}{1+1} = \frac{2v_1}{2} = v_1 . \qquad (6.10)$$

Скорость первого шара после удара

$$u_1 = \frac{2v_2 \dfrac{m}{m} + \left(1 - \dfrac{m}{m}\right)v_1}{1 + \dfrac{m}{m}} = \frac{2v_2}{2} = v_2 . \qquad (6.11)$$

Мы видим из (6.10) и (6.11), что если шары имеют одинаковые массы, то после удара они обмениваются скоростями. Если первый шар до удара двигался, а второй шар покоился, то после удара первый шар остановится, а второй шар начнет двигаться со скоростью первого шара до удара.

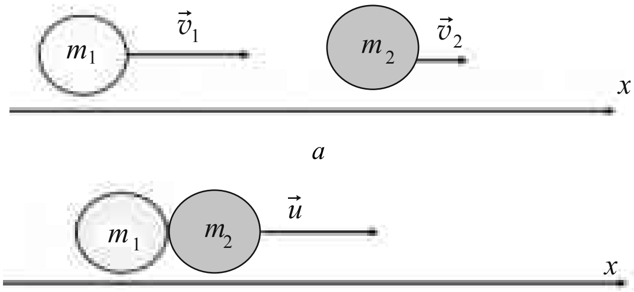
Рассмотрим случай, когда тело массой m_1 налетает на покоящееся тело $v_2 = 0$ значительно большей массы: $m_2 \gg m_1$ (например, удар шарика о стенку). Если второй шар покоился до удара, то уравнения (6.8) и (6.9) примут вид

$$u_2 = \frac{2v_1}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} = 0 ; \; u_1 = \frac{\left(1 - \dfrac{m_2}{m_1}\right)v_1}{1 + \dfrac{m_2}{m_1}} = -v_1 . \qquad (6.12)$$

То есть после удара шар большей массы также останется в покое (стенка никуда не будет двигаться), а налетающий шар будет двигаться с той же скоростью, что и до удара, но в противоположном направлении.

6.2. АБСОЛЮТНО НЕУПРУГОЕ СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ ТЕЛ

При абсолютно неупругом столкновении после удара частицы слипаются и движутся как единое целое с общей скоростью (рис. 6.2, *б*), при этом часть кинетической энергии переходит в тепло. До удара частицы двигались со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ так, как показано на рис. 6.2, *а*.



а

б

Рис. 6.2

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на ось x и закон сохранения энергии:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u\,, \tag{6.13}$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} + Q\,, \tag{6.14}$$

где Q – тепло, выделившееся при ударе.

Выразим скорость частиц после удара из (6.13):

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\,,$$

подставим в (6.14) и найдем выделившееся при ударе тепло

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\left(v_1 - v_2\right)^2. \tag{6.15}$$

Если первоначально второе тело покоилось ($\vec{v}_2 = 0$), то (6.15) можно переписать в виде

$$Q = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \frac{m_1 v_1^2}{2} . \qquad (6.16)$$

Рассмотрим случай, когда $m_2 >> m_1$, тогда (6.16) примет вид

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = Q ,$$

т. е. практически вся кинетическая энергия движущегося тела переходит в тепло. На практике этот вариант удара реализуется в кузнице: когда молот ударяет по наковальне, вся кинетическая энергия молота переходит в тепло.

Противоположный вариант, когда $m_1 >> m_2$ реализуется в системе молоток–гвоздь. В этом случае

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = v_1$$

и, следовательно, $Q = 0$. Таким образом, вся кинетическая энергия тела до удара затрачивается на движение двух тел после удара (молотка и гвоздя).

7. ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

До сих пор мы рассматривали движение тел, пренебрегая их размерами, т. е. изучали кинематику и динамику материальных точек. Теперь приступим к рассмотрению движения твердых тел.

Дадим определение ***твердого тела***: тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется в процессе движения.

Любое движение твердого тела можно рассматривать как сумму поступательного и вращательного движений. ***Поступательное движение*** – это движение, при котором любая прямая, проведенная через две произвольные точки твердого тела, перемещается параллельно самой себе (рис. 7.1).

Рис. 7.1

При поступательном движении все точки твердого тела совершают одинаковые перемещения, имеют одинаковые скорости и ускорения.

7.1. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращательным движением называется движение, при котором все точки тела движутся по окружностям различных радиусов, при этом центры окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис. 7.2).

Пусть при вращении твердого тела одна из его точек повернулась из положения 1 в положение 2 на угол $\Delta\varphi$ по часовой стрелке (рис. 7.3).

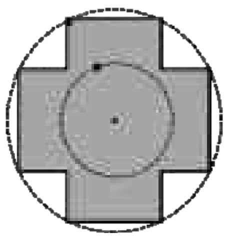


Рис. 7.2

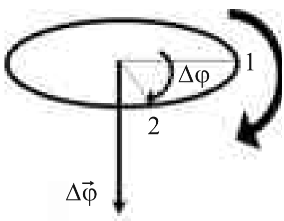


Рис. 7.3

Чтобы описывать вращательное движение, нужно ввести вектор, аналогичный вектору перемещения в поступательном движении. Этот вектор называется ***углом поворота***. Угол поворота – это псевдовектор, т. е. вектор, о направлении которого договариваются. Условились называть вектором угла поворота вектор, длина которого равна модулю угла поворота, а направление – определяется правилом правого винта. Вектор угла поворота всегда направлен по оси вращения.

Удобно применять правило правого винта, пользуясь согнутой правой рукой: нужно направить четыре согнутых пальца правой руки по направлению вращения по наименьшему углу, тогда отставленный большой палец правой руки покажет направление вектора.

При вращении по часовой стрелке, показанном на рис. 7.3, вектор угла поворота направлен вниз. Если вращение происходит против часовой стрелки, то вектор угла поворота направлен вверх (рис. 7.4).

Угловая скорость вращения – это аналог линейной скорости при поступательном движении. Угловая скорость – тоже псевдовектор, который договорились направлять так же, как и вектор угла поворота. Таким образом, направление вектора угловой скорости также определяется правилом правого винта. Модуль вектора угловой скорости – это производная угла поворота по времени

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7.1)$$

Измеряется угловая скорость в радианах, поделенных на секунду (рад/с).

Если вращение происходит с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$, то можно ввести понятие периода вращения. ***Период вращения*** – время, за которое материальная точка совершает полный оборот, т. е. поворачивается на угол $\Delta\varphi = 2\pi$:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (7.2)$$

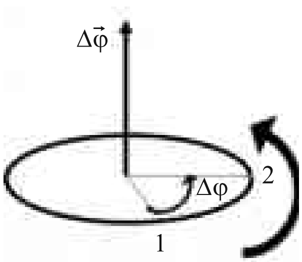


Рис. 7.4

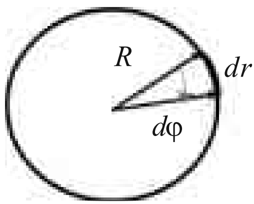


Рис. 7.5

Найдем связь между линейной и угловой скоростями. Согласно (2.3) линейная скорость $v = \frac{dr}{dt}$. При движении по окружности вектор бесконечно малого перемещения равен длине дуги окружности dr (рис. 7.5), которая выражается через радиус окружности R и угол $d\varphi$ по известным геометрическим формулам

$$dr = Rd\varphi\,. \tag{7.3}$$

После подстановки (7.3) в (2.3) получим связь между линейной и угловой скоростями:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega\,. \tag{7.4}$$

Угловое ускорение – это аналог линейного ускорения при поступательном движении. Угловое ускорение – тоже псевдовектор, о направлении которого договариваются. Принято считать, что направление углового ускорения совпадает с направлением угловой скорости, если движение равноускоренное $\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$ (рис. 7.6, *а*), и направлено в противоположную сторону, если движение равнозамедленное $\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$ (рис. 7.6, *б*). Очевидно, что угловое ускорение всегда направлено по оси вращения в ту или иную сторону.

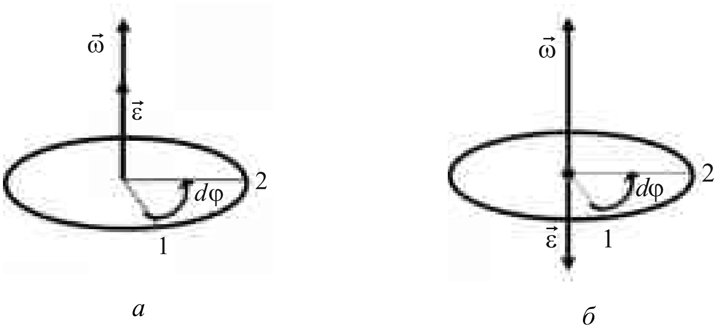


Рис. 7.6:

а – равноускоренное движение; *б* – равнозамедленное движение

Модуль углового ускорения – это производная от угловой скорости, или вторая производная от угла поворота:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,. \tag{7.5}$$

Найдем связь между угловым ускорением и линейным. При движении по окружности удобно раскладывать линейное ускорение на тангенциальную составляющую a_τ, направленную по касательной к окружности, и нормальную составляющую a_n, направленную к центру окружности.

Используя определение тангенциального ускорения $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ и связь между линейной и угловой скоростями $v = \omega R$ (7.4), получим

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon\,. \tag{7.6}$$

Аналогично для нормального ускорения получим

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R\,. \tag{7.7}$$

7.2. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При вращении твердого тела становится важным не просто его масса, а ее распределение, поэтому вводится скалярная величина, называемая ***моментом инерции***, которая служит аналогом массы при поступательном движении. Момент инерции всегда положителен и измеряется в килограммах, умноженных на метр в квадрате (кг · м^2).

Момент инерции материальной точки J массой m, находящейся на расстоянии r от оси вращения, – это скалярная величина

$$J = mr^2\,. \tag{7.8}$$

Момент инерции системы материальных точек – это сумма моментов инерции от всех материальных точек по отдельности:

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\,, \tag{7.9}$$

где сумма идет по всем материальным точкам, m_i – масса материальной точки i; r_i – ее расстояние от оси вращения.

Если масса распределена непрерывно, как в твердом теле, то сумма (7.9) заменяется интегралом

$$J = \int r^2 dm . \qquad (7.10)$$

Момент инерции симметричного тела (кольцо, диск, стержень, шар) легко вычисляется, если ось вращения проходит через его центр масс.

7.2.1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО КОЛЬЦА

Рассмотрим тонкое кольцо радиусом R и массой M. Вычислим его момент инерции относительно оси, проходящей через центр кольца (рис. 7.7)

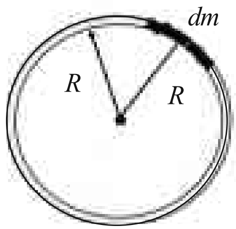


Рис. 7.7

Разобьем кольцо на маленькие кусочки массой dm, каждый из которых находится на расстоянии R от оси вращения. Запишем определение момента инерции (7.10) и заменим расстояние до оси вращения на радиус кольца R:

$$J = \int r^2 dm = \int R^2 dm =$$

$$= R^2 \int dm = MR^2. \qquad (7.11)$$

При вычислении в (7.11) было учтено, что сумма всех масс dm дает массу кольца M:

$$\int dm = M.$$

7.2.2. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО ДИСКА

Вычислим момент инерции тонкого диска массой M и радиусом R. Для того чтобы было удобно вычислять момент инерции какой-то фигуры, ее надо разбивать на простые симметричные фигуры с известным моментом инерции. Тонкий диск удобно разбивать на тонкие колечки радиуса r и толщиной dr, масса каждого колечка dm (рис. 7.8).

Момент инерции всего диска – это сумма моментов инерции тонких колечек:

$$J = \int dJ = \int r^2 dm . \qquad (7.12)$$

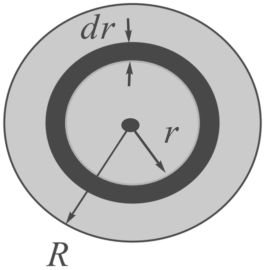


Рис. 7.8

Массы колечек разные, они зависят от расстояния до центра диска. Найдем выражение для массы произвольного колечка. Для вычислений нам понадобится ввести плотность вещества диска ρ и его толщину H. Плотность вещества – это отношение массы тела M к его объему V

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Объем диска – это объем цилиндра с площадью основания R и высотой H

$$V = \pi R^2 H.$$

Откуда

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}. \qquad (7.13)$$

Чтобы найти массу тонкого кольца, необходимо найденную плотность материала ρ (7.13) умножить на объем кольца dV:

$$dm = \rho dV. \qquad (7.14)$$

Объем тонкого кольца – это объем полого цилиндра высотой H и площадью dS:

$$dV = HdS.$$

Чтобы найти площадь тонкого кольца dS, развернем его в прямоугольник, толщина которого равна dr, а длина – длине окружности $2\pi r$ (рис. 7.9):

$$dS = 2\pi r dr. \qquad (7.15)$$

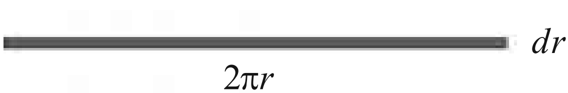


Рис. 7.9

Подставим все в (7.14):

$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr H . \tag{7.16}$$

Подставим в (7.16) плотность материала из (7.13):

$$dm = \frac{M}{\pi R^2 H} 2\pi r dr H = \frac{2Mrdr}{R^2} . \tag{7.17}$$

Наконец, подставим найденную массу тонкого кольца в (7.12) для нахождения момента инерции диска:

$$J = \int r^2 dm = \int \frac{2Mr^3 dr}{R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{2M}{R^2} \frac{r^4}{4} \bigg|_0^R = \frac{2M}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{MR^2}{2} . \tag{7.18}$$

При вычислениях в (7.18) учтено, что радиусы тонких колечек могут меняться от нуля до R .

7.2.3. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТОНКОГО СТЕРЖНЯ

Вычислим момент инерции тонкого стержня длиной L и массой M относительно оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему (рис. 7.10).

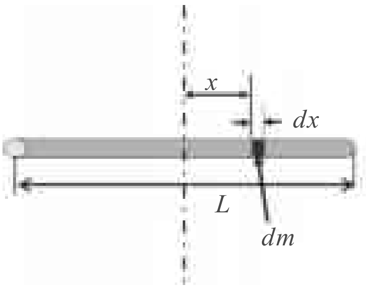


Рис. 7.10

Разобьем стержень на элементы массой dm, расположенные на расстоянии x от оси вращения. Толщина каждого элемента dx.

Момент инерции стержня – сумма моментов инерции этих маленьких кусочков

$$J = \int x^2 dm . \tag{7.19}$$

Введем линейную плотность стержня ρ (линейная плотность измеряется в килограммах на метр – кг/м)

$$\rho = \frac{M}{L} . \tag{7.20}$$

Тогда масса кусочка стержня длиной dx

$$dm = \rho dx . \tag{7.21}$$

Подставив (7.20) и (7.21) в (7.19), получим

$$J = \int \rho x^2 dx = \frac{M}{L} 2 \int_0^{L/2} x^2 dx = 2\frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{L/2} = 2\frac{M}{L}\frac{\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3} = \frac{ML^2}{12} . \tag{7.22}$$

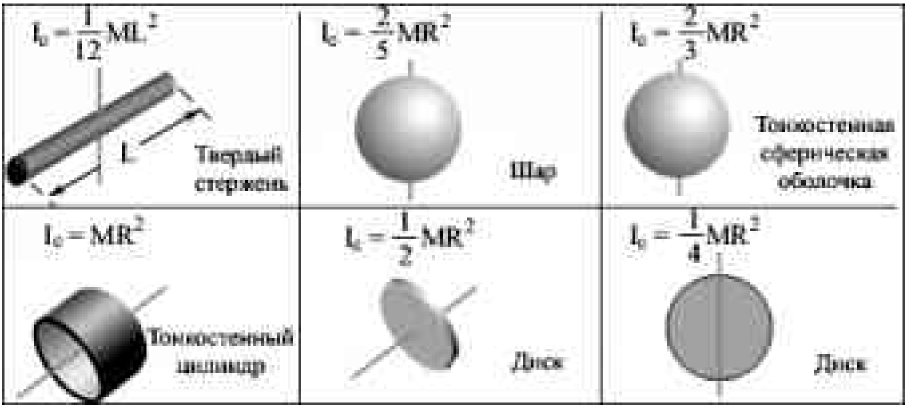


Рис. 7.11

При вычислениях в (7.22) из-за симметрии выбраны пределы изменения расстояния от оси вращения от нуля до $\frac{L}{2}$, при этом взят удвоенный интеграл. Результаты вычислений не изменятся, если брать пределы интегрирования от $\left(-\frac{L}{2}\right)$ до $\left(+\frac{L}{2}\right)$:

$$J = \int \rho x^2 dx = \frac{M}{L}\int\limits_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{3L}\left(\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right) = \frac{ML^2}{12}.$$

На рис. 7.11 представлены моменты инерции некоторых простейших фигур.

7.2.4. ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА

Теорему Штейнера иногда называют теоремой параллельных осей. С ее помощью по известному моменту инерции относительно оси, проходящей через центр масс, можно найти момент инерции относительно любой другой параллельной оси.

Пусть для некоторой фигуры массой M (рис. 7.12) известен момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс J_C. Надо найти момент инерции J_A относительно оси, проходящей через точку A. Ось, проходящая через точку A, параллельна оси, проходящей через центр масс, а расстояние между осями a.

Теорема Штейнера: момент инерции тела относительно оси, расположенной на расстоянии a от оси, проходящей через центр масс, равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс J_C, и произведению массы M тела на квадрат расстояния между осями a^2:

$$J_A = J_C + Ma^2. \tag{7.23}$$

Необходимо еще раз отметить, что теорему Штейнера можно применять при одновременном выполнении двух условий: одна из осей должна проходить через центр масс, обе оси должны быть параллельны.

Рассмотрим, как применяется теорема Штейнера на практике, на примере тонкого стержня. Найдем момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через край стержня параллельно ему (рис. 7.13). Длина стержня L, масса M.

По теореме Штейнера $J_A = J_C + Ma^2$.

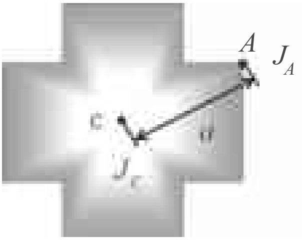


Рис. 7.12

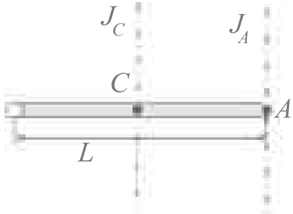


Рис. 7.13

Для стержня момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс

$$J_C = \frac{ML^2}{12}.$$

Расстояние между осями $a = \frac{L}{2}$.

Тогда

$$J_A = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}.$$

7.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг некоторой оси. Разобьем это тело на маленькие кусочки с массами m_i, находящееся на расстоянии r_i от оси вращения (рис. 7.14).

По определению вращательного движения центры окружностей, по которым вращаются маленькие кусочки тела, лежат на одной прямой – оси вращения. Угловая скорость вращения ω у всех кусочков одинакова, а линейная различна:

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \ldots \qquad (7.24)$$

Кинетическая энергия вращающегося тела складывается из кинетических энергий отдельных кусочков:

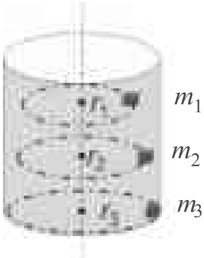


Рис. 7.14

$$T_{вр} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \ldots = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}. \qquad (7.25)$$

Заменим линейную скорость на произведение угловой скорости ω и расстояния до оси вращения r_i

$$v_i = \omega r_i \qquad (7.26)$$

и подставим в (7.25):

$$T_{вр} = \sum_i \frac{m_i r_i^2}{2}\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (7.27)$$

В (7.27) учтено, что $\sum_i m_i r_i^2 = J$ – момент инерции твердого тела.

Таким образом, кинетическая энергия вращения пропорциональна моменту инерции тела J и квадрату угловой скорости ω^2, ее вид аналогичен виду кинетической энергии при поступательном движении (момент инерции – масса, угловая скорость – линейная скорость).

В общем случае плоского движения тела его движение можно разложить на поступательное движение со скоростью движения центра масс и вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс:

$$T = \frac{mV_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}. \qquad (7.28)$$

В качестве примера рассмотрим кинетическую энергию катящегося цилиндра массой m и радиусом R, центр масс цилиндра движется со скоростью v_C (рис. 7.15).

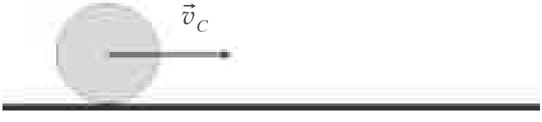


Рис. 7.15

Согласно (7.28) кинетическая энергия тела

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2},$$

где $J_C = \dfrac{mR^2}{2}$ – момент инерции сплошного цилиндра; $\omega = \dfrac{v_C}{R}$ – угловая скорость вращения вокруг оси цилиндра.

Тогда

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\frac{v_C^2}{R^2} = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{mv_C^2}{4} = \frac{3mv_C^2}{4}.$$

8. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН ЕГО СОХРАНЕНИЯ

8.1. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Пусть материальная точка массой m движется со скоростью $\vec{v}$ относительно неподвижной точки O (рис. 8.1).

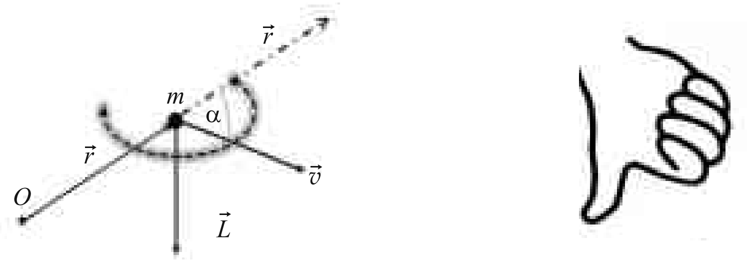


Рис. 8.1

Проведем радиус-вектор $\vec{r}$ из точки O к тому месту, где находится в данный момент времени материальная точка массой m. ***Моментом импульса материальной точки массой*** m ***относительно точки*** O называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на импульс материальной точки $\vec{p} = m\vec{v}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \tag{8.1}$$

Модуль момента импульса

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{p}\right| \cdot \sin\alpha, \tag{8.2}$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{v}$. Единица измерения момента импульса

$$[L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{c}.$$

Направление вектора момента импульса определяется уже известным правилом правого винта: нужно перенести векторы так, чтобы их начала находились в одной точке, и вращать правый винт от первого сомножителя ко второму по наименьшему углу, тогда направление перемещения острия правого винта и будет направлением векторного произведения. Можно вместо правого винта вращать правую руку, сложив четыре согнутых пальца по дуге, показывающей направления вращения, тогда отставленный большой палец покажет направление векторного произведения. На рис. 8.1 момент импульса $\vec{L}$ направлен вниз.

Моментом импульса материальной точки относительно оси z называется *скалярная величина*, равная проекции на эту ось момента импульса, определенного относительно произвольной точки O на оси (рис. 8.2).

Если у нас не одна материальная точка, а несколько, то момент импульса системы материальных точек – это векторная сумма моментов импульса всех точек, входящих в систему,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]. \tag{8.3}$$

Рассмотрим движение материальной точки по окружности, при котором радиус-вектор $\vec{r}$ всегда перпендикулярен скорости $\vec{v}$. Момент импульса $\vec{L}$ направлен перпендикулярно обоим векторам за плоскость чертежа (рис. 8.3):

$$\left|\vec{L}\right| = L_z = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{p}\right| \cdot \sin\alpha = mvr. \tag{8.4}$$

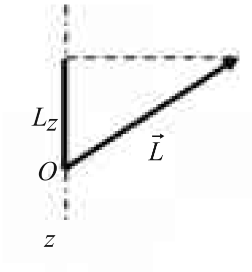


Рис. 8.2

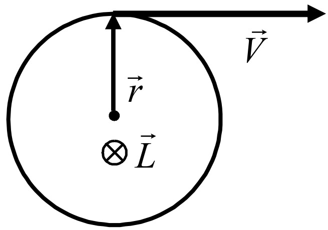


Рис. 8.3

Моментом импульса твердого тела относительно оси z называется сумма моментов импульса всех его материальных точек относительно оси z:

$$L_z = \sum_i m_i v_i r_i \ , \tag{8.5}$$

где $m_i v_i r_i$ – момент импульса материальной точки i. Линейную скорость движения материальной точки i можно заменить

$$v_i = \omega \cdot r_i \ , \tag{8.6}$$

подставляя (8.6) в (8.5), получим

$$L_z = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega J_z \ . \tag{8.7}$$

При подстановке было учтено, что угловая скорость вращения ω всех точек твердого тела одинакова и что $\sum_i m_i r_i^2 = J_z$ – момент инерции твердого тела относительно оси вращения z.

8.2. МОМЕНТ СИЛЫ

Для описания вращения необходимо ввести понятие момента силы – аналога силы при описании поступательного движения. Пусть на некоторую материальную точку действует сила $\vec{F}$ (рис. 8.4). ***Моментом силы*** $\vec{M}$ ***относительно точки*** O называется векторное произведение радиуса-вектора $\vec{r}$ на силу $\vec{F}$, действующую на материальную точку,

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \ \left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \left|\vec{F}\right| \cdot \sin\alpha . \quad (8.8)$$

Радиус-вектор $\vec{r}$ проводится от точки O к точке приложения силы. Направление момента силы определяется правилом правого винта.

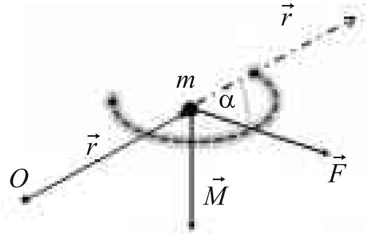


Рис. 8.4

Момент силы относительно оси определяется аналогично моменту импульса относительно оси – это *скалярная величина*, равная проекции на эту ось момента силы, определенного относительно произвольной точки O на оси. Величина момента силы относительно оси не зависит от выбора положения точки на оси.

8.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Возьмем производную по времени от левой и правой частей уравнения (8.1)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times \vec{p}];$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{v} \times \vec{p}] + [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (8.9)$$

В (8.9) учтено, что $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. Первое слагаемое в (8.9) равно нулю, поскольку векторы скорости и импульса сонаправлены, а второе слагаемое, согласно (8.8), – момент силы $[\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) называется ***основным уравнением динамики вращательного движения***. Справедливо и уравнение относительно моментов импульса и силы относительно оси z

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \,. \tag{8.11}$$

Подставив в (8.11) уравнение (8.7), получим

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d\left(\omega J_z\right)}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon \,, \tag{8.12}$$

где J_z – момент инерции твердого тела относительно оси z; $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение тела. Уравнение (8.12) – это другая запись основного уравнения динамики вращательного движения.

Если система замкнута (на нее не действуют внешние силы), то $\vec{M} = 0$, и выполняется ***закон сохранения импульса*:**

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \,, \; \vec{L} = \text{const} \,. \tag{8.13}$$

Момент импульса может сохраняться и в незамкнутой системе в том случае, если векторная сумма моментов сил равна нулю.

В частном случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси закон сохранения момента импульса можно записать как

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2 \,, \tag{8.14}$$

где J_1, J_2 – моменты инерции твердого тела в начальном и конечном состояниях; ω_1, ω_2 – соответствующие угловые скорости вращения.

Закон сохранения момента импульса – это фундаментальный закон природы, который следует из изотропности пространства. Изотропность пространства проявляется в том, что физические свойства и законы движения замкнутой системы не изменяются при ее повороте в пространстве на любой угол. Изотропность пространства означает, что результаты эксперимента не зависят от ориентации экспериментальной установки в пространстве.

8.4. ПРИМЕРЫ ДЕЙСТВИЯ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Рассмотрим вращение человека, стоящего на скамье Жуковского с гантелями в руках (рис. 8.5). Скамья Жуковского – это горизонтальная платформа, которая может вращаться практически без трения вокруг своей оси.

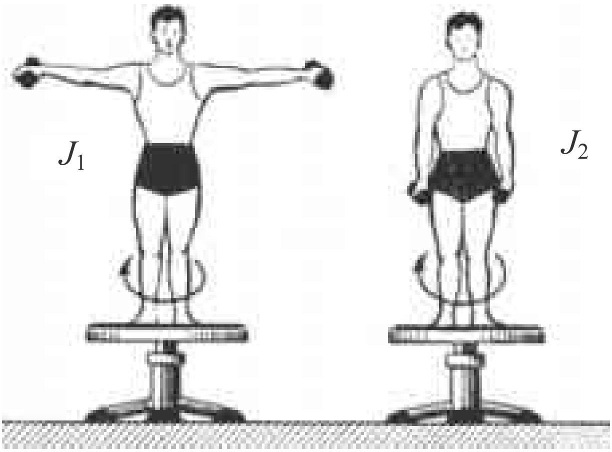


Рис. 8.5

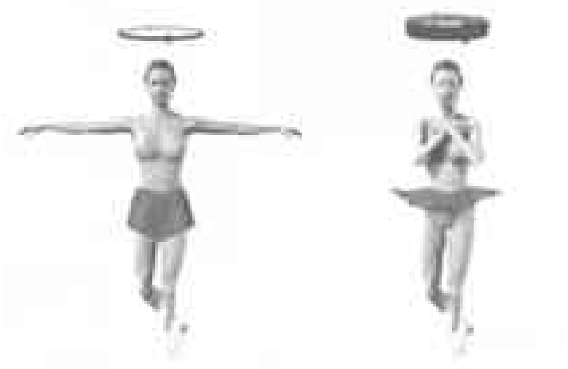


Рис. 8.6

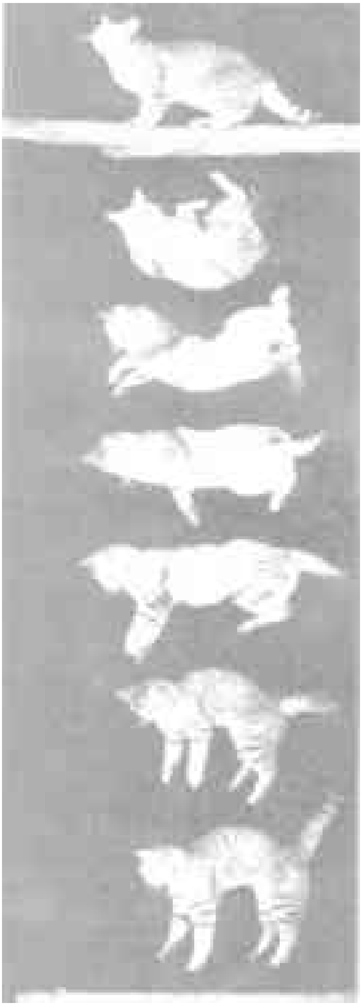


Рис. 8.7

Пусть в начальном положении человек стоит на скамье Жуковского с поднятыми руками, скамья вращается с угловой скоростью ω_1, момент инерции человека вместе со скамьей – J_1. Если человек опустит руки с гантелями, его момент инерции уменьшится и станет равным J_2 ($J_2 < J_1$). Угловая скорость вращения скамьи возрастет согласно закону сохранения момента импульса (8.14).

Аналогичная ситуация происходит при вращении фигуристки: когда спортсменка прижимает руки к телу, она уменьшает свой момент инерции и начинает вращаться быстрее; чтобы затормозить, – она распрямляет руки, увеличивая свой момент инерции (рис. 8.6).

Закон сохранения момента импульса объясняет, почему кошка всегда приземляется на четыре лапы. На фотографии показаны (рис. 8.7) этапы падения кошки с высоты. Пусть кошка нечаянно сорвалась с ветки дерева. Чтобы правильно упасть, ей надо проделать несколько движений. Сначала она изгибается так, чтобы создать две различные оси вращения для передней и задней частей туловища, затем поджимает передние лапы, уменьшая момент инерции передней части туловища. В таком положении передняя часть туловища кошки начинает вращаться быстрее, чем задняя. На следующем этапе кошка расправляет передние лапы и поджимает задние, заставляя вращаться быстрее заднюю часть туловища. После таких манипуляций все четыре лапы кошки оказываются под туловищем и ей остается только распрямить задние лапы и правильно приземлиться на все четыре лапы.

8.5. ГИРОСКОПЫ

В общем случае, если тело привести во вращение, а потом предоставить самому себе, то положение оси вращения изменяется, при этом векторы угловой скорости и момента импульса не совпадают. Однако есть теорема, утверждающая, что любое тело имеет три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр масс, при вращении вокруг которых положение оси вращения не меняется. Эти оси называются ***главными осями***.

Гироскопом, или волчком, называется массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии, являющейся его главной осью. На рис. 8.8 изображен волчок (гироскоп), вращающийся с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси симметрии. Угловая скорость ω и момент импульса гироскопа $L = J\omega$ направлены вертикально вверх вдоль оси симметрии.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на гироскоп, равен нулю (момент силы тяжести равен нулю), то его момент импульса не меняется, а значит, ***ось вращения гироскопа не меняет своего положения***.

Если к вращающемуся гироскопу приложить кратковременный момент сил, вызывающий временное несовпадение оси вращения и оси инерции, то ось вращения гироскопа вернется в первоначальное положение – одно из замечательных свойств гироскопа.

Если ось вращения гироскопа отклонена от вертикали, то под действием постоянного момента сил ось гироскопа описывает конус вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω. Движение оси гироскопа под действием момента внешних сил называется ***прецессией*** (рис. 8.9).

На гироскоп действует момент силы тяжести

$$\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{g}], \tag{8.15}$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O к центру масс C (сила тяжести приложена к центру масс). Направление момента сил показано на рис. 8.9. Под действием момента сил момент импульса гироскопа изменится $\left(d\vec{L} = \vec{M}dt\right)$ и вектор приращения момента импульса будет направлен туда, куда и момент силы. Момент импульса гироскопа $\vec{L}$, обусловленный вращением вокруг его оси симметрии, направлен по оси симметрии гироскопа (рис. 8.9). Видно, что $d\vec{L} \perp \vec{L}$, и под действием момента сил ось гироскопа поворачивается. Угловую скорость прецессии Ω можно выразить через угол поворота гироскопа $d\varphi$ за время dt:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (8.16)$$

Рис. 8.8

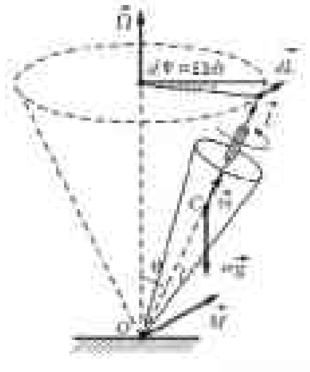


Рис. 8.9

При малых углах поворота

$$d\varphi = \frac{dL}{L} = \frac{Mdt}{J\omega}. \qquad (8.17)$$

Тогда скорость прецессии

$$\Omega = \frac{M}{J\omega}. \qquad (8.18)$$

Таким образом, скорость прецессии Ω обратно пропорциональна скорости вращения гироскопа вокруг его оси симметрии ω.
Более общим законом прецессии является уравнение

$$\vec{M} = \left[\vec{\Omega} \times \vec{L}\right]. \qquad (8.19)$$

Таким образом, момент силы определяет угловую скорость прецессии. Говорят, что прецессия не имеет инерции, при устранении момента сил мгновенно исчезает прецессия.

В более сложных конструкциях гироскопов, например в гироскопах на кардановом подвесе (рис. 8.10), вращение может происходить вокруг трех взаимно перпендикулярных осей: *AA*, *BB*, *DD*. Гироскоп закреплен на оси *AA*, которая может вращаться вокруг оси *BB*, а та в свою очередь может вращаться вокруг оси *DD*. Все оси пересекаются в центре масс гироскопа *C*.

Гироскопический эффект лежит в основе конструкций разных приборов: гирокомпаса, «искусственного горизонта» в самолетах, гироскопического успокоителя качки корабля, гироскопического стабилизатора положения ракеты и др.

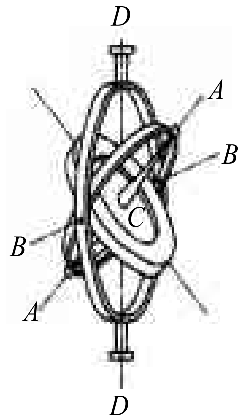


Рис. 8.10

8.6. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ ПРИ ВРАЩЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. При вращении твердого тела работа затрачивается на изменение его кинетической энергии

$$dA = dT_{\text{вр}} . \tag{8.20}$$

Кинетическая энергия твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси z

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_z \omega^2}{2} .$$

Тогда

$$dT_{\text{вр}} = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = \frac{J_z d(\omega^2)}{2} = \frac{2J_z \omega d\omega}{2} = J_z \omega d\omega . \tag{8.21}$$

С другой стороны, согласно основному уравнению динамики вращательного движения (8.12),

$$M_z dt = J_z d\omega . \quad (8.22)$$

С учетом (8.22) и (8.20) запишем работу

$$dA = M_z \omega dt = M_z d\varphi . \quad (8.23)$$

В (8.23) учтено, что угловая скорость вращения $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Полная работа вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi , \quad (8.24)$$

где φ – это угол, на который поворачивается тело.

8.7. ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЯ ВЕЛИЧИН ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЙ

При рассмотрении вращательного движения можно сделать вывод, что все формулы похожи на соответствующие формулы поступательного движения. Так, массе тела при поступательном движении соответствует момент инерции при вращательном, учитывающий распределение массы тела. Или вектору перемещения при поступательном движении соответствует вектор угла поворота при вращательном. Составим таблицу, в которой сопоставлены основные величины для поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Перемещение	$\vec{r}$	Угол поворота	$\vec{\varphi}$
Скорость	$\vec{v}$	Угловая скорость	$\vec{\omega}$
Ускорение	$\vec{a}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon}$
Импульс	$\vec{P} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
Сила	$\vec{F} = m\vec{a}$	Момент силы	$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$

Пользуясь составленной таблицей, легко по аналогии с поступательным движением записать любую формулу для вращательного движения. Например, для кинетической энергии

$$T = \frac{mv^2}{2} \Leftrightarrow T = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Или для угла поворота при равноускоренном вращательном движении точки

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \Leftrightarrow \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

9. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

В конце XIX века появились экспериментальные факты, противоречащие законам классической механики. На основе накопленных экспериментальных данных Дж. Максвелл написал уравнения, объединяющие электричество, магнетизм и световые волны. Из этих уравнений следовало, что скорость электромагнитной волны в вакууме – скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую, что противоречит закону сложения скоростей в классической механике.

В 1904 году Г. Лоренц специально для уравнений Максвелла вывел формулы пересчета координат из одной системы отсчета в другую. Но эти преобразования содержали также чуждое для классической механики понятие: нужно было пересчитывать и время. Напомним, что одним из утверждений классической механики является постулат о независимости течения времени от системы координат. Кроме того, при скоростях больше скорости света в вакууме преобразования Лоренца теряли физический смысл.

В 1905 году А. Эйнштейн сформулировал постулаты теории относительности. Говорят, что идея пришла ему в голову, когда он ехал в трамвае по улицам Берна (Швейцария) и посмотрел на уличные часы. Он подумал, что если бы трамвай ехал со скоростью света, то в его восприятии часы остановились бы, т. е. различные наблюдатели по-разному воспринимают расстояние и время.

Теория относительности состоит из двух частей – Специальной теории относительности (СТО), которая рассматривает механику движения тел в пустом пространстве-времени, и Общей теории относительности (ОТО), которая изучает явления гравитации и искривление пространства-времени телами, обладающими массой.

Современный мир нельзя представить без учета следствий теории относительности. Спутники GPS летают на высоте порядка 20 тыс. км со скоростью около 4 км/с. Согласно ОТО, часы на них спешат примерно на 45 мкс в день, а вследствие СТО из-за скорости те же часы ежедневно отстают примерно на 7 мкс в день. Эти поправки учитываются перед отправкой на орбиту спутников, атомные часы на них корректируют так, чтобы они шли медленнее на 38 мкс в день.

9.1. ПОСТУЛАТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В основе теории относительности лежат два постулата:

- все законы физики имеют одинаковую форму во всех инерциальных системах отсчета;
- скорость света в вакууме не зависит от скорости источника света и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Первый принцип похож на принцип относительности Галилея, утверждающий, что все законы механики инвариантны во всех инерциальных системах отсчета. Принцип относительности Эйнштейна обобщает принцип относительности Галилея на все физические явления и законы. Однако второй принцип вносит принципиально новый подход. Во-первых, из всех возможных скоростей выделяется одна; во-вторых, вводится некоторое предельное значение возможных скоростей. Специальная теория относительности ввела новый взгляд на понятия пространства и времени, понятия абсолютного пространства и абсолютного времени потеряли смысл, вместо них введено новое понятие пространство-время, в котором пространство и время невозможно отделить друг от друга.

9.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

Будем искать новые преобразования координат и времени по следующим принципам:

1) между координатой и временем должна быть линейная связь;

2) при малых скоростях они должны переходить в преобразования Галилея;

3) должно учитываться существование максимальной скорости света.

Рассмотрим две системы отсчета: $K(x, y, z, t)$ и $K'(x', y', z', t')$. Система отсчета K' движется относительно K в направлении оси x (рис. 9.1).

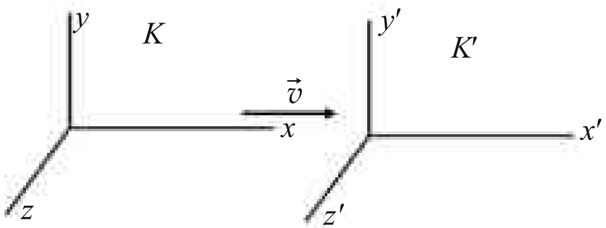


Рис. 9.1

В начальный момент времени начала систем отсчета совпадают, и в этот момент времени посылают световой сигнал вдоль оси x. За время t сигнал пройдет в системе отсчета K расстояние $x = ct$, а за соответствующее время t' в системе отсчета K' – расстояние $x' = ct'$.

Будем искать преобразование Лоренца в следующем виде:

$$x = (x' + vt')\gamma \text{ и } x' = (x - vt)\gamma . \tag{9.1}$$

Подставив $x = ct$ и $x' = ct'$ в (9.1), получим

$$ct = (ct' + vt')\gamma ;$$

$$ct' = (ct - vt)\gamma .$$

Перемножив левые и правые части этих уравнений, получим

$$ctct' = tt'(c + v)(c - v)\gamma^2$$

или

$$c^2 = (c^2 - v^2)\gamma^2 .$$

Откуда выразим γ:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,. \tag{9.2}$$

Подставляя найденный коэффициент в преобразования Галилея (1.16), получим преобразования Лоренца:

- для прямого перехода из $K \Rightarrow K'$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \dfrac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; \end{cases} \tag{9.3}$$

- для обратного перехода из $K' \Rightarrow K$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{cases} \tag{9.4}$$

Уравнения (9.3) и (9.4) называются преобразованиями Лоренца и устанавливают связь между пространственно-временны́ми координатами в двух системах отсчета.

Из анализа преобразований Лоренца можно сделать следующие выводы:

1) время течет по-разному в различных системах отсчета;

2) пространственную координату нельзя отделять от временнóй, они взаимосвязаны в единое пространство-время, поэтому для указаний координат точки нужно задавать три пространственные координаты и одну временную;

3) прямые преобразования из $K \Rightarrow K'$ и обратные из $K' \Rightarrow K$ симметричны и отличаются только знаком;

4) координаты, перпендикулярные направлению движения, не меняются при переходе из одной системы отсчета в другую;

5) преобразования теряют физический смысл, если скорость движения больше скорости света: $v > c$ (подкоренное выражение становится отрицательным);

6) при малых скоростях $v \ll c$ преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея.

Докажем последнее утверждение. Действительно, при $v \ll c$

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=1, \quad \frac{vx}{c^2}=0\,. \tag{9.5}$$

После подстановки (9.5) в (9.3) и (9.4) получим хорошо известные преобразования Галилея (1.16).

9.3. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА: ОДНОВРЕМЕННОСТЬ СОБЫТИЙ.

Пусть в системе отсчета K в точках A и B с координатами $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$ *одновременно* происходят два события: $t_1 = t_2$. Найдем промежуток времени между этими событиями $(t_1' - t_2')$ в системе отсчета K'. Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца

$$t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{vx_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (9.6)$$

Если события одновременны в системе отсчета K $(t_1 = t_2)$, то формула (9.6) перепишется так:

$$t_2' - t_1' = -\frac{\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (9.7)$$

Таким образом, при движении тел с большими скоростями, если два события одновременны в одной системе отсчета, то они совсем *не обязательно одновременны в другой.* Более того, последовательность событий зависит от направления движения системы отсчета K' относительно K.

Чтобы два события были одновременны и в системе отсчета K, и в системе отсчета K', они должны быть одноместны $(x_2 = x_1)$ в системе отсчета K.

Значит, если два события происходят одновременно в системе отсчета K и не связаны причинно-следственной связью, то найдутся такие системы отсчета, где сначала произойдет первое событие, а затем второе, и также найдутся такие системы отсчета, где сначала произойдет второе событие, а затем – первое.

9.4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА: ОДНОМЕСТНОСТЬ СОБЫТИЙ

Пусть в системе отсчета K в точках A и B с координатами $A(x_1, y_1, z_1, t_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2, t_2)$ *в одном месте* происходят два события: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Найдем расстояние между этими событиями $(x_1' - x_2')$ в системе отсчета K'. Для этого воспользуемся преобразованиями Лоренца

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_2' = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ,$$

$$x_2' - x_1' = \frac{(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{9.8}$$

Если события одноместны в системе отсчета K – $x_1 = x_2$, то формула (9.8) перепишется так:

$$x_2' - x_1' = -\frac{v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad . \tag{9.9}$$

Таким образом, при движении тел с большими скоростями, если два события находятся в одном месте в одной системе отсчета, то они могут *не быть одноместными в другой.* Более того, расположение событий зависит от направления движения системы отсчета K' относительно K .

Чтобы два события были одноместны и в системе отсчета K, и в системе отсчета K', они должны быть еще и одновременны $(t_2 = t_1)$ в системе отсчета K .

9.5. ДЛИТЕЛЬНОСТЬ СОБЫТИЙ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Пусть в системе отсчета K в точке $A(x, y, z)$ происходит событие длительностью Δt . Найдем длительность этого события в движущейся системе отсчета K' .

Длительность события в системе отсчета K – это разница между временами начала (t_1) и окончания (t_2) события:

$$\Delta t = t_2 - t_1 ;$$

соответственно длительность события в системе отсчета K'

$$\Delta t' = t_2' - t_1' .$$

Времена начала t_1' и окончания t_2' события в системе отсчета K' найдем с помощью преобразований Лоренца

$$t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.10}$$

Длительность события в системе отсчета K'

$$\Delta t' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.11}$$

Будем называть время в той системе отсчета, где тело покоится, ***собственным временем*** и обозначим его $\Delta t = t_2 - t_1 = t_0$. Тогда (9.11) перепишется в виде

$$\Delta t' = \frac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.12}$$

Мы видим, что *длительность события максимальна в той системе отсчета, где тело покоится*. Эффект увеличения длительности события в движущихся системах отсчета называется ***Лоренцевым замедлением времени***, т. е. движущиеся часы идут медленнее неподвижных. Необходимо отметить, что заметные эффекты замедления времени обнаруживаются только при достаточно больших скоростях.

Рассмотрим ход часов в неподвижной и движущейся системах отсчета. Поставим два зеркала параллельно друг другу на расстоянии L и пустим между ними световой луч. Единицей времени будем считать промежуток времени между последовательными возвращениями светового луча на нижнее зеркало (рис. 9.2), при каждом возвращении луча на нижнее зеркало часы будут подавать сигнал.

Промежуток времени между последовательными сигналами T_0 в системе отсчета K', связанной с часами,

$$T_0 = 2t_0 = \frac{2L}{c}.$$

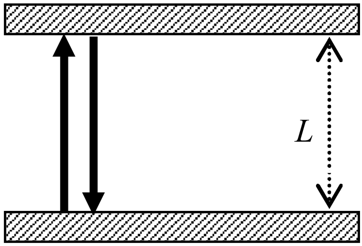


Рис. 9.2

Теперь поместим идентичные часы в движущуюся систему отсчета K' (движение происходит в направлении, параллельном зеркалам, со скоростью v) и будем наблюдать за ними из неподвижной системы отсчета K. Относительно неподвижного наблюдателя луч света теперь будет двигаться зигзагообразно (рис. 9.3).

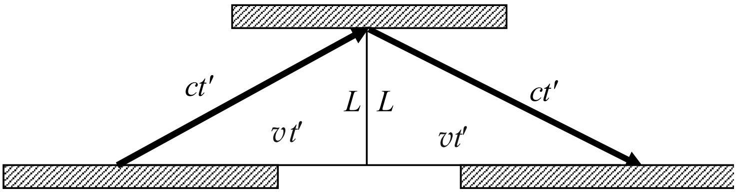


Рис. 9.3

Скорость света c не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую, промежуток времени между соседними сигналами будет $T' = 2t'$, где t' – время движения света от одного зеркала до другого для неподвижного наблюдателя. Его можно вычислить из теоремы Пифагора

$$(ct')^2 = (vt')^2 + L^2 .$$

Откуда

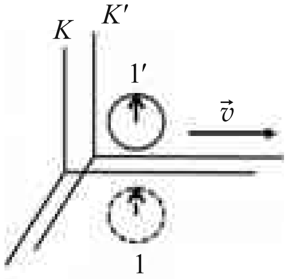
$$t'^2(c^2 - v^2) = L^2 ,$$

$$t' = \frac{L}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \qquad (9.13)$$

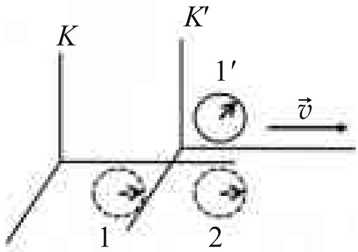
Мы видим, что выражения (9.13) и (9.12) совпадают. С точки зрения неподвижного наблюдателя свету понадобится больший промежуток времени, чтобы пройти расстояние между зеркалами, и это время тем больше (сильнее замедление), чем больше скорость движения системы отсчета v.

На эффекте замедления времени основан ***парадокс близнецов***.

Пусть имеются две инерциальные системы отсчета K и K', причем последняя движется относительно неподвижной системы отсчета K. Относительно неподвижного наблюдателя в системе отсчета K отстают часы в движущейся системе отсчета K'. Для наблюдателя в движущейся системе отсчета K' его часы неподвижны, а отстают часы в системе отсчета K. Так какие же часы отстают? Чтобы ответить на этот вопрос, надо сравнить часы в системе отсчета K' с часами в системе отсчета K. Для этого их надо сначала синхронизировать, обязательно поместив в одну точку пространства рис. (9.4, *а*).



а



б

Рис. 9.4

Когда в очередной раз мы решим сравнить время в двух системах отсчета, мы опять должны поместить часы в одно место. Но в системе отсчета K это уже будут другие часы (рис. 9.4, *б*)! Поэтому процесс сравнения времени в двух системах отсчета будет несимметричным и всегда будут отставать те часы, которые сравниваются не с исходными часами.

Рассмотрим теперь случай, когда движущиеся часы описывают замкнутую траекторию, возвращаясь к исходным. Обычно говорят о двух братьях-близнецах, один из которых остался на Земле, а другой улетел на ракете. Для близнеца, оставшегося на Земле, с его точки зрения, время течет быстрее, чем для его брата в ракете. И когда близнецы встретятся, один из них останется молодым, а другой будет стариком. С точки зрения близнеца, движущегося в ракете, относительно которой он покоится, его часы будут идти быстрее, и, вернувшись на Землю, он будет стариком, а его земной брат останется молодым. В такой трактовке парадокса близнецов нельзя сравнивать инерциальную систему отсчета (Земля) и неинерциальную систему отсчета (ракета). Для того чтобы вернуться, ракета должна изменить направление своего движения на противоположное, т. е. она перестает быть инерциальной системой отсчета. Согласно принципу относительности, законы физики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, и в нашем случае его применять нельзя.

Примером замедления времени при движении с большими скоростями служат π^+-мезоны (пионы) – нестабильные частицы с массой равной 273 массам электрона ($m_{\pi^+} = 273 m_e$). Пионы рождаются в верхних слоях атмосферы, движутся со скоростью $v = 0{,}99995c$ (c – скорость света) и через время жизни $\tau_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,c$ распадаются на μ^+-мезон (мюон) с массой $m_{\mu^+} = 215 m_e$ и нейтрино. С «его точки зрения» пион пройдет до распада расстояние

$$\ell_0 = v\tau_0 = 0{,}99995 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-8} = 7{,}5 \text{ м}.$$

Однако пионы регистрируют гораздо ближе к Земле. В чем причина кажущегося противоречия? Причина заключается в разном течении времени в системе отсчета пиона и наблюдателя на Земле. Время жизни пиона τ_0 – это собственное время, в любой другой движущейся относительно него системе отсчета, в частности на Земле, время жизни τ' будет бо́льшим (замедление времени):

$$\tau' = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - \frac{0{,}99995^2 c^2}{c^2}}} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,c.$$

Тогда с точки зрения наблюдателя на Земле пион до распада пройдет расстояние

$$\ell' = V\tau' = 0{,}99995 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6} = 750 \text{ м}.$$

9.6. ДЛИНА ТЕЛ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

Пусть в системе отсчета K' стержень покоится и расположен вдоль оси x'. Система отсчета K' движется относительно системы отсчета K в направлении оси x со скоростью v (рис. 9.5)

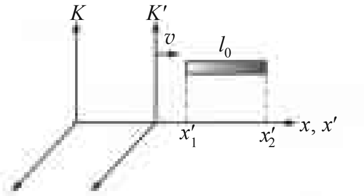


Рис. 9.5

Длина стержня – это расстояние между его концами, измеренная одновременно,

$$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'},\ u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'},\ u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}\ \ \ell_0 = x_2{}' - x_1{}'. \qquad (9.14)$$

Найдем длину стержня $\ell = x_2 - x_1$ в системе отсчета K. Для этого надо одновременно в системе отсчета K измерить координаты концов стержня x_1 и x_2. Воспользуемся преобразованиями Лоренца (9.3)

$$x_1{}' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (9.15)$$

Подставив (9.15) в (9.14), получим

$$\ell_0 = x_2{}' - x_1{}' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

где $\ell = x_2 - x_1$ – длина стержня в системе отсчета K.

Или

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (9.16)$$

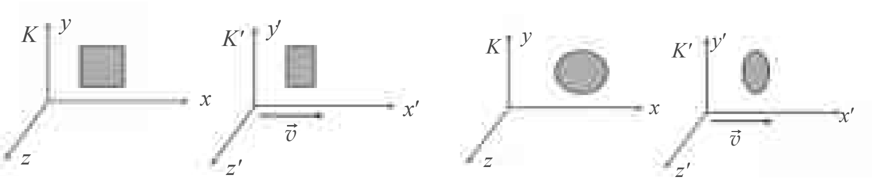


Рис. 9.6

Длина стержня в той системе отсчета, где он покоится, ℓ_0, называется ***собственной длиной стержня*** и является максимальной. Формула (9.16) показывает, что в любой движущейся системе отсчета длина тел сокращается в направлении движения, и этот эффект называется ***лоренцевым сокращением длины***. Отметим, что поперечные размеры тел не меняются (в направлениях перпендикулярных движению), поэтому при переходе от неподвижной системы отсчета K к движущейся системе K' фигуры меняют свою форму: например, квадрат превращается в прямоугольник, круг – в эллипс (рис. 9.6).

9.7. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ

Мы уже знаем, как преобразуются координаты и время при движении с большими скоростями. Рассмотрим, как преобразуются скорости, когда их абсолютные значения сравнимы со скоростью света. Понятно, что релятивистский закон сложения скоростей должен отличаться от классического (1.26). Например, если система отсчета K' движется относительно неподвижной системы отсчета K со скоростью света c, и в ней в направлении движения посылается луч света (также со скоростью c), то согласно классическому закону сложения скоростей скорость луча относительно неподвижной системы отсчета K будет равняться $2c$. Налицо противоречие с постулатом теории относительности о том, что скорость света не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую и является максимально возможной.

Пусть материальная точка движется относительно неподвижной системы отсчета K со скоростью $u = (u_x, u_y, u_z)$. Найдем скорость материальной точки $u' = (u'_x, u'_y, u'_z)$ относительно системы отсчета K'. Для простоты система отсчета K' движется относительно K со скоростью v в направлении оси x.

По определению, проекции скорости на соответствующие оси координат

$$u'_{x'} = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_{z'} = \frac{dz'}{dt'}. \tag{9.17}$$

Воспользуемся преобразованиями Лоренца (9.4), взяв дифференциалы от обеих частей всех уравнений

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad dt' = \frac{dt - \frac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \; dy' = dy, \quad dz' = dz. \tag{9.18}$$

Найдем проекции скорости, подставив (9.18) в (9.17),

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \div \frac{dt - \frac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt - \frac{vdx}{c^2}} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{vdx}{c^2}}. \tag{9.19}$$

Поделим числитель и знаменатель правой части формулы (9.19) на dt, получим

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v\frac{dx}{dt}}{c^2}}.$$

После замены $u_{x'}' = \frac{dx'}{dt'}$ и $u_x = \frac{dx}{dt}$ получим закон преобразования x-компоненты скорости $u_{x'}'$:

$$u'_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}. \tag{9.20}$$

Аналогично можно получить закон преобразования перпендикулярных компонент скорости $u'_{y'}$ и $u'_{z'}$:

$$u'_{y'} = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'}{\dfrac{dt - \dfrac{vdx}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} = \frac{dy\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{dt - \dfrac{vdx}{c^2}} = \frac{\dfrac{dy}{dt}\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{v\dfrac{dx}{dt}}{c^2}} = \frac{u_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}, \quad (9.21)$$

где учтено, что $\dfrac{dy}{dt} = u_y$, $dy = dy'$. Аналогично для $u'_{z'}$

$$u'_{z'} = \frac{u_z\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}. \quad (9.22)$$

Соберем (9.20)–(9.22) в одну формулу для преобразований:

$$K \Rightarrow K' \quad \begin{cases} u'_{x'} = \dfrac{u_x - v}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_{y'} = \dfrac{u_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}, \\ u'_{z'} = \dfrac{u_z\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}}. \end{cases} \quad (9.23)$$

Обратные преобразования отличаются только знаком:

$$K' \Rightarrow K \quad \begin{cases} u_x = \dfrac{u'_{x'} + v}{1 + \dfrac{v u'_{x'}}{c^2}}, \\ u_y = \dfrac{u'_{y'}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v u'_{x'}}{c^2}}, \\ u_z = \dfrac{u'_{z'}\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v u'_{x'}}{c^2}}. \end{cases} \tag{9.24}$$

При малых скоростях, когда $v \ll c,\ \ u_x \ll c$, преобразования (9.22) и (9.23) переходят в классический закон сложения скоростей:

$$\begin{cases} u'_{x'} = u_x - v, \\ u'_{y'} = u_y, \\ u'_{z'} = u_z. \end{cases} \quad . \tag{9.25}$$

Проверим полученные преобразования на принцип постоянства скорости света. Пусть некоторая частица движется в системе отсчета K' со скоростью света $u' = c$. Согласно (9.23) компоненты скорости в системе отсчета K

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{c + v}{1 + \dfrac{v \cdot c}{c^2}} = \dfrac{c + v}{c + v} c = c, \\ u_y = 0, \\ u_z = 0. \end{cases}$$

Мы увидели, что в полученных нами преобразованиях принцип независимости скорости света от системы отсчета выполняется, в системе отсчета K скорость частицы будет равна скорости света: $u_x = c$.

9.8. ИНТЕРВАЛ МЕЖДУ СОБЫТИЯМИ

Ранее мы показали, что для описания любого происходящего события нужно задать три его пространственные координаты и одну временну́ю в некоторой системе отсчета. Пусть первое событие (вспышка света) происходит в точке с координатами x_1, y_1, z_1 в момент времени t_1 в системе отсчета K . Второе событие – прием светового сигнала происходит в той же системе отсчета в точке с координатами x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Расстояние, пройденное световым сигналом, равно $c(t_2 - t_1)$. С другой стороны, это же расстояние

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} ,$$

т. е.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2 (t_2 - t_1)^2 ,$$

или

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 . \qquad (9.26)$$

Пусть система отсчета K' движется параллельно оси x со скоростью v . Поскольку скорость света не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую, то и для системы отсчета K' справедливо утверждение

$$c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2 = 0 . \qquad (9.27)$$

Назовем ***интервалом между событиями*** s_{12} величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2 (t_2' - t_1')^2 - (x_2' - x_1')^2 - (y_2' - y_1')^2 - (z_2' - z_1')^2} . \qquad (9.28)$$

Из инвариантности скорости света следует, что если интервал равен нулю в одной системе отсчета, то он равен 0 во всех системах отсчета.

Можно показать, что в общем случае интервал между двумя событиями не меняется при переходе из одной системы отсчета в другую, т. е. является ***инвариантной величиной***.

$$s_{12} = s_{12}{}' = \text{invar}\,. \tag{9.29}$$

Времениподобные и пространственноподобные интервалы

Рассмотрим в системе отсчета K два события с координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2). Мы хотим узнать, существует ли такая система отсчета K', где бы эти события происходили в одной точке пространства. Обозначим

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = c^2 t_{12}^2\,,\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \ell_{12}^2\,,$$

$$c^2(t_2' - t_1')^2 = c^2 t_{12}'^2\,,\ (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 = \ell_{12}'^2\,.$$

Тогда условие инвариантности интервала перепишется

$$c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 - \ell_{12}'^2\,. \tag{9.30}$$

Чтобы события происходили в одной точке пространства в системе K', необходимо, чтобы $\ell_{12}'^2 = 0$. Тогда условие инвариантности интервала (10.29) перепишется так:

$$c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2\,. \tag{9.31}$$

Таким образом, система отсчета, где бы события были одновременны, существует при выполнении условия

$$c^2 t_{12}^2 - \ell_{12}^2 > 0\,, \tag{9.32}$$

т. е. интервал между событиями в системе отсчета K должен быть вещественным. Такие интервалы называются ***времениподобными***. Если два события происходят с одним и тем же телом, то интервал между ними всегда времениподобный, так как путь, который проходит тело между событиями, не может быть больше, чем ct_{12}. Кроме того, для времениподобных интервалов выполняется еще одно важное условие: *не существует системы отсчета, где бы эти события происходили одновременно*. Действительно, если положить в (9.32) $t_{12}^2 = 0$, мы получим противоречие $-\ell_{12}^2 > 0$.

Выясним, существует ли такая система отсчета, где два наших события были бы одновременны. Условием одновременности событий в K' является $c^2 t'^2_{12} = 0$. После подстановки в (9.30) получим

$$c^2 t^2_{12} - \ell^2_{12} = -\ell'^2_{12} . \tag{9.33}$$

Чтобы события были одновременны в K', необходимо, чтобы интервал между ними был мнимой величиной. Такие интервалы называются ***пространственноподобными***.

9.9. СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ ПО ЭЙНШТЕЙНУ

Будем изображать события на пространственно-временно́й диаграмме, где по оси абсцисс будем откладывать величину ct, а по оси ординат пространственную координату x. Для наглядности рассмотрим одномерный случай. Тогда любое событие на пространственно-временной диаграмме изображается точкой, которую называют ***мировой точкой*** (рис. 9.7).

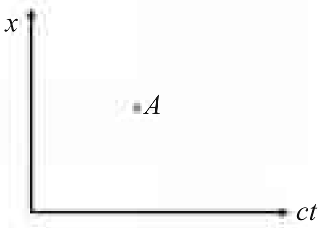


Рис. 9.7

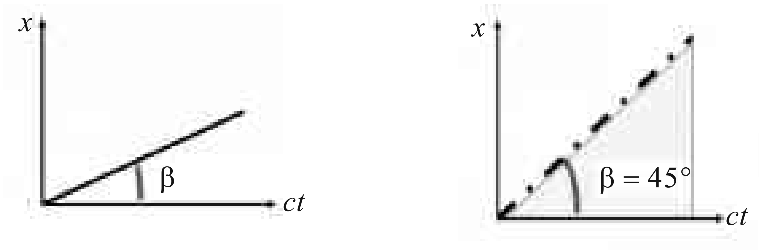
Прямолинейное и равномерное движение частицы со скоростью v на пространственно-временной диаграмме изображается прямой, проходящей через начало координат и повернутой на угол β,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c}$$

относительно оси ct (рис. 9.8, *а*).

Поскольку максимально возможная скорость движения – это скорость света c, угол наклона прямой не может превышать

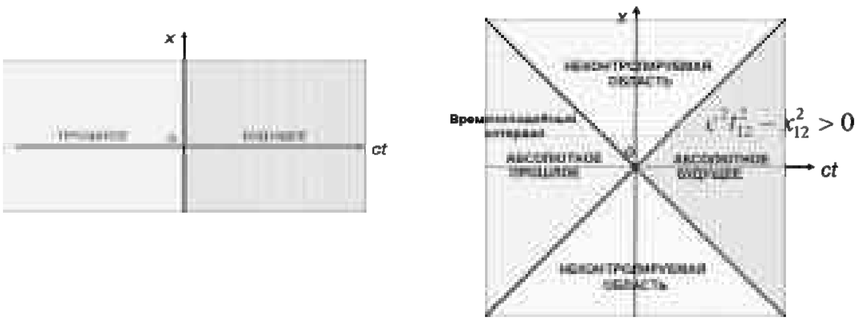
$45^\circ \left(\operatorname{tg} \beta = \dfrac{c}{c} = 1 \right)$. Область разрешенных скоростей показана на рис. 9.8, *б*.



а *б*

Рис. 9.8

Изобразим, как выглядят настоящее, прошлое и будущее на пространственно-временной диаграмме в классической физике. Будем считать, что настоящее происходит в начале отсчета в момент времени $t = 0$, тогда все, что находится справа по оси ct от настоящего, – это будущее, а все, что находится слева – это прошлое (рис. 9.9, *а*).



а *б*

Рис. 9.9

В классической физике нет запрета на скорость движения тела, поэтому область разрешенного движения – это все, что находится справа и слева от оси *x*. В релятивистской физике один из постулатов:

скорость света – это максимально возможное значение скорости движения. Пространственно-временная диаграмма должна измениться, теперь движение возможно только со скоростями, меньшими скорости света, и области разрешенного движения находятся внутри светового конуса, ограниченного биссектрисами углов ($x = \pm ct$). Эти области называются ***абсолютным будущим*** и ***абсолютным прошлым*** (рис. 9.9, *б*).

Рассмотрим область абсолютного будущего. В этой области выполняется условие

$$c^2t^2 - x^2 > 0\,,$$

т. е. интервал является времениподобным. Все события, которые происходят в абсолютном будущем, происходят после настоящего (точка *O*), т. е. $t > 0$. Для времениподобных интервалов нельзя найти такую систему отсчета, где бы события были одновременны, поэтому не существует такой системы отсчета, где бы одно из событий области абсолютного будущего происходило бы раньше настоящего (точки *O*). Именно по этой причине область называется абсолютным будущим. Аналогичные рассуждения можно провести для левой области светового конуса, которую называют абсолютным прошлым.

В областях внутри светового конуса расположены события, про последовательность которых мы можем сказать «раньше» и «позже». Именно возможность указания на последовательность событий и позволяет разделить события на причину и следствие. Поэтому все причинно-связанные события (поскользнулся – упал, налил воды – выпил воду) могут происходить только в областях абсолютного прошлого и абсолютного будущего, и во всех системах отсчета причинно-следственная связь (последовательность событий) сохраняется. То есть здесь нет такой системы отсчета, где вы сначала выпьете воду, а потом ее нальете.

Область, лежащая за пределами светового конуса, называется неконтролируемой областью, она разделяется на ***неконтролируемое прошлое*** и ***неконтролируемое будущее***. События в этой области всегда разделены пространственно, и понятия «раньше и позже» для них относительны. Есть такие системы отсчета, где событие может происходить раньше настоящего (точки *O*), есть системы отсчета, где событие происходит позже настоящего, и есть такие системы отсчета, где событие происходит одновременно с настоящим.

9.10. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА

Рассмотрим с помощью геометрического метода, предложенного Г. Минковским, одновременность событий, замедление времени и сокращение длины. Для этого надо научиться изображать на пространственно-временной диаграмме движение частицы в системе отсчета K'. Будем, как и раньше, рассматривать одномерный случай, когда система отсчета K' движется в направлении оси x неподвижной системы отсчета K со скоростью v.

Найдем, как изображаются оси координат системы K'. Для этого надо найти их уравнения в системе отсчета K.

Уравнение оси ординат в системе отсчета K': $x' = 0$. Воспользуемся преобразованиями Лоренца (9.3)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0\,,\; x - vt = 0\,,$$

или

$$x = \frac{v}{c} ct\,. \qquad (9.34)$$

Уравнение (9.34) – это прямая, повернутая на угол β относительно оси ct системы отсчета K. Угол поворота оси x' относительно оси x вычисляется из (9.34):

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v}{c},\;\; \beta = \mathrm{arctg}\frac{v}{c}. \qquad (9.35)$$

Аналогично определяется положение оси t':

$$t' = 0\,, \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0\,,\; t - \frac{v}{c^2}x = 0\,;$$

$$ct = \frac{v}{c}x\,. \qquad (9.36)$$

Уравнение (9.36) – это прямая, повернутая на угол β относительно оси x системы отсчета K. Угол поворота оси ct' относительно оси t вычисляется из (9.35.). Системы отсчета K и K' показаны на рис. 9.10, *а*. Система отсчета K' – косоугольная и будет тем сильнее сплющена, чем больше скорость ее движения v относительно неподвижной системы отсчета K.

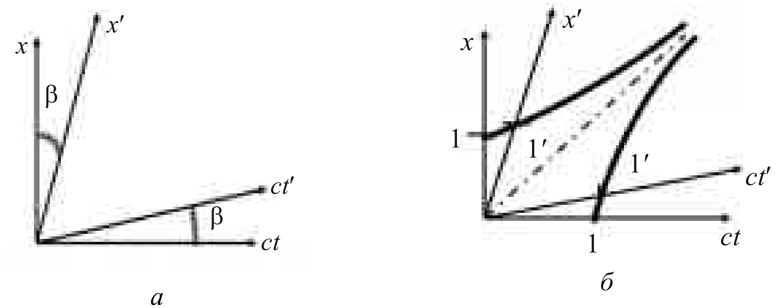


Рис. 9.10

Теперь надо проградуировать оси системы отсчета K'. Проще всего это сделать с помощью инвариантности интервала

$$c^2t^2 - x^2 = c^2(t')^2 - (x')^2 . \tag{9.37}$$

Выберем на оси ct системы отсчета точку с координатами $x = 0$, $ct = 1$, получим уравнение гиперболы

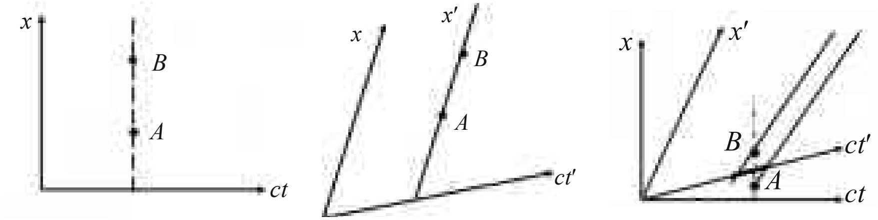
$$c^2t'^2 - x'^2 = 1 . \tag{9.38}$$

Точка пересечения этой гиперболы с осью ct' – это единица на оси времени в системе координат K' (рис. 9.10, *б*).

Аналогично градуируется ось x'. Выберем на оси x системы отсчета точку с координатами $x = 1$, $ct = 0$, получим уравнение гиперболы, пересечение которой с осью x' – это единичная координата в системе координат K' (рис. 9.10, *б*)

$$c^2t'^2 - x'^2 = -1 . \tag{9.39}$$

Рассмотрим понятие одновременности с помощью пространственно-временных диаграмм. Одновременные события в системе отсчета K изображаются вертикальными линиями (рис. 9.11, *а*), а одновременные события в системе отсчета K' изображаются линиями, параллельными оси x' (рис. 9.11, *б*).

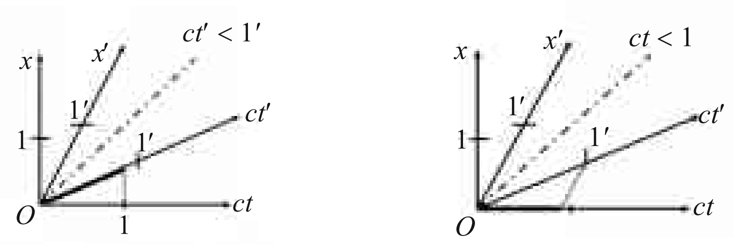


а *б* *в*

Рис. 9.11

Из рис. 9.11, *в* видно, что два одновременных в системе отсчета K события A и B в системе отсчета K' происходят через некоторый промежуток времени, длительность которого зависит от расстояния между этими событиями в неподвижной системе отсчета K .

Рассмотрим замедление времени. Пусть событие произошло в системе отсчета K в момент времени, соответствующий точке $ct = 1$. Система отсчета K' проградуирована и соответствующая единица измерения показана на оси $ct' = 1'$ (рис. 9.12).



а *б*

Рис. 9.12

Проведем линию (пунктир на рис. 9.12, *а*), показывающую все одновременные события в системе отсчета K . Эта линия пересечет ось ct' в точке, меньшей, чем единица времени в системе отсчета

K' $(ct' < 1')$. Это означает, что часы в движущейся системе отсчета K' идут медленнее.

Справедливо и обратное утверждение. Если мы теперь находимся в системе отсчета K', то теперь система отсчета K движется относительно нас, и там часы должны идти медленнее. Пусть событие произошло в точке $1'$ в системе отсчета K'. Нарисуем линию, показывающую все одновременные события в K'. Эта линия пересечет ось ct в точке, меньшей, чем единица времени в системе отсчета K $(ct < 1)$. Это означает, что часы в движущейся системе отсчета K идут медленнее. Таким образом, эффект замедления времени является обратимым. Применив аналогичные рассуждения для пространственной координаты, можно показать с помощью диаграмм и сокращение длины.

10. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ДИНАМИКА

10.1. РЕЛЯТИВИСТСКИЙ ИМПУЛЬС

Один из основных постулатов теории относительности – принцип инвариантности физических законов во всех инерциальных системах отсчета означает, что все физические законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Обычный, классический импульс, $\vec{p} = m\vec{v}$ (его еще часто называют ньютоновским импульсом) этому требованию не удовлетворяет. Для того чтобы импульс удовлетворял преобразованиям Лоренца, он должен иметь вид

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}. \qquad (10.1)$$

Импульс, определенный таким образом, похож по виду на ньютоновский импульс, если ввести обозначение

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (10.2)$$

где m_0 – масса покоя (масса тела в той системе отсчета, относительно которой оно покоится), m – часто называют релятивистской массой, чтобы отличить ее от массы покоя. Масса покоя m_0 – фундаментальная величина, не зависящая от выбора системы отсчета. Из (10.2) следует, что существование частицы с нулевой массой покоя ($m_0 = 0$) возможно только при их движении со скоростью света. Частицы с нулевой массой покоя, это, например, фотоны.

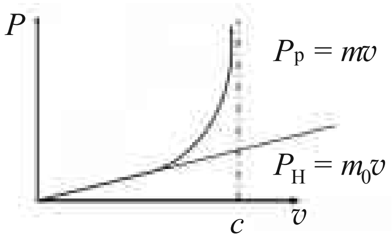


Рис. 10.1

При малых скоростях, когда $v \ll c$, выражение (10.1) переходит в выражение для классического импульса $\vec{p} = m_0\vec{v}$. На рис. 10.1 показаны зависимости релятивистского ($P_{\text{р}} = mv$) и ньютоновского ($P_{\text{Н}} = m_0 v$) импульсов от скорости движения тела. При малых скоростях эти графики совпадают, однако при приближении скорости к скорости света релятивистский импульс асимптотически приближается к прямой $v = c$.

10.2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Релятивистский импульс, определенный как (10.1), должен удовлетворять основному закону релятивистской динамики

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}, \tag{10.3}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на тело. При малых скоростях уравнение (10.3) переходит во второй закон Ньютона: $\vec{F}=m_0\dfrac{d\vec{v}}{dt}$.

Из уравнения (10.3) следует неожиданный вывод: в общем случае *сила, действующая на тело, не параллельна ускорению.* Продифференцируем правую часть (10.3):

$$\vec{F}=\frac{d\left(m\vec{v}\right)}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dm}{dt}\vec{v}+m\vec{a}\,. \tag{10.4}$$

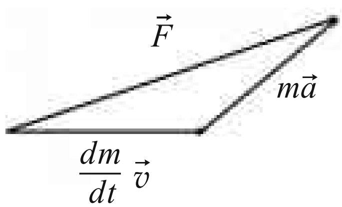


Рис. 10.2

Мы видим из (10.4), что сила не всегда параллельна ускорению, графически это показано на рис. 10.2.

10.3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Определим кинетическую энергию T так же, как и в классической механике. – это величина, приращение которой равно работе силы dA, действующей на тело,

$$dT = dA\,. \tag{10.5}$$

По определению,

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = (\vec{F} \cdot \vec{v}dt) = (\vec{F}dt \cdot \vec{v})\,. \tag{10.6}$$

Из основного уравнения релятивистской динамики (10.4) можно выразить

$$\vec{F}dt = \vec{v}dm + md\vec{v}\,. \tag{10.7}$$

Подставив (10.6) в (10.7), получим

$$dT = (\vec{F}dt \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{v})dm + m(d\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2 dm + mvd\vec{v}\,. \tag{10.8}$$

С другой стороны, из (10.2) имеем

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2\,,$$

$$m^2c^2\left(1 - v^2\right) = m_0^2c^2\,, m^2c^2 = m_0^2c^2 + m^2v^2\,. \tag{10.9}$$

Возьмем дифференциал от левой и правой частей (10.9):

$$d(m^2c^2) = d(m_0^2c^2) + d(m^2v^2)\,,$$

$$2mc^2dm = d(m_0^2c^2) + 2mv^2dm + 2m^2vdv\,.$$

После упрощения с учетом того, что $d(m_0^2c^2) = 0$, получим

$$c^2dm = dT \quad c^2dm = v^2dm + mvdv\,. \tag{10.10}$$

Сравнивая (10.8) и (10.10), можно сделать вывод, что

$$c^2dm = dT\,. \tag{10.11}$$

Таким образом, изменение кинетической энергии dT пропорционально изменению ее массы dm. Чтобы найти кинетическую энергию тела, надо взять интеграл от (10.11)

$$\int_{m_0}^{m} c^2dm = \int_0^T dT\,. \tag{10.12}$$

В (10.12) нижний предел интегрирования у массы – это масса покоя, после подстановки получим

$$T = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 \ . \qquad (10.13)$$

Полученное выражение для кинетической энергии сильно отличается от привычного классического, однако при малых скоростях оно переходит в классическое выражение $T = \frac{m_0 v^2}{2}$.

Проверим последнее утверждение. При малых скоростях

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} . \qquad (10.14)$$

Подставив (10.14) в (10.13), получим

$$T = m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - m_0c^2 = \frac{m_0v^2}{2} .$$

Таким образом, наше утверждение оказалось верным.

10.4. ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ

В предыдущем разделе мы видели из формулы (10.11), что приращение кинетической энергии сопровождается приращением ее массы. А. Эйнштейн обобщил это утверждение, предположив, что любая энергия связана с массой соотношением

$$E = mc^2 , \qquad (10.15)$$

где E – ***полная энергия*** тела. Необходимо отметить, что потенциальная энергия тела во внешнем поле не входит в полную энергию тела.

Уравнение (10.15) можно переписать, подставив в него выражение для релятивистской массы (10.2),

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (10.16)$$

Из (10.16) следует, что даже покоящееся тело обладает энергией, ее называют ***энергией покоя***

$$E_0 = m_0 c^2. \qquad (10.17)$$

Можно дать новое определение кинетической энергии тела как разницы полной энергии и энергии покоя:

$$T = E - m_0 c^2. \qquad (10.18)$$

Мы видим, что в релятивистской физике масса выступает как ***мера энергосодержания***, при изменении массы изменяется его энергия:

$$\Delta E = \Delta m c^2. \qquad (10.19)$$

В обыденной жизни изменения массы малы и находятся за пределами чувствительности измерительных приборов, однако в ядерной физике закон взаимосвязи массы и энергии нашел свое экспериментальное подтверждение. В ядерных реакторах энергия высвобождается за счет деления атомов тяжелых элементов. Масса продуктов распада меньше массы исходных веществ, и именно разница масс определяет полезную высвобождаемую энергию.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Найдем, как изменится масса 1 л воды при нагревании его на 100 °. Изменение массы

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \qquad (10.20)$$

где ΔE – энергия, затраченная на нагревание, $\Delta E = mc_p \Delta t$. В нашем случае $m = 1$ кг; $c_p = 4{,}2 \cdot 10^3 \,\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}$; $\Delta t = 100°$. Подставим исходные данные в (10.20)

$$\Delta E = 1 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 100 = 4{,}2 \cdot 10^5 \,\text{Дж},$$

$$\Delta m = \frac{4,2 \cdot 10^5}{(3 \cdot 10^8)^2} = 0,5 \cdot 10^{-16} \text{ кг} .$$

Очевидно, что каждый раз при нагревании воды в чайнике такое незначительное изменение ее массы мы не замечаем.

Пример 2. Найдем энергию, которая выделяется при распаде уже рассмотренного нами в разделе 9.5 π^+-мезона ($m_{\pi^+} = 273 m_e$), который распадается на μ^+-мезон ($m_{\mu^+} = 215 m_e$) и нейтрино ($m_\upsilon = 0$). При распаде масса изменяется на

$$\Delta m = 273 m_e - 215 m_e = 58 m_e ,$$

а энергия

$$\Delta E = \Delta m c^2 = 58 m_e c^2 = 58 \cdot 0,51 \text{ МэВ} = 29,58 \text{ МэВ} ,$$

что находится в хорошем соответствии с результатами эксперимента.

Мы рассматривали одну частицу, если же частиц несколько, то выражение (10.15) перепишется в виде

$$E = \sum_{i=1}^{N} m_i c^2 . \tag{10.21}$$

В ньютоновской механике, когда мы имели дело с системой частиц, необходимо было вводить потенциальную энергию – энергию их взаимодействия. Введение потенциальной энергии подразумевало, что взаимодействие распространяется мгновенно, как только изменится и конфигурация системы – мгновенно должна измениться потенциальная энергия. В теории относительности взаимодействие распространяется не мгновенно, а с конечной, хотя и достаточно большой скоростью – скоростью света. Поэтому говорить о потенциальной энергии в теории относительности просто нельзя.

10.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭНЕРГИЕЙ И ИМПУЛЬСОМ

Энергия и импульс частиц меняются при переходе от одной системы отсчета к другой, однако есть величина, которая является инвариантной по отношению к системе отсчета. Найдем $E^2 - p^2 c^2$, подставив (10.15) и (10.1),

$$E^2 - p^2c^2 = (mc^2)^2 - (mv)^2c^2 = \frac{m_0{}^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}(c^2 - v^2) = m_0{}^2c^4 . \qquad (10.22)$$

Мы нашли еще один инвариант, который не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой, поскольку масса покоя и скорость света – это величины, не меняющиеся при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$E^2 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4 = \text{invar} .$$

Связь между энергией и импульсом удобно изображать с помощью прямоугольных треугольников. Выражение (10.22) напоминает теорему Пифагора, если принять, что катеты – это pc и m_0c^2, а гипотенуза – E. Изобразим этот прямоугольный треугольник на рис. 10.3.

Для частиц с нулевой массой покоя $m_0 = 0$ энергия и импульс связаны соотношением

$$E = pc , \qquad (10.23)$$

а треугольник энергий превращается в прямую линию, поскольку один из катетов равен нулю (рис. 10.4).

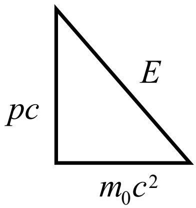


Рис. 10.3

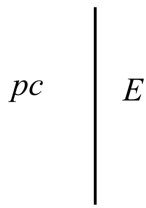


Рис. 10.4

Чтобы получить уравнение, связывающее импульс и кинетическую энергию, подставим в (10.21) выражение (10.18):

$$(T + m_0c^2)^2 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4 ,$$

раскроем скобки:

$$T^2 + 2Tm_0c^2 + m_0{}^2c^4 - p^2c^2 = m_0{}^2c^4 ,$$

получим удобное для применения при решении некоторых задач уравнение, связывающее импульс и кинетическую энергию,

$$T^2 + 2Tm_0c^2 = p^2c^2,$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T\left(T + 2m_0c^2\right)}. \tag{10.24}$$

10.6. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА. ЗАДАЧА О РАСПАДЕ

В силу того, что энергия взаимодействия в релятивистской теории отсутствует, говоря о законах сохранения энергии и импульса, мы имеем в виду системы невзаимодействующих частиц. Тогда для системы невзаимодействующих частиц выполняются законы сохранения энергии: полная энергия системы частиц сохраняется:

$$\sum_{i=1}^{N} E_i = \text{const}, \tag{10.25}$$

и импульса: импульс системы частиц сохраняется:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{const}, \tag{10.26}$$

где N – количество невзаимодействующих частиц в системе.

Под энергией покоя системы частиц $\tilde{E}_0$ будем иметь в виду энергию покоя в системе центра масс (СЦИ), в которой система частиц покоится как целое и суммарный импульс частиц равен

$$\tilde{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = 0; \tag{10.27}$$

$$\tilde{E}_0 = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} (m_{0i}c^2 + T_i). \tag{10.28}$$

В энергию покоя системы частиц $\tilde{E}_0$ входят энергии покоя отдельных частиц $m_{0i}c^2$ и их кинетические энергии T_i в системе центра инерции. Тогда масса покоя системы частиц равна

$$M_0 = \frac{\tilde{E}_0}{c^2}. \tag{10.29}$$

Из сравнения выражений (10.28) и (10.29) видно, что масса покоя системы частиц не равна сумме масс покоя ее отдельных частей:

$$M_0 > \sum_{i=1}^{N} m_{0i} \ . \tag{10.30}$$

Применение законов сохранения энергии и импульса в релятивистской физике рассмотрим на примере задачи о распаде. Пусть покоящаяся частица массой M_0 распадается на две частицы с массами m_{01} и m_{02}. Найти импульсы p_1 и p_2 образовавшихся частиц.

Задачу будем решать в системе центра инерции. В этой системе отсчета импульсы продуктов распада равны по модулю и направлены в противоположные стороны $|p_1| = |p_2| = p$ (по определению в СЦИ суммарный импульс частиц равен $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$). Нарисуем для частиц треугольники энергий. Поскольку импульсы у продуктов распада равны, то эти треугольники имеют один одинаковый катет (рис. 10.5).

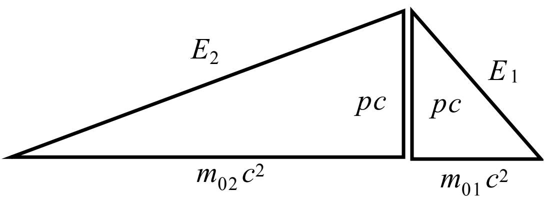


Рис. 10.5

Запишем закон сохранения энергии: до распада исходная частица покоилась в СЦИ, поэтому ее энергия – энергия покоя $E = M_0c^2$, энергии продуктов распада E_1 и E_2 рассчитываются по формуле

$$E = M_0c^2 = E_1 + E_2 \, . \tag{10.31}$$

Применим теорему Пифагора для каждого треугольника, в результате будем иметь два уравнения, связывающие импульс и энергию,

$$E_1 = \sqrt{(m_{01}c^2)^2 + (pc)^2} \ , \tag{10.32}$$

$$E_2 = \sqrt{(m_{02}c^2)^2 + (pc)^2} \ . \tag{10.33}$$

Подставив (10.33) и (10.32) в (10.31), получим

$$\sqrt{(m_{01}c^2)^2 + (pc)^2} + \sqrt{(m_{02}c^2)^2 + (pc)^2} = M_0c^2 \, . \tag{10.34}$$

После возведения в квадрат и преобразований получим

$$p = c\sqrt{\left(\frac{M_0{}^2 + m_{01}{}^2 - m_{02}{}^2}{2M_0}\right)^2 - m_{01}{}^2}\ . \qquad (10.35)$$

11. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

11.1. ВВЕДЕНИЕ. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

Задача 1. Шарик массой $m = 100$ г летит перпендикулярно по направлению к неподвижной стене со скоростью $v = 5$ м/с и после столкновения упруго отскакивает от нее. Найти изменение импульса шарика за время удара о стенку.

Дано:
$m = 100$ г $= 0{,}1$ кг,
$v = 5$ м/с

$\Delta\vec{p} = ?$

Нарисуем импульсы шарика до $\vec{p}_1$ и после $\vec{p}_2$ удара (рис. 11.1)

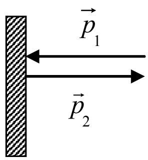


Рис. 11.1

По определению, изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Изобразим этот вектор, пользуясь правилом вычитания векторов: сначала надо показать вектор $(-\vec{p}_1)$, который направлен в противоположную сторону $\vec{p}_1$ и равен ему по длине, а затем сложить два вектора:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 + (-\vec{p}_1)\ .$$

Из рис. 11.12 видно, что длина вектора

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = \left|\vec{p}_2\right| + \left|\vec{p}_1\right|. \qquad (11.1)$$

По условию задачи сказано, что шарик отскакивает от стены упруго, это означает, что его импульс по модулю не изменился, $\left|\vec{p}_2\right| = \left|\vec{p}_1\right|$, следовательно, из (11.1)

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = 2\left|\vec{p}_1\right| = 2m\left|\vec{v}\right| = 2\cdot 0{,}1\cdot 5 = 1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: $\left|\Delta\vec{p}\right| = 1\ \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

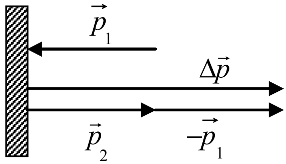


Рис. 11.2

Задача 2. Шарик массой $m = 50$ г налетает на стенку под углом $\alpha = 30°$ к ней со скоростью $v = 2$ м/с и после столкновения упруго отскакивает от стенки. Найти изменение импульса шарика за время удара о стенку.

Дано:
$m = 50$ г $= 0{,}05$ кг,
$v = 2$ м/с,
$\alpha = 30°$
$\Delta\vec{p} = ?$

Нарисуем импульсы шарика: $\vec{p}_1$ до удара и $\vec{p}_2$ после удара.

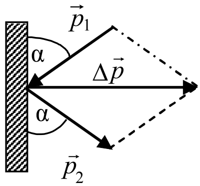


Рис. 11.3

По условию задачи шарик отскакивает от стены упруго, т. е. под тем же углом α и с таким же по модулю импульсом $\left|\vec{p}_2\right| = \left|\vec{p}_1\right|$.

По определению, изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Вектор $\Delta\vec{p}$, построенный по правилам векторной алгебры, показан на рис. 11.3.

Из рис. 11.3 видно, что длина вектора – это диагональ ромба, и из геометрии понятно, что

$$\left|\Delta\vec{p}\right| = 2\left|\vec{p}_1\right|\cos(90° - \alpha) = 2\left|\vec{p}_1\right|\sin\alpha =$$

$$= 2m\left|\vec{v}\right|\sin 30° = 2\cdot 0{,}05\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 0{,}1\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $\left|\Delta\vec{p}\right| = 0{,}1\ \dfrac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 3. Материальная точка массой $m = 50$ г равномерно движется по окружности со скоростью $v = 2$ м/с. Найти изменение импульса материальной точки после того как она пройдет четверть окружности.

Дано: $m = 50$ г $= 0{,}05$ кг , $v = 2$ м/с	Нарисуем импульсы точки $\vec{p}_1$ в начальном положении (точка A) и через четверть окружности $\vec{p}_2$ (точка B). Импульс в каждой точке направлен по касательной к окружности (рис. 11.4).
$\Delta\vec{p} = ?$	

Изменение импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$. Точка движется равномерно, поэтому по модулю импульсы не меняются $|\vec{p}_2| = |\vec{p}_1|$. Длину вектора $\Delta\vec{p}$ можно найти из теоремы Пифагора

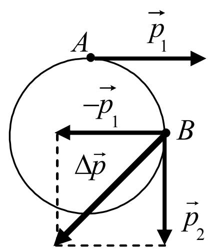


Рис. 11.4

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{|\vec{p}_2|^2 + |\vec{p}_1|^2} = \sqrt{|\vec{p}_1|^2 + |\vec{p}_1|^2} =$$

$$= \sqrt{2}\,|\vec{p}_1| = \sqrt{2}m|\vec{v}| = \sqrt{2}\cdot 0{,}05\cdot 2 = 0{,}14\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: $|\Delta\vec{p}| = 0{,}14\ \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 4. Тело массой $m = 300$ г брошено под углом $\alpha = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Найти изменение импульса тела в верхней точке траектории.

Дано: $m = 300$ г $= 0{,}3$ кг $v_0 = 10$ м/с $\alpha = 45°$	Нарисуем траекторию движения тела (рис. 11.5).
$\Delta\vec{p} = ?$	

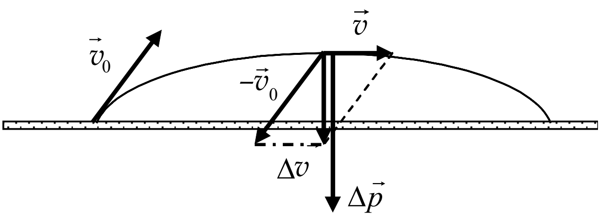


Рис. 11.5

Скорость тела направлена по касательной к траектории, в нижней точке под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, как сказано в условии задачи, а в верхней точке траектории скорость направлена горизонтально. Кроме того, на тело вдоль горизонтальной оси не действуют никакие силы (сопротивлением воздуха пренебрегаем), поэтому горизонтальная проекция скорости не изменится в процессе движения, и скорость тела в верхней точки траектории равна

$$v = v_0 \cos\alpha .$$

Чтобы найти вектор изменения импульса $\Delta\vec{p}$, достаточно найти вектор изменения скорости

$$\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 .$$

Вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$, построенный по правилам вычитания векторов, направлен вертикально вниз, поскольку горизонтальная проекция скорости не меняется (длина горизонтальной пунктирной линии равна длине вектора $\vec{v}$). Из геометрии видно, что длина вектора $|\Delta\vec{v}| = \Delta v$:

$$\Delta v = v_0 \sin\alpha = 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 7 \text{ м/с} .$$

Осталось найти длину вектора изменения импульса Δp:

$$\Delta p = m\Delta v = 7 \cdot 0{,}3 = 2{,}1 \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} .$$

Направление вектора Δp совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{v}$ и показано на рис. 11.5.

Ответ: $|\Delta p| = 2{,}1 \ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

11.2. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задача 5. Две материальные точки движутся по законам

$$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2 \text{, и } x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$$

где

$$A_1 = 10 \text{ м}, A_2 = 1 \text{ м}, B_1 = 2 \text{ м/с}, B_2 = 5 \text{ м/с},$$

$$C_1 = 1 \text{ м/с}^2, C_2 = -4 \text{ м/с}^2.$$

Определить момент времени, в который скорости точек будут одинаковы. Вычислить ускорения первой и второй точек в этот момент времени. Вычислить скорости точек в этот момент времени.

Дано:

$x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$,

$x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$,

$A_1 = 10$ м, $A_2 = 1$ м,

$B_1 = 2$ м/с, $B_2 = 5$ м/с,

$C_1 = 1$ м/с^2, $C_2 = -4$ м/с^2,

$v_1(t) = v_2(t)$

$t = ?$, $a_1(t) = ?$, $a_2(t) = ?$,

$V_1(t) = V_2(t) = ?$

По определению, мгновенная скорость – это первая производная перемещения по времени. Найдем зависимости скоростей от времени для материальных точек

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = B_1 + 2C_1 t; \quad (11.2)$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = B_2 + 2C_2 t. \quad (11.3)$$

Надо найти момент времени, когда скорости равны, для этого приравняем

$$B_1 + 2C_1 t = B_2 + 2C_2 t,$$

откуда выразим время t и подставим численные значения коэффициентов

$$t = \frac{B_2 - B_1}{2(C_1 - C_2)} = \frac{5-2}{2(1+4)} = 0,3 \text{ с}.$$

Чтобы рассчитать скорости точек, достаточно определить скорость одной точки, у второй точки скорость будет такой же. Для этого подставим найденное время и численные коэффициенты в (11.2):

$$v_1(t = 0,3) = B_1 + 2C_1 t = 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,3 = 2,6 \text{ м/с}.$$

На всякий случай проверим, имеет ли вторая скорость такое же значение. Для этого подставим время и численные значения в (11.3), получим

$$v_2(t = 0,3) = B_2 + 2C_2 t = 5 - 2 \cdot 4 \cdot 0,3 = 2,6 \text{ м/с}.$$

Мы имеем такое же значение скорости второй точки, значит, момент времени, когда скорости точек равны, определен правильно.

Чтобы рассчитать ускорения точек, нужно взять производные по времени от скоростей. Продифференцируем (11.2) и получим

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2C_1 t \; ; \tag{11.4}$$

$$a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 2C_2 t \, . \tag{11.5}$$

Найдем ускорения в момент времени $t = 0{,}3$ с:

$$a_1 = 2C_1 t = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}6 \text{ м/с}^2 \, , \quad a_2 = 2C_2 t = -2 \cdot 4 \cdot 0{,}3 = -2{,}4 \text{ м/с}^2 \, .$$

Ответ:

$$t = 0{,}3 \text{ с} \, ; \; v_2(t = 0{,}3) = v_1(t = 0{,}3) = 2{,}6 \text{ м/с} \, ; \; a_1 = 0{,}6 \text{ м/с}^2 \, ;$$

$$a_2 = -2{,}4 \text{ м/с}^2 \, .$$

Задача 6. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r} = 2t^2\vec{i} + 3t^3\vec{j} + 5t\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей. Вычислить скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с.

Дано:
$\vec{r} = 2t^2\vec{i} + 3t^3\vec{j} + 5t\vec{k}$,
$t = 2$ *с*,

$a(t) = ?$, $v(t) = ?$

Скорость материальной точки при координатном способе описания движения находится по уравнению (1.12), а проекции скорости на координатные оси – по уравнению (1.11):

$$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2} + v_z^{\,2}} \; ; \tag{11.6}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \;\; v_y = \frac{dy}{dt}, \;\; v_z = \frac{dz}{dt} \, .$$

Вычислим проекции скорости на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t^2)}{dt} = 4t \, , \; v_x\left(t = 2\right) = 4 \cdot 2 = 8 \text{ м/с} \, ;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(3t^3)}{dt} = 9t^2, \ v_y(t=2) = 9 \cdot 2^2 = 36 \text{ м/с};$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d(5t)}{dt} = 5 \ \text{ м/с}.$$

Подставим найденные проекции в (11.6), получим

$$\left|v\left(t=2\right)\right| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \sqrt{8^2 + 36^2 + 5^2} = \sqrt{1385} = 37,2 \text{ м/с}.$$

Ускорение материальной точки при координатном способе описания движения находится по уравнению (1.15), а проекции ускорения на координатные оси – по уравнению (1.14)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}; \qquad (11.7)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \ a_y = \frac{dv_y}{dt}, \ a_z = \frac{dv_z}{dt}.$$

Найдем проекции ускорения на координатные оси:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(4t)}{dt} = 4 \ \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d(9t^2)}{dt} = 18t \quad , a_y(t=2) = 18 \cdot 2 = 36 \ \text{ м/с}^2;$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

После подстановки в (11.7) получим

$$\left|\vec{a}(t=2)\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{4^2 + 36^2} = \sqrt{1312} = 36,2 \ \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $\left|\vec{v}(t=2)\right| = 37,2$ м/с, $\left|\vec{a}\left(t=2\right)\right| = 36,2$ м/с^2.

Задача 7. Материальная точка движется в плоскости xOy со скоростью $\vec{v} = A\vec{i} + Bx\vec{j}$, где A и B – некоторые постоянные. Начальное положение материальной точки – начало координат. Найти уравнение движения материальной точки и определить форму траектории.

Дано: $v = A\vec{i} + Bx\vec{j}$	Эта задача обратна предыдущей, здесь по известным проекциям скорости на оси координат надо найти зависимости координат от времени.
Уравнение движения =? *Форма траектории =?*	

Из условия задачи известно, что $v_x = A$, $v_y = Bx$. Проекции скоростей определяются уравнением (1.11): $v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}$. Тогда для координат мы можем записать следующие уравнения:

$$x = \int_0^t v_x dt = \int_0^t A dt = At\ ; \tag{11.8}$$

$$y = \int_0^t v_y dt = \int_0^t Bx dt\ . \tag{11.9}$$

Чтобы взять интеграл (11.9), в него необходимо подставить временную зависимость координаты *x*, она содержится в уравнении (11.8).

$$y = \int_0^t BAt dt = BA\frac{t^2}{2}. \tag{11.10}$$

Мы получили два уравнения, описывающих зависимость координат от времени, но для нахождения уравнения траектории нужна зависимость $y(x)$.

Выразим время из (11.8) $t = \dfrac{x}{A}$ и подставим в (11.10), получим

$$y = B\frac{\left(\dfrac{x}{A}\right)^2}{2} = \frac{B}{2A}x^2\ .$$

Полученное уравнение траектории – это парабола.

Условие начального положения точки $x = 0, y = 0$ мы использовали для определения нижнего предела интегрирования по времени. Если бы начальная точка была другой, например $x(t = 0) = x_0$, то интеграл для *x*-координаты, например, имел бы вид

$$x=\int_{t_0}^{t} Adt = A(t-t_0)$$

и предел интегрирования t_0 надо было бы рассчитывать из граничного условия $x(t=0)=x_0$, $x_0=-At_0$.

Ответ: $x=At$; $y=\dfrac{BAt^2}{2}$; $y=\dfrac{B}{2A}x^2$ – парабола.

Задача 8. Движение материальной точки по окружности радиусом $R=4$ м происходит по закону $\xi = A+Bt^2+Ct^3$, где $A=10$ м, $B=-2$ м/с, $C=1$ м/с^2. Для момента времени $t=2$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a.

Дано:
$\xi = A+Bt^2+Ct^3$,
$A=10$ м,
$B=-2$ м/с,
$C=1$ м/с^2,
$R=4$ м,
$t=2$ с

$a_n=?$, $a_\tau=?$,
$a=?$

Нормальное ускорение точки вычисляется по формуле (2.20)

$$a_n=\frac{v^2}{R}.$$

Следовательно, нужно найти скорость точки

$$v=\frac{d\xi}{dt}=2Bt+3Ct^2. \qquad (11.11)$$

Найдем скорость точки в момент времени $t=2$ с:

$$v(t=2)=2Bt+3Ct^2=-2\cdot 2\cdot 2+3\cdot 1\cdot 4=4 \text{ м/с}.$$

Тогда нормальное ускорение

$$a_n(t=2)=\frac{v^2}{R}=\frac{4^2}{4}=4 \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение точки вычисляется по формуле (1.19)

$$a_\tau=\frac{d|v|}{dt},$$

следовательно, необходимо вычислить производную от (11.11):

$$\frac{dv}{dt} = 2B + 6Ct .$$

Тангенциальное ускорение в момент времени $t = 2$ с равно

$$a_\tau = 2B + 6Ct = 2\cdot(-2) + 6\cdot 1\cdot 2 = 8 \text{ м/с}^2 .$$

Полное ускорение точки можно рассчитать, если известны тангенциальное и нормальное ускорения:

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 8{,}94 \text{ м/с}^2 .$$

Ответ: $a_n(t = 2) = 4$ м/с^2; $a_\tau = 8$ м/с^2 ; $a = 8{,}94$ м/с^2.

Задача 9. Материальная точка движется по окружности радиуса $R = 5$ м. В некоторый момент времени ее нормальное ускорение достигает $a_n = 5$ м/с^2 и угол между направлением скорости и полного ускорения составляет $\alpha = 60°$. Найти:

1) скорость точки v ;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ ;

3) полное ускорение точки a .

Дано:
$a_n = 5$ м/с^2,
$\alpha = 60°$,
$R = 5$ м

$V = ?$, $a_\tau = ?$, $a = ?$

Скорость точки можно найти сразу из известных нормального ускорения и радиуса окружности $a_n = \dfrac{v^2}{R}$. Откуда

$$v = \sqrt{a_n R} = \sqrt{5\cdot 5} = 5 \text{ м/с} .$$

На рис. 11.6 видно, что скорость и тангенциальное ускорение направлены по касательной к траектории движения.

Из рисунка понятно, что $\dfrac{a_n}{a_\tau} = \operatorname{tg}\alpha$, откуда

$$a_\tau = a_n \operatorname{tg}\alpha = 5 \operatorname{tg} 60° = 5\cdot 1{,}73 = 2{,}89 \text{ м/с}^2 .$$

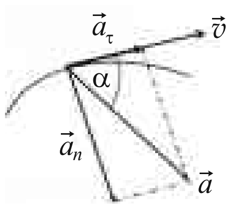


Рис. 11.6

Полное ускорение точки рассчитаем по формулам

$$a=\sqrt{a_\tau{}^2+a_n{}^2}=\sqrt{5^2+2{,}89^2}=5{,}78\ \text{м/с}^2 .$$

Ответ: $v=5$ м/с; $a_\tau=2{,}89$ м/с^2 ; $a=5{,}78$ м/с^2 .

Задача 10. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r}=(A+Bt^2)\vec{i}+Ct\vec{j}$, где $\vec{i}$, $\vec{j}$ – орты координатных осей, $A=10$ м , $B=-0{,}5$ м/с^2 , $C=3$ м/с . Вычислить в момент времени $t=3$ с ее нормальное ускорение a_n и тангенциальное ускорение a_τ .

Дано:
$\vec{r}=(A+Bt^2)\vec{i}+Ct\vec{j}$,
$A=10$ м ,
$B=-0{,}5$ м/с^2 ,
$C=3$ м/с ,
$t=3$ с

$a_\tau=?$, $a_n=?$

Чтобы найти тангенциальное ускорение, надо знать модуль скорости точки

$$a_\tau=\frac{d|v|}{dt} .$$

Найдем модуль скорости через проекции скорости на координатные оси

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2} .$$

Проекции скорости на координатные оси

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d(A+Bt^2)}{dt}=2Bt ; \quad v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d(Ct)}{dt}=C .$$

Тогда модуль скорости

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=\sqrt{(2Bt)^2+C^2} . \qquad (11.12)$$

Скорость точки можно записать следующим образом:

$$v=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=2Bt\vec{i}+C\vec{j} . \qquad (11.13)$$

Вычислим тангенциальное ускорение:

$$a_\tau=\frac{d|v|}{dt}=\frac{d\left(\sqrt{(2Bt)^2+C^2}\right)}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{(2Bt)^2+C^2}}4B^2\cdot 2t=\frac{4B^2t}{\sqrt{(2Bt)^2+C^2}} .$$

Подставим численные значения, получим

$$a_\tau(t=3)=\frac{4B^2t}{\sqrt{(2Bt)^2+C^2}}=\frac{4\cdot(-0,5)^2\cdot 3}{\sqrt{(-2\cdot 0,5\cdot 3)^2+3^2}}=\frac{3}{4,24}=0,71 \text{ м/с}^2 .$$

Нормальное ускорение можно рассчитать, если известно полное ускорение и тангенциальное. Тангенциальное ускорение мы нашли, определим полное:

$$\vec a = a_x\vec i + a_y\vec j = \frac{dv_x}{dt}\vec i + \frac{dv_y}{dt}\vec j = \frac{d(2Bt)}{dt}\vec i + \frac{d(C)}{dt}\vec j = 2B\vec i \ ;$$

$$\left|\vec a\left(t=3\right)\right| = \left|2B\right| = 1 \text{ м/с}^2 .$$

Выразим нормальное ускорение из уравнения $a^2 = a_\tau{}^2 + a_n{}^2$, откуда

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} \ .$$

И, подставив численные значения, получим

$$a_n(t=3) = \sqrt{a^2 - a_\tau{}^2} = \sqrt{1-0,71^2} = 0,7 \ \text{ м/с}^2 .$$

Ответ: $a_\tau = 0,71$ м/с^2; $a_n = 0,7$ м/с^2.

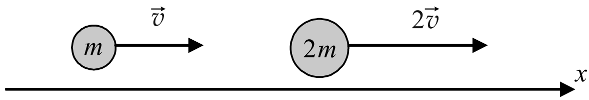
11.3. СИСТЕМА ЦЕНТРА МАСС. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Задача 11. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шары массами m и $2m$ движутся вдоль одной прямой. Скорости шаров $\vec v$ и $2\vec v$ соответственно. Найти скорости шаров в системе центра инерции $\vec v_1'$ и $\vec v_2'$, если:

а) шары движутся в одну сторону;

б) шары движутся навстречу друг другу.

Дано:	Рассмотрим условие а): шары движутся в одну сторону, нарисуем их скорости в ЛСО.
$m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $\vec v_1 = \vec v$, $\vec v_2 = 2\vec v$	
$\vec v_1 = ?$, $\vec v_2 = ?$	



По закону сложения скоростей, скорости шаров в системе центра инерции

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_C\,,\ \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_C\,. \tag{11.14}$$

Для их нахождения сначала надо вычислить по (3.5) скорость центра масс $\vec{v}_C$:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}\,. \tag{11.15}$$

В проекциях на ось x с учетом условия задачи выражение (11.15) примет вид

$$v_C = \frac{mv + 2m2v}{m + 2m} = \frac{5mv}{3m} = \frac{5}{3}v\,, \tag{11.16}$$

т. е. центр масс системы двух шаров движется в положительном направлении оси x с найденной скоростью.

Теперь можно найти скорости шаров в системе центра инерции, подставив в первое уравнение (11.14) проекции скоростей на ось x:

$$v_1' = v_1 - v_C = v - \frac{5}{3}v = -\frac{2}{3}v\,;\quad v_2' = v_2 - v_C = 2v - \frac{5}{3}v = \frac{1}{3}v\,.$$

Проверим, правильно ли мы нашли скорости: в системе центра масс сумма импульсов должна равняться нулю:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0\,;\ m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = 0\,.$$

Подставим найденные значения скоростей:

$$-\frac{2}{3}mv + \frac{1}{3}2mv = 0\,.$$

Теперь рассмотрим условие б): случай движения шаров навстречу друг другу (рис. 11.8).

Рис. 11.8

В этом случае в уравнении (12.16) поменяется знак:

$$v_C = \frac{mv - 2m2v}{m + 2m} = -\frac{3mv}{3m} = -v .$$

Найдем скорости шаров в системе центра инерции:

$$v_1' = v_1 - v_C = v + v = 2v ;$$

$$v_2' = v_2 - v_C = -2v + v = -v .$$

Проверим, правильно ли определены скорости: в системе центра масс сумма импульсов должна равняться нулю:

$$2mv - 2mv = 0 .$$

Ответ. *а*) $v_1' = -\frac{2}{3}v$; $v_2' = \frac{1}{3}v$; *б*) $v_1' = 2v$; $v_2' = -v$.

Задача 12. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) одинаковые шары массой m движутся перпендикулярно друг другу. Скорости шаров одинаковы по модулю и равны v. Найти скорости шаров в системе центра инерции $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$.

Дано:
$m_1 = m_2 = m$, $m_2 = 2m$,
$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$, $\vec{v}_2' = 2\vec{v}$

$\vec{v}_1' = ?$, $\vec{v}_2' = ?$

Нарисуем рисунок для движения шаров в ЛСО (рис. 11.9)

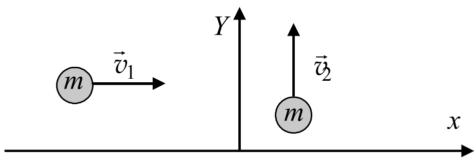


Рис. 11.9

Эта задача отличается от предыдущей тем, что здесь движение происходит в двух направлениях, поэтому скорость центра масс будет иметь две проекции: на горизонтальную ось x и на вертикальную ось y.

Найдем эти проекции:

$$v_{Cx} = \frac{mv_{1x} + mv_{2x}}{m + m} = \frac{mv + 0}{2m} = \frac{v}{2} . \qquad (11.17)$$

При вычислениях в (11.17) учтено, что проекция скорости первого шара на ось x – это v, а проекция скорости второго шара равна нулю, потому что он движется перпендикулярно оси x.

Аналогично для проекции скорости центра масс на ось y

$$v_{Cy} = \frac{mv_{1y} + mv_{2y}}{m+m} = \frac{0 + mv}{2m} = \frac{v}{2}. \qquad (11.18)$$

Тогда проекции скоростей шаров на ось x в СЦИ

$$v'_{1x} = v_{1x} - v_{Cx} = v - \frac{v}{2} = \frac{v}{2}; \;\; v'_{2x} = v_{2x} - v_{Cx} = 0 - \frac{v}{2} = -\frac{v}{2}; \qquad (11.19)$$

проекции скоростей шаров на ось y

$$v'_{1y} = v_{1y} - v_{Cy} = 0 - \frac{v}{2} = -\frac{v}{2}; \;\; v'_{2y} = v_{2y} - v_{Cy} = \frac{v}{2} - 0 = \frac{v}{2}. \qquad (11.20)$$

Найдем модули скоростей в СЦИ, подставляя значения из (11.19) и (11.20):

$$|v'_1| = \sqrt{(v'_{1x})^2 + (v'_{1y})^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(-\frac{v}{2}\right)^2} = \frac{v}{\sqrt{2}};$$

$$|v'_2| = \sqrt{(v'_{2x})^2 + (v'_{2y})^2} = \sqrt{\left(-\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2} = \frac{v}{\sqrt{2}}.$$

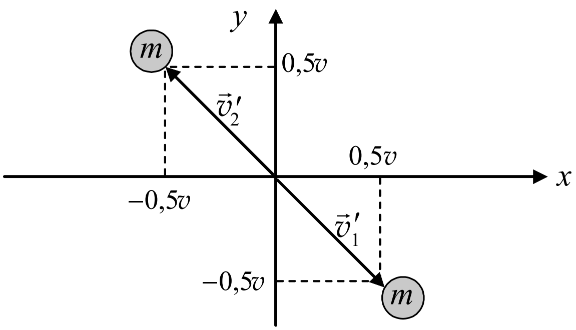


Рис. 11.10

Мы видим, что модули скоростей шаров в СЦИ одинаковы, чего и следовало ожидать, так как массы шаров одинаковы, а векторная сумма импульсов должна равняться нулю.

Нарисуем, как движутся шары в СЦИ (рис. 11.10).

Ответ. $|v_1'| = |v_2'| = \dfrac{v}{\sqrt{2}}$.

Задача 13. Снаряд массой $m = 5$ кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Скорость снаряда в верхней точке траектории $v = 300$ м/с. Больший осколок массой $m_1 = 3$ кг полетел в обратном направлении со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Найти скорость второго осколка v_2.

Дано:	
$m = 5$ кг, $m_1 = 3$ кг, $v = 300$ м/с, $v_1 = 100$ м/с	В верхней точке траектории скорость снаряда направлена горизонтально (рис. 11.11).
$v_2 = ?$	

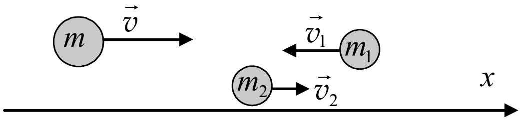


Рис. 11.11

Запишем закон сохранения импульса:

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 .$$

В проекциях на ось x

$$mv = -m_1 v_1 + m_2 v_2 . \qquad (11.21)$$

Направление скорости второго осколка мы не знаем, если в результате вычислений получим отрицательное число, значит, искомая скорость направлена в противоположном выбранному нами направлению.

Масса второго осколка $m_2 = m - m_1 = 5 - 3 = 2$ кг. Из (11.21) скорость второго осколка

$$v_2 = \frac{mv + m_1 v_1}{m_2} = \frac{5 \cdot 300 + 3 \cdot 100}{2} = 900 \text{ м/с} .$$

Ответ. $v_2 = 900$ м/с.

Задача 14. Снаряд массой $m = 10$ кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории разорвался на два осколка. Скорость снаряда в верхней точке траектории $v = 200$ м/с. Меньший осколок массой $m_1 = 3$ кг полетел в обратном направлении со скоростью $v_1 = 400$ м/с под углом $\varphi_1 = 60°$ к направлению движения снаряда. Найти скорость второго осколка v_2 и угол φ_2, под которым он отлетел.

Дано:	
$m = 10$ кг, $m_1 = 3$ кг, $v = 200$ м/с, $v_1 = 400$ м/с	В верхней точке траектории скорость снаряда направлена горизонтально, но в отличие от предыдущей задачи необходимо применять закон сохранения импульса в двух направлениях: *x* и *y* (рис. 11.12).
$v_2 = ?$	

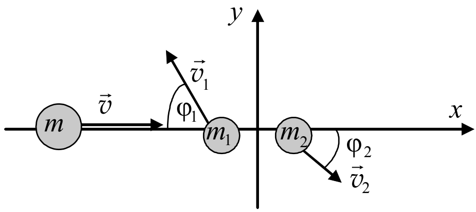


Рис. 11.12

Запишем проекции импульса на горизонтальную ось *x* до и после разрыва:

$$mv = -m_1 v_1 \cos\varphi_1 + m_2 v_2 \cos\varphi_2 . \tag{11.22}$$

Знак «–» в (11.22) показывает, что первый осколок полетел в обратном направлении.

Запишем проекции импульса на вертикальную ось *y* до и после разрыва; до разрыва снаряд летел горизонтально, поэтому его проекция на ось *y* будет нулевой:

$$0 = m_1 v_1 \sin\varphi_1 - m_2 v_2 \sin\varphi_2 . \tag{11.23}$$

Выразим из (11.23) скорость второго осколка

$$v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\varphi_1}{m_2 \sin\varphi_2}$$

и подставим в (11.22):

$$mv = -m_1 v_1 \cos\varphi_1 + \frac{m_2 m_1 v_1 \sin\varphi_1}{m_2 \sin\varphi_2} \cos\varphi_2 ,$$

$$mv = -m_1 v_1 \cos\varphi_1 + m_1 v_1 \sin\varphi_1 \operatorname{ctg}\varphi_2 . \qquad (11.24)$$

Выразим из (11.24) $\operatorname{ctg}\varphi_2$:

$$\operatorname{ctg}\varphi_2 = \frac{mv + m_1 v_1 \cos\varphi_1}{m_1 v_1 \sin\varphi_1} = \frac{10 \cdot 200 + 3 \cdot 400 \cdot \cos 60^\circ}{3 \cdot 400 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{26}{10{,}39} = 2{,}5 ,$$

$$\varphi_2 = 21{,}8^\circ .$$

Для того чтобы найти скорость второго осколка v_2, подставим найденное значение угла в (11.23) и учтем, что масса второго осколка $m_2 = m - m_1 = 10 - 3 = 7$ кг:

$$v_2 = \frac{m_1 v_1 \sin\varphi_1}{m_2 \sin\varphi_2} = \frac{3 \cdot 400 \cdot \sin 60^\circ}{7 \cdot \sin 21{,}8^\circ} = \frac{1039{,}23}{2{,}6} = 399{,}8 \text{ м/с} .$$

Ответ: $v_2 = 399{,}8$ м/с; $\varphi_2 = 21{,}8^\circ$.

11.4. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

Задача 15. Материальная точка массой $m = 0{,}5$ кг движется по закону $x = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где $A = 10$ м, $B = 2$ м/с, $C = 4$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3. Определить мощность N, затраченную на движение точки за время $t = 5$ с.

Дано:
$m = 0{,}5$ кг,
$A = 10$ м, $B = 2$ м/с,
$C = 4$ м/с^2,
$D = 1$ м/с^3,
$t = 5$ с

$N = ?$

Согласно формуле (4.12) мощность

$$N = (\vec{F}\vec{v}) .$$

Следовательно, из уравнения движения материальной точки надо найти скорость и ускорение.

Скорость материальной точки

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(A - Bt + Ct^2 - Dt^3)}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2. \qquad (11.25)$$

Ускорение материальной точки

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(-B + 2Ct - 3Dt^2)}{dt} = 2C - 6Dt. \qquad (11.26)$$

Силу найдем, умножив ускорение (11.26) на массу m:

$$F = ma = m(2C - 6Dt). \qquad (11.27)$$

Мощность можно найти с учетом (11.25) и (11.27):

$$N = Fv = m(2C - 6Dt)(-B + 2Ct - 3Dt^2) =$$

$$= 0{,}5 \cdot (2 \cdot 4 - 6 \cdot 1 \cdot 5) \cdot (-3 + 2 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot 1 \cdot 5^2) = 0{,}5 \cdot (-22) \cdot (-38) = 418 \text{ Вт}.$$

Ответ. $N = 418$ *Вт*.

Задача 16. Тело массой $m = 5$ кг движется под действием силы $\vec{F} = 4t\vec{i} + 9t^2\vec{j}$. Определить мощность N и работу A, затраченные на движение точки за время $t = 2$ с.

Дано:	Согласно формуле (4.12)
$m = 5$ кг,	$N = (\vec{F}\vec{v}) = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z$.
$\vec{F} = 4t\vec{i} + 9t^2\vec{j}$,	
$t = 2$ с	В нашей задаче только две проекции силы, поэтому мощность будет вычисляться по формуле
$N = ?$ $A = ?$	

$$N = F_x v_x + F_y v_y. \qquad (11.28)$$

Известны проекции силы на координатные оси F_x и F_y, но неизвестны проекции скорости v_x и v_y. Их можно найти из проекций ускорения на координатные оси:

$$v_x = \int_0^t a_x dt, \; a_x = \frac{F_x}{m} = \frac{4t}{m}; \qquad (11.29)$$

$$v_y = \int_0^t a_y dt\,;\; a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{9t^2}{m}. \qquad (11.30)$$

Вычислим интегралы (11.29) и (11.30):

$$v_x = \int_0^t a_x dt = \int_0^t \frac{4t}{m} dt = \frac{4t^2}{2m} = \frac{2t^2}{m}; \qquad (11.31)$$

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \int_0^t \frac{9t^2}{m} dt = \frac{9t^3}{3m} = \frac{3t^3}{m}. \qquad (11.32)$$

Подставив (11.31) и (11.32) в (11.28), получим

$$N = F_x v_x + F_y v_y = 4t \cdot \frac{2t^2}{m} + 9t^2 \frac{3t^3}{m} = \frac{8t^3 + 27t^5}{m} =$$

$$= \frac{8 \cdot 2^3 + 27 \cdot 2^5}{5} = \frac{8 \cdot 8 + 27 \cdot 32}{5} = \frac{928}{5} = 185,6 \text{ Вт.}$$

Работа вычисляется по (5.13):

$$A = \int_0^t N dt = \int_0^t \frac{8t^3 + 27t^5}{m} dt = \frac{8t^4}{4m} + \frac{27t^6}{6m} =$$

$$= \frac{2t^4}{m} + \frac{9t^6}{2m} = \frac{2 \cdot 2^4}{5} + \frac{9 \cdot 2^6}{2 \cdot 5} = \frac{32}{5} + \frac{576}{10} = 6,4 + 5,76 = 12,16 \text{ Дж.}$$

Ответ: $N = 185,6$ Вт; $A = 12,16$ Дж.

Задача 17. На тело действует равномерно возрастающая сила. Найти работу A этой силы на участке пути длиной $s = 15$ м, если в начале пути сила, действующая на тело, была $F_1 = 20$ Н, а в конце пути $F_2 = 50$ Н.

Дано:	Нарисуем график зависимости силы от перемещения. По условию задачи сказано, что сила равномерно возрастает, значит график – это прямая линия, начинающаяся в точке с координатами $(0, F_1)$ и заканчивающаяся в точке с координатами $(0, F_2)$ (рис. 11.13).
$s = 15$ м, $F_1 = 20$ Н, $F_2 = 50$ Н	
$A = ?$	

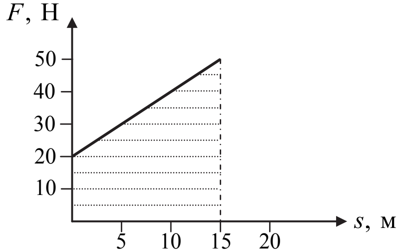


Рис. 11.13

Геометрический смысл работы – это площадь под кривой зависимости проекции силы на вектор перемещения F_s от перемещения s. Таким образом, надо найти площадь заштрихованной фигуры (трапеции), что легко сделать, используя геометрию.

$$A = \frac{F_1 + F_2}{2} s = \frac{20 + 50}{2} 15 = 525 \text{ Дж}.$$

Ответ. $A = 525$ Дж.

Задача 18. Тело массой $m = 500$ кг поднимают вверх равноускоренно на высоту $h = 4$ м за время $t = 8$ с. Найти работу A, затраченную на подъем тела.

Дано:
$m = 500$ кг,
$h = 4$ м,
$t = 8$ с

$A = ?$

Изобразим силы, действующие на тело, – это сила тяжести (направлена вниз) и сила, с которой тянут тело $\vec{F}_{\text{тяги}}$, направленная вверх (рис. 11.14).

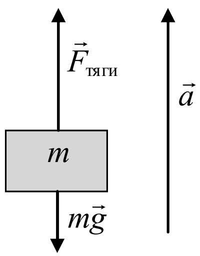


Рис. 11.14

Запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тяги}} + m\vec{g},$$

или в проекциях

$$ma = F_{\text{тяги}} - mg. \qquad (11.33)$$

Работа силы тяги $A = F_{\text{тяги}} h$, где h – высота, на которую поднимают тело. Из (11.33)

$$F_{\text{тяги}} = m(a+g)\ .$$

Ускорение a нам неизвестно, его можно вычислить из известного времени подъема t, высоты подъема h и условия равноускоренного движения:

$$h = \frac{at^2}{2},\ \ a = \frac{2h}{t^2}\ .$$

Тогда сила тяги

$$F_{\text{тяги}} = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right).$$

И работа, затраченная на подъем,

$$A = m\left(\frac{2h}{t^2} + g\right)h = 500\left(\frac{2\cdot 4}{8^2} + 9{,}8\right)4 = 19{,}85\ \text{ кДж}\ .$$

Ответ: $A = 19{,}85$ кДж.

Задача 19. Тело массой $m = 500$ г брошено горизонтально с башни высотой $h = 40$ м со скоростью $v = 20$ м/с . Найти кинетическую T и потенциальную энергии U через время $t = 2$ с от момента броска.

Дано: $m = 500$ г $= 0{,}5$ кг , $h = 40$ м , $t = 2$ с , $v = 20$ м/с $T = ?$, $U = ?$	Скорость тела во время полета будет иметь две составляющие: горизонтальную $v_x = v$, которая не меняется во время полета (мы пренебрегаем сопротивлением воздуха), и вертикальную, зависящую от времени полета, $v_y = gt$.

Модуль скорости $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{v^2 + (gt)^2}$.

Кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(v^2 + (gt)^2\right)^2}{2} = \frac{0{,}5\left(20^2 + (9{,}8\cdot 2)^2\right)^2}{2} =$$

$$= \frac{0{,}5\cdot(400 + 384{,}16)^2}{2} = 153{,}73\ \text{ кДж.}$$

Чтобы найти потенциальную энергию U, надо знать, на какой высоте h_1 в этот момент будет находиться тело. Вычислим расстояние y, которое пролетит тело по вертикали за время t:

$$y = \frac{gt^2}{2} = \frac{9{,}8 \cdot 2^2}{2} = 19{,}6 \text{ м}.$$

Тогда, высота h_1, на которой будет находиться тело,

$$h_1 = h - y = 40 - 19{,}6 = 20{,}4 \text{ м}.$$

Потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли

$$U = mgh = 0{,}5 \cdot 9{,}8 \cdot 20{,}4 = 100 \text{ Дж}.$$

Ответ: $U = 100$ Дж; $T = 153{,}73$ кДж.

11.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Задача 20. Пуля массой $m = 50$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 60$ м/с, попадает в баллистический маятник массой $M = 5$ кг и застревает в нем. Найти:

1) высоту h, на которую поднимется маятник после удара;

2) угол отклонения маятника θ, если его длина $\ell = 1$ м.

Дано:
$m = 50$ г $= 0{,}05$ кг,
$M = 5$ кг,
$\ell = 1$ м,
$v = 200$ м/с

$h = ?$, $\theta = ?$

Сделаем чертеж к задаче (рис. 11.15).

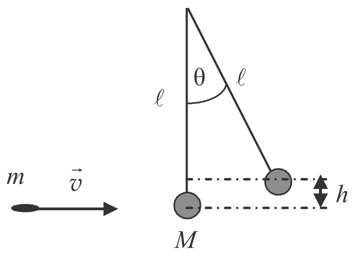


Рис. 11.15

Чтобы решить задачу, необходимо применить законы сохранения импульса и энергии.

Пуля застревает в маятнике – значит, удар абсолютно неупругий, и для него закон сохранения импульса примет вид

$$mv = (m + M)u\,, \tag{11.34}$$

где u – скорость маятника вместе с пулей после удара.

Для нахождения высоты подъема маятника применим закон сохранения энергии: кинетическая энергия маятника вместе с пулей равна потенциальной энергии:

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh\,,$$

откуда

$$h = \frac{u^2}{2g}\,. \tag{11.35}$$

Из (11.34) найдем скорость маятника вместе с пулей после удара

$$u = \frac{mv}{m+M} = \frac{0{,}05 \cdot 200}{0{,}05 + 5} = \frac{10}{5{,}05} = 1{,}98 \text{ м/с}$$

и подставим в (11.35):

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{1{,}98^2}{2 \cdot 9{,}8} = \frac{3{,}92}{19{,}6} = 0{,}2 \text{ м}\,.$$

Из рис. 11.15 видно, что высота h, на которую поднимается маятник, связана с длиной маятника ℓ и углом отклонения θ:

$$h = \ell - \ell\cos\theta\,,$$

тогда

$$\cos\theta = \frac{\ell - h}{\ell} = \frac{1 - 0{,}2}{1} = 0{,}8\,,$$

$$\theta = \arccos 0{,}8 = 36{,}87° = 36°52'\,.$$

Ответ: $h = 0{,}2$ м; $\theta = 36°52'$.

Задача 21. Шар массой $m_1 = 500$ г налетает на покоящийся шар $m_2 = 300$ г. Импульс движущегося шара $p_1 = 3$ кг·м/с. Удар центральный, абсолютно упругий. Найти:

1) скорости шаров после удара $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$;

2) изменение импульса первого шара $\Delta\vec{p}_1$;

3) кинетические энергии шаров после удара T_1' и T_2';

4) изменение кинетической энергии первого шара ΔT_1.

Дано:	
$m_1 = 500$ г $= 0,5$ кг, $m_2 = 300$ г $= 0,3$ кг, $P_1 = 3$ кг·м/с	1. Запишем закон сохранения импульса $$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'.$$ Мы не знаем, как будут двигаться шары после удара, поэтому предположим, что они оба летят в одну сторону в направлении движения до удара первого шара. Если в результате вычислений получим отрицательную скорость, значит, шар двигался в противоположном направлении.
1) $\vec{v}_1' = ?$, $\vec{v}_2' = ?$ 2) $\Delta\vec{p}_1 = ?$ 3) $T_1' = ?$, $T_2' = ?$ 4) $\Delta T_1 = ?$	

Скорость первого шара до удара можно найти из известного импульса первого шара и его массы:

$$v_1 = \frac{p_1}{m_1} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ м/с}.$$

Тогда закон сохранения импульса в проекциях примет вид

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'. \tag{11.36}$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \tag{11.37}$$

Мы получили два уравнения с двумя неизвестными, которые надо решить. Перепишем (11.36) и (11.37):

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2'; \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2 v_2'^2. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое с учетом формулы разложения разности квадратов, получим

$$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2 v_2', \\ v_1 + v_1' = v_2'. \end{cases} \tag{11.38}$$

Теперь подставим в системе (11.38) второе уравнении в первое, получим

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_1 + v_1'). \tag{11.39}$$

Это уравнение можно решить относительно неизвестной скорости первого шара после удара v_1':

$$(m_1 - m_2)v_1 = v_1'(m_2 + m_1),$$

откуда

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} = \frac{(0,5 - 0,3)\cdot 6}{0,5 + 0,3} = \frac{1,2}{0,8} = 1,5 \text{ м/с}.$$

Скорость второго шара проще всего найти из второго уравнения (11.38):

$$v_2' = v_1 + v_1' = 6 + 1,5 = 7,5 \text{ м/с}.$$

Скорости обоих шаров после удара получились положительными, значит, мы сделали правильное предположение о направлениях движения шаров после удара.

2. Чтобы найти изменение импульса первого шара, необходимо сделать рисунок (рис. 11.16).

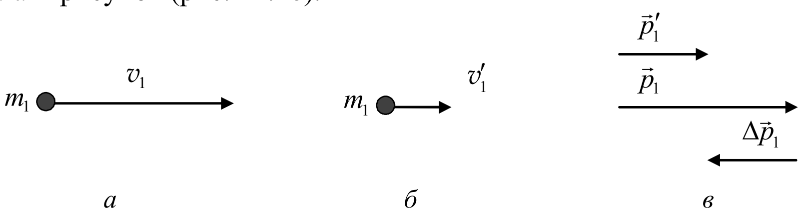


Рис. 11.16:

а – до удара; *б* – после удара; *в* – изменение импульса $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1' - \vec{p}_1$

Как видно из рисунка,

$$\Delta p_1 = p_1 - p_1' = m_1(v_1 - v_1') = 0,5(1,5 - 6) = -2,25 \text{ кг}\cdot\text{м/с}.$$

3. Кинетические энергии шаров после удара T_1' и T_2' легко находятся, поскольку мы знаем скорости шаров после удара v_1' и v_2':

$$T_1' = \frac{m_1 v_1'^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 1,5^2}{2} = 0,56 \text{ Дж},$$

$$T_2' = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{0,3 \cdot 7,5^2}{2} = 8,44 \text{ Дж}.$$

4. Изменение кинетической энергии первого шара

$$\Delta T_1 = T_1' - T_1 = \frac{m_1 v_1'^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = 0,56 - 9 = -8,44 \text{ Дж}.$$

Последнюю формулу можно было получить и из закона сохранения энергии

$$T_1 = T_1' + T_2', \; \Delta T_1 = T_1' - T_1 = -T_2'.$$

Ответ: 1) $v_1' = 1,5$ м/с; $v_2' = 7,5$ м/с; 2) $\Delta p_1 = -2,25$ кг $\cdot$ м/с;

3) $T_1' = 0,56$ Дж $T_2' = 8,44$ Дж; 4) $\Delta T_1 = -8,44$ Дж.

Задача 22. Шар массой $m_1 = 500$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 10$ м/с, налетает на покоящийся шар массой $m_2 = 300$ г. Удар абсолютно неупругий. Найти тепло Q, выделившееся при ударе.

Дано:
$m_1 = 500$ г $= 0,5$ кг,
$m_2 = 300$ г $= 0,3$ кг,
$v_1 = 10$ м/с

$Q = ?$

При абсолютно неупругом ударе шары слипаются и движутся вместе со скоростью u. Запишем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u,$$

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,5 + 0,3} = 6,25 \text{ м/с}.$$

Закон сохранения энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} + Q.$$

Тогда выделившееся тепло

$$Q = \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{0,5 \cdot 10^2}{2} - \frac{(0,5 + 0,3) \cdot 6,25^2}{2} =$$

$$= 25 - 15,63 = 9,37 \text{ Дж.}$$

Ответ: $Q = 9,37$ Дж.

11.6. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Задача 23. Диск радиусом $R = 8$ см вращается по закону $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 10$ рад, $B = -2$ рад/с^2, $C = 0,3$ рад/с^3. Для момента времени $t = 2$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a.

Дано:
$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$,
$A = 10$ рад,
$B = -2$ рад/с,
$C = 0,3$ рад/с^2,
$R = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м,
$t = 2$ с

$a_n = ?$, $a_\tau = ?$, $a = ?$

Нормальное ускорение точки вычисляется по формуле (7.7)

$$a_n = \omega^2 R. \qquad (11.40)$$

Следовательно, нужно найти угловую скорость точки

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2Bt + 3Ct^2. \qquad (11.41)$$

После подстановки численных значений получим

$$\omega = -2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0,3 \cdot 3^2 = 0,1 \text{ рад/с.}$$

Подставим найденную угловую скорость в (11.40), получим

$$a_n = \omega^2 R = 0,1^2 \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

Тангенциальное ускорение точки вычисляется по формуле (7.6)

$$a_\tau = R\varepsilon, \qquad (11.42)$$

где $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение. Чтобы его определить, еще раз продифференцируем (11.41) по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d(2Bt + 3Ct^2)}{dt} = 2B + 6Ct = -2 \cdot 2 + 6 \cdot 0{,}3 \cdot 2 = -0{,}4 \text{ рад/с}^2 .$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = R\varepsilon = 8 \cdot 10^{-2} \cdot (-0{,}4) = -3{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 .$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{(-3{,}2 \cdot 10^{-2})^2 + (8 \cdot 10^{-4})^2} = 0{,}032 \text{ м/с}^2 .$$

Ответ. $a_n = 8 \cdot 10^{-4}$ м/с^2; $a_\tau = -3{,}2 \cdot 10^{-2}$м/с^2; $a = 0{,}032$ м/с^2.

Задача 24. Покоящийся диск радиусом 5 см начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2. Для момента времени $t = 2$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a .

Дано:	
$\varepsilon = 0{,}5$ рад/с^2, $R = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м, $t = 2$ с	Тангенциальное ускорение можно сразу же вычислить: $$a_\tau = R\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}5 = 2{,}5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2 .$$
$a_n = ?$, $a_\tau = ?$, $a = ?$	Чтобы найти нормальное ускорение, надо знать угловую скорость ω .

По аналогии с формулой скорости при равноускоренном движении $(v = v_0 + at)$ можно записать формулу для равноускоренного вращательного движения, заменив скорость угловой скоростью ω, а ускорение – угловым ускорением ε .

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t = \varepsilon t ,$$

поскольку в начальный момент времени диск покоился. После подстановки численных значений получим

$$\omega = \varepsilon t = 0,5 \cdot 2 = 1 \text{ рад/с}.$$

Нормальное ускорение точки

$$a_n = \omega^2 R = 1 \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м/с}^2.$$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2} = \sqrt{(2,5 \cdot 10^{-2})^2 + (5 \cdot 10^{-2})^2} = 0,31 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 5 \cdot 10^{-2}$ м/с^2; $a_\tau = 2,5 \cdot 10^{-2}$м/с^2; $a = 0,31$ м/с^2.

Задача 25. Якорь электродвигателя, вращающийся с частотой $n = 50$ с$^{-1}$, после выключения тока остановился. До остановки якорь сделал $N = 628$ об. Найти угловое ускорение ε якоря.

Дано:	
$n = 50$ с$^{-1}$,	Найдем сначала угол, на который повернулся якорь. При одном обороте якорь поворачивается на угол 2π. За N оборотов якорь повернется на угол
$N = 628$ об	
$\varepsilon = ?$	

$$\varphi = 2\pi N. \tag{11.43}$$

Якорь остановился, значит, движение равнозамедленное и для него зависимость угла поворота от времени можно записать так:

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = 2\pi n t - \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{11.44}$$

Приравняем (11.43) и (11.44), получим

$$2\pi N = 2\pi n t - \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{11.45}$$

В (11.45) нам неизвестно время вращения t. Его можно найти из условия остановки диска:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = 0,$$

или

$$2\pi n - \varepsilon t = 0.$$

Откуда

$$t = \frac{2\pi n}{\varepsilon}. \qquad (11.46)$$

Подставив (11.46) в (11.45), получим

$$2\pi N = 2\pi n \frac{2\pi n}{\varepsilon} t - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{2\pi n}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{\varepsilon} - \frac{4\pi^2 n^2}{2\varepsilon} = \frac{4\pi^2 n^2}{2\varepsilon}.$$

Выражаем угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 n^2}{N} = \frac{3{,}14^2 \cdot 50^2}{628} = 39{,}3 \text{ рад/с}^2.$$

Ответ. $\varepsilon = 39{,}3$ рад/с^2.

11.7. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задача 26. Шарики массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$ и $m_4 = 4m$ ($m = 20$ г) закреплены на тонком невесомом стержне через равные расстояния $\ell = 10$ см так, как показано на рис. 11.17. Найти момент инерции J системы относительно оси, проходящей через точку O на краю стержня перпендикулярно ему.

Дано:
$m_1 = m$, $m_2 = 2m$,
$m_3 = 3m$, $m_4 = 4m$,
$m = 20$ г,
$\ell = 10$ см

$J = ?$

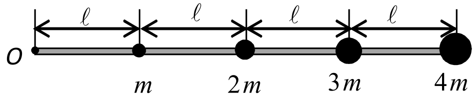


Рис. 11.17

Момент инерции системы материальных точек вычисляется по формуле (7.9)

$$J = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 .$$

Применим эту формулу к нашей задаче:

$$J = m\ell^2 + 2m(2\ell)^2 + 3m(3\ell)^2 + 4m(4\ell)^2 =$$

$$= m\ell^2(1 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 100m\ell^2 = 100 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}02 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ. $J = 0{,}02$ кг $\cdot$ м^2.

Задача 27. Два проволочных кольца массами $m_1 = m$ и $m_2 = 2m$ $(m = 50$ г$)$ и радиусами $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$ $(R = 5$ мм$)$ соединены между собой и могут вращаться вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости колец (рис. 11.18). Найти момент инерции J системы относительно оси, проходящей через точку O.

Дано:
$m_1 = m$, $m_2 = 2m$,
$m = 50$ г $= 0{,}05$ кг,
$R_1 = R$, $R_2 = 2R$,
$R = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м

$J = ?$

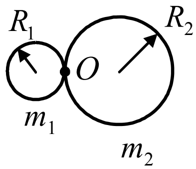


Рис. 11.18

Момент инерции каждого из колец вычисляется по теореме Штейнера (7.23). Для первого кольца момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (центр первого кольца),

$$J_{C1} = m_1 R_1^2 = mR^2 .$$

Расстояние между центром масс и точкой O для первого кольца $R_1 = R$. Тогда теорема Штейнера для этого кольца

$$J_{O1} = J_{C1} + m_1 R_1^2 = m_1 R_1^2 + m_1 R_1^2 = 2mR^2 . \qquad (11.47)$$

Для второго кольца момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс (центр второго кольца),

$$J_{c2} = m_2 R_2^2 = 2m(2R)^2 = 8mR^2 .$$

Расстояние между центром масс и точкой O для второго кольца $R_2 = 2R$. Тогда теорема Штейнера для этого кольца

$$J_{O2} = J_{C2} + m_2 R_2^2 = 2m_2 R_2^2 = 16mR^2 . \qquad (11.48)$$

Суммарный момент инерции колец относительно точки O – сумма (11.48) и (11.47):

$$J_O = J_{O1} + J_{O2} = 8mR^2 + 16mR^2 = 24mR^2 =$$

$$= 24 \cdot 0,05 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ. $J = 3 \cdot 10^{-5}$ кг · м^2.

Задача 28. Найти момент инерции J проволочного прямоугольника относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно ему. Стороны прямоугольника $a = 20$ см и $b = 10$ см. Масса равномерно распределена по прямоугольнику с линейной плотностью $\tau = 0,1$ кг/м (рис. 11.19).

Дано:
$a = 20$ см $= 0,2$ м,
$b = 10$ см $= 0,1$ м,
$\tau = 0,1$ кг/м

$J = ?$

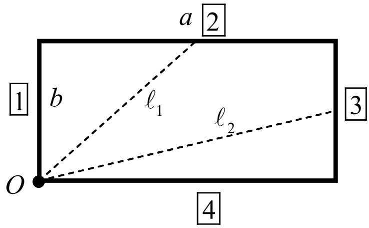


Рис. 11.19

Момент инерции сложной фигуры вычисляется путем разложения на отдельные простые фигуры. В частности, проволочный прямоугольник можно представить как четыре стержня. Тогда момент инерции прямоугольника

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \qquad (11.49)$$

Момент инерции всех стержней относительно оси, проходящей через точку O, вычисляется с помощью теоремы Штейнера (7.23).
Массы стержней

$$m_1 = m_3 = \tau b\,; \quad m_2 = m_4 = \tau a\,.$$

Для первого стержня

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 b^2 + m_1 \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_1 b^2 = \frac{1}{3} \tau b^3. \qquad (11.50)$$

Для четвертого стержня

$$J_4 = \frac{1}{12} m_4 a^2 + m_4 \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m_4 a^2 = \frac{1}{3} \tau a^3 . \qquad (11.51)$$

Для третьего стержня

$$J_3 = \frac{1}{12} m_3 b^2 + m_3 \ell_2{}^2 = m_3 \left(\frac{b^2}{12} + a^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right) =$$

$$= m_3 \left(\frac{b^2}{3} + a^2 \right) = \tau b \left(\frac{b^2}{3} + a^2 \right). \qquad (11.52)$$

Для второго стержня

$$J_2 = \frac{1}{12} m_2 a^2 + m_2 \ell_1{}^2 = m_2 \left(\frac{a^2}{12} + b^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2 \right) =$$

$$= m_2 \left(\frac{a^2}{3} + b^2 \right) = \tau \mathrm{a} \left(\frac{a^2}{3} + b^2 \right). \qquad (11.53)$$

Подставив (11.50) – (11.53) в (11.49), получим

$$J = \frac{1}{3} \tau b^3 + \tau a \left(\frac{a^2}{3} + b^2 \right) + \tau b \left(\frac{b^2}{3} + a^2 \right) + \frac{1}{3} \tau a^3 = \frac{2}{3} \tau (a^3 + b^3) + \tau ab(a + b) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}2^3 + 0{,}1^3) + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot (0{,}2 + 0{,}1) = 12 \cdot 10^{-4} \ \text{кг} \cdot \text{м}^2 .$$

Ответ. $J = 12 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2.

11.8. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задача 29. Стержень массой $m = 500$ г и длиной $\ell = 0{,}8$ м может вращаться вокруг оси, проходящей через его центр масс C перпендикулярно стержню. На стержень действуют силы, Н: $\left|\vec{F}_1\right| = 150$, $\left|\vec{F}_2\right| = 90$, $\left|\vec{F}_3\right| = 75$, $\left|\vec{F}_4\right| = 120$, $\left|\vec{F}_5\right| = 160$, $\left|\vec{F}_6\right| = 180$, $\left|\vec{F}_7\right| = 200$ так, как показано на рис. 11.20. Угол $\alpha = 30°$. Найти угловое ускорение вращения стержня ε.

Дано:
$|\vec{F}_1| = 150$ Н, $|\vec{F}_2| = 90$ Н,
$|\vec{F}_3| = 75$ Н, $|\vec{F}_4| = 120$ Н,
$|\vec{F}_5| = 160$ Н, $|\vec{F}_6| = 180$ Н,
$|\vec{F}_7| = 200$ Н,
$m = 500$ г, $\alpha = 30°$,
$\ell = 0{,}8$ м

$\varepsilon = ?$

Задача решается с помощью уравнения динамики вращательного движения (8.12)

$$M = J\varepsilon,$$

где M – сумма проекций моментов сил на ось вращения.

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс,

$$J = \frac{m\ell^2}{12}.$$

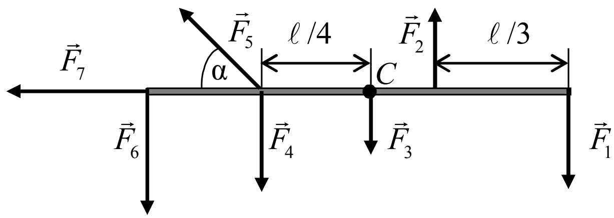


Рис. 11.20

Момент силы относительно точки C определяется уравнением (8.8)

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}], \; |\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\alpha,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от точки C к точке приложения силы. Рассмотрим момент силы $\vec{F}_1$. Проведем радиус-вектор $\vec{r}_1$ от точки C к точке приложения силы, перенесем его параллельно самому себе так, чтобы его начало совпадало с точкой начала вектора силы, и будем вращать правый винт от первого вектора в векторном произведении (от $\vec{r}_1$) ко второму ($\vec{F}_1$). В нашем случае правый винт вращается по часовой стрелке. Направление перемещения правого винта покажет направление вектора момента силы $\vec{M}_1$. На рис. 11.21 этот вектор показан крестиком и направлен перпендикулярно плоскости рисунка за него.

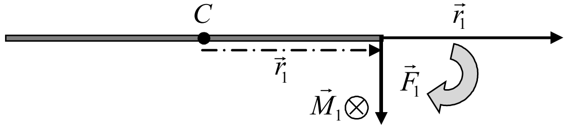


Рис. 11.21

Аналогично расставляются направления моментов других сил. Момент силы $\vec{F}_3 = 0$, так как она приложена к точке, лежащей на оси вращения $(\vec{r}_3 = 0)$. Момент силы $\vec{F}_7 = 0$, так как она приложена вдоль радиуса-вектора, проведенного от точки *C* к точке приложения силы $\vec{F}_7$ вращения $(\alpha = 0,\ \sin 0° = 0)$.

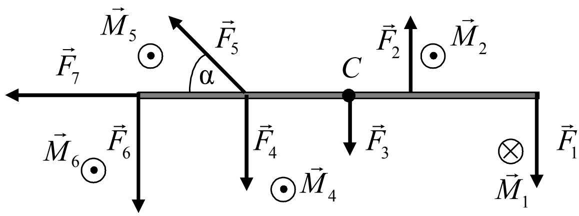


Рис. 11.22

Выберем положительное направление момента силы «на нас» (рис. 11.22) и запишем уравнение динамики вращательного движения

$$M_2 + M_4 + M_5 + M_6 - M_1 = J\varepsilon . \qquad (11.54)$$

Теперь необходимо расписать каждый из моментов сил:

$$M_1 = F_1 \frac{\ell}{2} \sin 90° = F_1 \frac{\ell}{2} ,$$

где $\frac{\ell}{2}$ – расстояние от точки *C* до точки приложения силы $\vec{F}_1$; $90°$ – угол между радиусом-вектором $\vec{r}_1$ и силой $\vec{F}_1$.

Аналогично

$$M_2 = F_2 \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3} \right) \sin 90° = F_2 \frac{\ell}{6} ;$$

$$M_4 = F_4 \frac{\ell}{4} \sin 90° = F_4 \frac{\ell}{4}; \quad M_5 = F_5 \frac{\ell}{4} \sin 30° = F_5 \frac{\ell}{4}\frac{1}{2} = F_5 \frac{\ell}{8};$$

$$M_6 = F_6 \frac{\ell}{2} \sin 90° = F_6 \frac{\ell}{2}.$$

Подставим в (11.54):

$$F_2 \frac{\ell}{6} + F_4 \frac{\ell}{4} + F_5 \frac{\ell}{8} + F_6 \frac{\ell}{2} - F_1 \frac{\ell}{2} = \frac{m\ell^2}{12} \varepsilon,$$

тогда

$$\varepsilon = \frac{6\left(\frac{F_2}{3} + \frac{F_4}{2} + \frac{F_5}{4} + F_6 - F_1\right)}{m\ell} =$$

$$= \frac{6 \cdot (30 + 60 + 40 + 180 - 150)}{0{,}5 \cdot 0{,}8} = 2400 \text{ рад/с}^2.$$

Ответ. $\varepsilon = 2400$ рад/с^2.

Задача 30. Через блок, имеющий форму диска, перекинут легкий нерастяжимый шнур, на котором подвешены грузики массами $m_1 = 150$ г и $m_2 = 100$ г. С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса блока $m = 500$ г?

Дано:
$m_1 = 150$ г,
$m_2 = 100$ г,
$m = 500$ г

$a = ?$

Поскольку масса первого грузика больше, то блок будет вращаться по часовой стрелке, и грузики будут двигаться с ускорением $\vec{a}$ так, как показано на рис. 11.23.

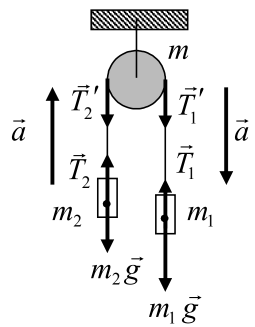


Рис. 11.23

Запишем второй закон Ньютона для первого грузика, на него действуют две силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_1$; груз движется вниз с ускорением $\vec{a}$,

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$$

или в проекциях

$$m_1 a = m_1 g - T_1. \tag{11.55}$$

Аналогично для второго грузика

$$m_2 a = T_2 - m_2 g. \tag{11.56}$$

Для блока необходимо записать уравнение вращательного движения (8.12)

$$M = J\varepsilon,$$

где M – сумма проекций на ось вращения моментов сил, действующих на блок (момент силы $\vec{T}_1'$ и момент силы $\vec{T}_2'$);

$$M = \left(T_1' - T_2'\right)R,$$

где R – радиус блока.

Шнур не растягивается, поэтому $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1'\right|$ и $\left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right|$, и основное уравнение динамики вращательного движения для блока примет вид

$$(T_1 - T_2)R = J\varepsilon. \tag{11.57}$$

Необходимо вспомнить:

1) связь между линейным ускорением a движения грузов и угловым ускорением вращения блока ε

$$\varepsilon = \frac{a}{R};$$

2) момент инерции диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$.

После подстановки в (11.56) получим

$$(T_1 - T_2)R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R};$$

$$T_1 - T_2 = \frac{ma}{2}. \qquad (11.58)$$

Выразим силы натяжения нитей из (11.55) и (11.56) и подставим в (11.58), получим

$$T_1 = m_1(g - a);$$

$$T_2 = m_2(g + a);$$

$$m_1(g - a) - m_2(g + a) = \frac{ma}{2}.$$

Раскрыв скобки, получим

$$m_1 g - m_2 g - a(m_1 + m_2) = \frac{ma}{2}.$$

Решим относительно ускорения a

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} g. \qquad (11.59)$$

Подставим численные значения в (11.59):

$$a = \frac{150 - 100}{150 + 100 + \frac{500}{2}} \cdot 9{,}8 = 0{,}98 \text{ м/с}^2.$$

Ответ. $a = 0{,}98$ м/с^2.

Задача 31. Однородный диск радиусом $R = 10$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O (рис. 11.24). Диск отклонили от вертикали на угол $\beta = 60°$ и отпустили. Определить в начальный момент времени угловое ускорение ε и линейное ускорение a точки B на ободе диска.

Дано:
$R = 10$ см $= 0{,}1$ м,

$\beta = 60°$

$\varepsilon = ?$, $a = ?$

Когда мы отклоняем диск от положения равновесия, на него начинает действовать момент силы

$$M = mgR\sin\beta .$$

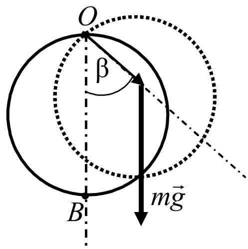


Рис. 11.24

Согласно основному уравнению динамики для вращательного движения (8.12)

$$M = J\varepsilon ,$$

$$mgR\sin\beta = \frac{mR^2}{2}\varepsilon .$$

Откуда угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{2g\sin\beta}{R} = \frac{2\cdot 9{,}8\sin 60°}{0{,}1} = 169{,}8 \text{ рад/с}^2 .$$

Линейное ускорение a точки B связано с угловым ускорением ε:

$$a = \varepsilon R = 2g\sin\beta = 2\cdot 9{,}8\sin 60° = 16{,}98 \text{ м/с}^2 .$$

Ответ. $\varepsilon = 169{,}8$ рад/с^2; $a = 16{,}98$ м/с^2.

11.9. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Задача 32. Два однородных диска массами $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}4$ кг и одинаковыми радиусами $R_1 = R_2 = R = 0{,}1$ м могут вращаться вокруг общей оси, проходящей через их центры перпендикулярно плоскостям дисков. В начальный момент времени верхний диск (массой m_1) раскрутили до угловой скорости $\omega_1 = 4$ рад/с. Найти угловую скорость вращения дисков ω после того как верхний диск упадет на нижний. Между поверхностями дисков существует трение, после падения они будут вращаться как одно целое.

Дано:
$m_1 = 0,2$ кг,
$m_2 = 0,4$ кг,
$R_1 = R_2 = R = 0,1$ м,
$\omega_1 = 4$ рад/с

$\omega = ?$

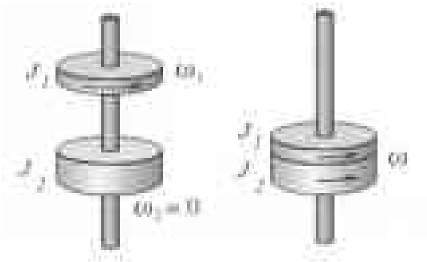


Рис. 11.25

По закону сохранения момента импульса (8.14)

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = (J_1 + J_2)\omega, \qquad (11.60)$$

$\omega_2 = 0$, так как нижний диск в начальный момент времени покоился, поэтому (11.60) примет вид

$$J_1\omega_1 = (J_1 + J_2)\omega$$

и искомая угловая скорость будет равна

$$\omega = \frac{J_1\omega_1}{J_1 + J_2}. \qquad (11.61)$$

Найдем моменты инерции дисков

$$J_1 = \frac{m_1R^2}{2} = \frac{0,2\cdot 0,1^2}{2} = 1\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$J_2 = \frac{m_2R^2}{2} = \frac{0,4\cdot 0,1^2}{2} = 2\cdot 10^{-3}\ \text{кг}\cdot\text{м}^2.$$

Подставим в (11.61):

$$\omega = \frac{J_1\omega_1}{J_1 + J_2} = \frac{1\cdot 10^{-3}\cdot 4}{1\cdot 10^{-3} + 2\cdot 10^{-3}} = \frac{4}{3}\ \text{рад/с}.$$

Ответ. $\omega = \frac{4}{3}$ рад/с.

Задача 33. Однородный тонкий стержень с массой $m_1 = 0,3$ кг и длиной $\ell = 1$ м может вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню. В край стержня попадает пластилиновый шарик $m_2 = 0,05$ кг, летящий со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно стержню (рис. 11.26, *а*), и прилипает к нему (рис. 11.26, *б*). Найти угловую скорость вращения стержня ω после того как к нему прилипнет шарик.

Дано:	
$m_1 = 0,3$ кг, $m_2 = 0,05$ кг, $\ell = 1$ м, $v = 5$ м/с	Задача решается с помощью закона сохранения импульса.
$\omega = ?$	

$$L_{\text{шарика до}} + L_{\text{стержня до}} = \\ = L_{\text{шарика после}} + L_{\text{стержня после}}. \quad (11.62)$$

До того как шарик прилип к стержню, стержень покоился, поэтому $L_{\text{стержня до}} = 0$.

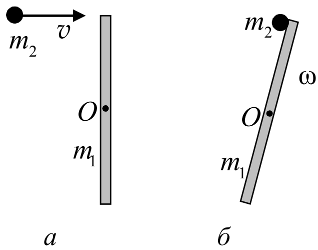


Рис. 11.26

Момент импульса шарика относительно точки *O* до удара

$$L_{\text{шарика до}} = m_2 v \frac{\ell}{2}. \quad 11.63)$$

Момент импульса шарика относительно точки *O* после удара

$$L_{\text{шарика после}} = m_2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \omega. \quad (11.64)$$

Момент импульса стержня относительно точки *O* после удара

$$L_{\text{стержня после}} = J\omega = \frac{m_1 \ell^2}{12} \omega. \quad (11.65)$$

В (11.64) учтено, что стержень вращается вокруг оси, проходящей через его центр, для которой $J = \dfrac{m_1\ell^2}{12}$.

Подставим (11.63)–(11.65) в (11.62), получим

$$m_2 v\frac{\ell}{2} = m_2\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\omega + \frac{m_1\ell^2}{12}\omega\,;$$

$$m_2 v = \frac{\omega\ell}{2}\left(m_2 + \frac{m_1}{3}\right).$$

Откуда

$$\omega = \frac{2m_2 v}{\ell\left(m_2 + \dfrac{m_1}{3}\right)} = \frac{2\cdot 0{,}05\cdot 5}{1\cdot\left(0{,}05 + \dfrac{0{,}3}{3}\right)} = \frac{0{,}5}{0{,}15} = 3{,}33\ \text{рад/с}\,.$$

Ответ. $\omega = 3{,}33$ рад/с .

11.10. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Задача 34. Шар массой $m = 0{,}05$ кг, радиусом $R = 5$ см катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 2$ м/с (рис. 11.27). Найти кинетическую энергию шара T .

Дано:
$m = 0{,}05$ кг,
$R = 5$ см $= 0{,}05$ м ,
$v = 2$ см/с $= 2\cdot 10^{-2}$ м/с

$T = ?$

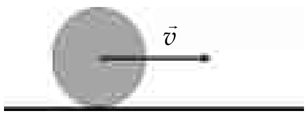


Рис. 11.27

Движение без скольжения означает, что в каждый момент времени только одна точка шара соприкасается с плоскостью. В этом случае можно записать, что угловая скорость вращения шара $\omega = \dfrac{v}{R}$. Кинетическая энергия шара складывается из кинетической энергии поступательного движения и кинетической энергии вращательного движения (7.28)

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{J_C\omega^2}{2}, \qquad (11.66)$$

где v_C – скорость поступательного движения центра масс; J_C – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс. В нашей задаче $v_C = v$, $J_C = \frac{2}{5}mR^2$.

Подставив все данные в (11.66), получим

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mV^2}{2}\left(1 + \frac{2}{5}\right) = 0,7mv^2 =$$

$$= 0,7 \cdot 0,05 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Ответ. $T = 1,4 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Задача 35. Маховик с моментом инерции $J = 5$ кг·м^2 начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием постоянного момента сил $M = 20$ Н·м. Вращение длилось в течение времени $t = 10$ с. Найти кинетическую энергию T, приобретенную маховиком.

Дано:	
$J = 5$ кг·м^2, $M = 20$ Н·м, $t = 10$ с	Кинетическая энергия T, приобретенная диском за время вращения, – это работа A, совершенная силами при вращении диска,
$T = ?$	$T = A$.

В свою очередь, работа при вращении тела вокруг неподвижной оси вычисляется по формуле (8.24):

$$A = \int_0^{\varphi} M\, d\varphi.$$

Для нашей задачи момент сил M постоянен, поэтому работа A будет рассчитываться по уравнению

$$A = M\varphi, \qquad (11.67)$$

где φ – угол, на который повернется маховик за время t. Этот угол легко найти по формуле для равноускоренного вращательного движения, учитывая, что в начальный момент времени маховик покоился:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{11.66}$$

Чтобы найти угловое ускорение маховика, воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{M}{J}. \tag{11.69}$$

Подставив (11.68) и (11.69) в (11.67), получим

$$T = A = M\varphi = M\frac{\varepsilon t^2}{2} = M\frac{\frac{M}{J}t^2}{2} =$$

$$= \frac{M^2t^2}{2J} = \frac{20^2 \cdot 10^2}{2 \cdot 5} = 4 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 4 \text{ кДж}.$$

Ответ. $T = 4$ кДж.

Задача 36. Шар массой $m = 0{,}05$ кг, радиусом $R = 5$ см скатывается без скольжения с наклонной плоскости с высоты $h = 80$ см (рис. 11.28). Найти скорость шара v в конце наклонной плоскости.

Дано:
$m = 0{,}05$ кг,
$R = 5$ см $= 0{,}05$ м,
$h = 80$ см $= 0{,}8$ м

$v = ?$

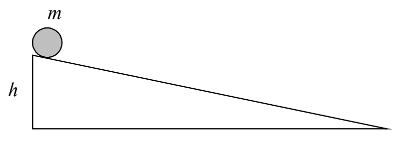


Рис. 11.28

Для решения задачи применим закон сохранения энергии: в начальный момент шар обладал потенциальной энергией mgh, в конце плоскости у него была кинетическая энергия поступательного движения $\frac{mv^2}{2}$ и кинетическая энергия вращательного движения $\frac{J\omega^2}{2}$:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (11.70)$$

Так как шар катится без скольжения, то $\omega = \frac{v}{R}$, а момент инерции шара – это табличное значение $J = \frac{2}{5}mR^2$. После подстановки в (11.70) получим

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{v}{R}\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{2}{5}\right) = 0,7mv^2.$$

Тогда в конце наклонной плоскости скорость шара

$$v = \sqrt{\frac{gh}{0,7}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 0,8}{0,7}} = 3,35 \text{ м/с}.$$

Мы видим, что скорость не зависит ни от массы шара, ни от его радиуса, она зависит только от распределения массы (формы фигуры) и высоты наклонной плоскости.

Ответ. $v = 3,35$ м/с

11.11. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Задача 37. В оба конца вагона поезда, движущегося со скоростью $v = 60$ км/ч, одновременно с точки зрения наблюдателя на Земле ударяют молнии. Какое время между ударами $\Delta t'$ зарегистрируют пассажиры в вагоне, если длина вагона $\ell = 20$ м?

Дано:	
$v = 60$ км/ч $= \frac{60 \cdot 10^3}{3600} = 16,67$ м/с, $\ell = 20$ м	Свяжем с неподвижным наблюдателем систему отсчета K, а с вагоном поезда – систему отсчета K'. Пусть удар молнии в начало вагона – это событие 1, а удар молнии в хвост вагона – событие 2.
$\Delta t' = ?$	

Условие одновременности для неподвижного наблюдателя означает, что

$$t_1 = t_2 . \tag{11.71}$$

Надо найти разницу соответствующих времен:

$$\Delta t' = t_1' - t_2' . \tag{11.72}$$

Воспользуемся преобразованиями Лоренца (9.4)

$$t_1 = \frac{t_1' + \dfrac{v x_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}; \qquad t_2 = \frac{t_2' + \dfrac{v x_2'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} .$$

Подставим в (11.71)

$$\frac{t_1' + \dfrac{v x_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2' + \dfrac{v x_2'}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}},$$

или

$$t_1' + \frac{v x_1'}{c^2} = t_2' + \frac{v x_2'}{c^2} . \tag{11.73}$$

Тогда с учетом того, что длина вагона $\ell = x_2' - x_1'$, получим

$$\Delta t = t_1' - t_2' = \frac{v\left(x_2' - x_1'\right)}{c^2} = \frac{v\ell}{c^2} = \frac{16,67 \cdot 20}{(3 \cdot 10^8)^2} = 3,7 \cdot 10^{-15} \text{ с}.$$

Ответ. $\Delta t = t_1' - t_2' = 3,7 \cdot 10^{-15}$ с .

Задача 38. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t_0 = 10$ нс . Какой путь ℓ пройдет эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\Delta t = 20$ нс ?

Дано:	Чтобы найти расстояние ℓ, которое пройдет частица относительно неподвижного наблюдателя, необходимо знать ее скорость v:
$\Delta t_0 = 10$ нс,	
$\Delta t = 20$ нс	
$\ell = ?$	

$$\ell = v\Delta t\ . \qquad (11.74)$$

Скорость можно найти из формулы замедления времени (9.72)

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\ . \qquad (11.75)$$

Возведем в квадрат левую и правую части (11.75), получим

$$\Delta t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t_0{}^2\ ;$$

$$1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{\Delta t_0{}^2}{\Delta t^2} = \left(\frac{10\cdot 10^{-9}}{20\cdot 10^{-9}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ ;$$

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4},\quad v = \frac{\sqrt{3}}{2}c\ .$$

Тогда искомое расстояние

$$\ell = v\Delta t = \frac{\sqrt{3}}{2}c\Delta t = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 3\cdot 10^8\cdot 20\cdot 10^{-9} = 5{,}2\ \text{м}\ .$$

Ответ. $\ell = 5{,}2$ м .

Задача 39. В системе отсчета покоится стержень, собственная длина которого $\ell_0 = 1$ м. Стержень расположен так, что составляет угол $\varphi_0 = 45°$ с осью x' (рис. 11.29). Определить длину стержня ℓ и угол φ в системе отсчета K, если скорость движения системы отсчета K' относительно K равна $v = 0{,}8c$.

Дано:
$\ell_0 = 1$ м,
$\varphi_0 = 45°$,
$v = 0{,}8c$

$\varphi = ?$,
$\ell = ?$

Чтобы найти длину стержня ℓ в системе отсчета K, надо найти его проекции на оси координат ℓ_x и ℓ_y с помощью преобразований Лоренца, тогда длина стержня

$$\ell = \sqrt{\ell_x{}^2 + \ell_y{}^2}\ . \qquad (12.76)$$

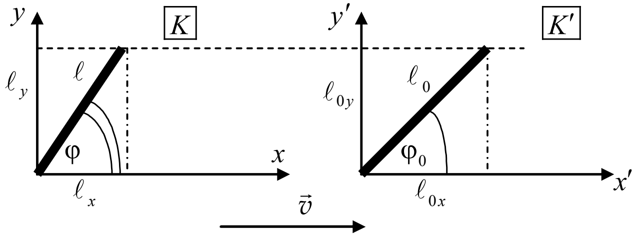


Рис. 11.29

Согласно преобразованиям Лоренца координаты, перпендикулярные направлению движения, не меняются при переходе из одной системы отсчета в другую, тогда

$$\ell_y = \ell_{0y} = \ell_0 \sin\varphi_0 . \qquad (11.77)$$

Координата в направлении движения уменьшается (лоренцево сокращение длины, см. формулу (9.16)):

$$\ell_x = \ell_{0x}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \ell_0 \cos\varphi_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} . \qquad (11.78)$$

Подставим (11.78) и (11.77) в (11.76):

$$\ell = \sqrt{(\ell_0 \sin\varphi_0)^2 + \left(\ell_0\cos\varphi_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} = \ell_0\sqrt{\sin^2\varphi_0 + \cos^2\varphi_0 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi_0} =$$

$$= \ell_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi_0} = 1\cdot\sqrt{1-\frac{0{,}8^2c^2}{c^2}\cos^2 45^\circ} = \sqrt{1-0{,}64\cdot\frac{1}{2}} = 0{,}82 \text{ м}.$$

Угол φ в системе отсчета K можно найти из геометрии:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\ell_y}{\ell_x} = \frac{\ell_0\sin\varphi_0}{\ell_0\cos\varphi_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}} = 1{,}67 ,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 1{,}67 = 59^\circ .$$

Ответ. $\ell = 0{,}82$ м; $\varphi = 59^\circ$.

Задача 40. Частица движется под углом $\varphi = 30°$ к оси x со скоростью $u = 0,5c$. В положительном направлении оси x движется ракета со скоростью $v = 0,2c$. С ракетой связана система отсчета K' (рис 11.30). Найти угол φ', под которым частица движется относительно оси x' в ракете.

Дано:	Чтобы найти искомый угол в системе отсчета K', надо воспользоваться релятивистским законом сложения скоростей (9.20), (9.21).
$\varphi = 30°$, $u = 0,5c$, $v = 0,2c$	
$\varphi' = ?$	

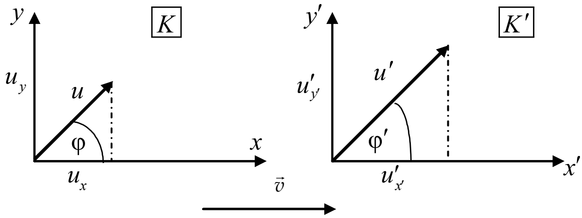


Рис. 11.30

Проекции скорости частицы в системе отсчета K легко найти из геометрии:

$$u_x = u\cos 30°;\ u_y = u\sin 30°.$$

Найдем проекцию скорости $u'_{x'}$ на ось x' в системе отсчета K':

$$u'_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{vu_x}{c^2}} = \frac{u\cos 30° - v}{1 - \dfrac{vu\cos 30°°}{c^2}} = \frac{0,5c\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0,2c}{1 - \dfrac{0,2c\,0,5c\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{c^2}} =$$

$$= \frac{0,5\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 0,2}{1 - 0,1\dfrac{\sqrt{3}}{2}}c = \frac{0,23}{0,91}c = 0,25c. \qquad (11.79)$$

Найдем проекцию скорости $u'_{y'}$ на ось y' в системе отсчета K'.

$$u'_{y'} = \frac{u_y\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu_x}{c^2}} = \frac{u\sin 30°\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1-\dfrac{vu\cos 30°}{c^2}} =$$

$$= \frac{0,5c\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{1-\dfrac{(0,2c)^2}{c^2}}}{1-\dfrac{0,2c\cdot 0,5c\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{c^2}} = \frac{0,24}{0,91}c = 0,27c. \qquad (11.80)$$

Угол φ' в системе отсчета K можно найти из геометрии:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{u'_{y'}}{u'_{x'}} = \frac{0,26c}{0,25c} = 1,04, \qquad \varphi' = \operatorname{arctg} 0,96 = 46,12°.$$

Ответ. $\varphi' = 46,12°$.

Задача 41. Релятивистский импульс частицы $p_\text{р}$ в 2 раза больше ее ньютоновского импульса $p_\text{Н}$. Найти скорость частицы v.

Дано:	Релятивистский импульс частицы определяется формулой (10.1):
$\dfrac{p_\text{р}}{p_\text{Н}} = 2$	$$p_\text{р} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$
$v = ?$	

Ньютоновский импульс – это импульс в классической механике

$$p_\text{Н} = m_0 v.$$

По условию

$$\frac{p_\text{р}}{p_\text{Н}} = 2 = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} / m_0 v = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}; \quad \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 2; \quad \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2};$$

$$1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{4}; \quad \frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4}; \quad v^2=\frac{3}{4}c^2; \quad v=\frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

Ответ. $v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Задача 42. Найти скорость частицы v, если ее кинетическая энергия T равна энергии покоя E_0.

Дано: $T=E_0$ — $v=?$	Энергия покоя частицы определяется (10.17):

$$E_0=m_0c^2 .$$

Кинетическая энергия частицы определяется по (10.13) – это разность между полной энергией и энергией покоя:

$$T=E-E_0=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2 .$$

Применим условие задачи, что кинетическая энергия T равна энергии покоя E_0:

$$T=E_0=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=m_0c^2; \quad \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0c^2=m_0c^2;$$

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=2m_0c^2; \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=2; \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{2}}\ 1-\frac{v^2}{c^2}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{v^2}{c^2}=\frac{3}{4}; \quad v^2=\frac{3}{4}c^2, \quad v=\frac{\sqrt{3}}{2}c .$$

Ответ. $v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Задача 43. Кинетическая энергия релятивистской частицы T равна ее энергии покоя E_0. Во сколько раз возрастет импульс частицы, если ее кинетическая энергия увеличится в $n = 4$ раза?

Дано:	
$T = E_0$, $n = 4$	Импульс релятивистской частицы связан с ее кинетической энергией соотношением (10.24)
$\dfrac{p_2}{p_1} = ?$	

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T - 2m_0c^2)} .$$

По условию первоначально кинетическая энергия равна энергии покоя частицы:

$$T = E_0 = m_0c^2 .$$

Найдем первоначальный импульс частицы p_1:

$$p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{T_1\left(T_1 + 2m_0c^2\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{m_0c^2\left(m_0c^2 + 2m_0c^2\right)} = \frac{m_0c^2\sqrt{3}}{c} = m_0c\sqrt{3} .$$

Найдем конечный импульс частицы p_2, считая, что кинетическая энергия изменится в $n = 4$ раз,

$$T_2 = nT_1 = 4m_0c^2 ;$$

$$p_2 = \frac{1}{c}\sqrt{T_2\left(T_2 + 2m_0c^2\right)} = \frac{1}{c}\sqrt{4m_0c^2\left(4m_0c^2 + 2m_0c^2\right)} = \frac{m_0c^2 2\sqrt{6}}{c} = m_0c2\sqrt{6} .$$

Найдем отношение импульсов:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{m_0c2\sqrt{6}}{m_0c\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} = 2{,}82.$$

Ответ: $\dfrac{p_2}{p_1} = 2{,}82$.

Задача 44. Покоящаяся частица распалась на две одинаковые частицы с массами m_0. Найти кинетические энергии этих частиц T, если масса покоящейся частицы M_0.

Дано: m_0, M_0	Задачу будем решать в системе центра инерции. Нарисуем для частиц треугольники энергий по правилу, описанному в разделе 10.6.
$T = ?$	

Массы продуктов распада одинаковые, поэтому треугольники будут одинаковыми (рис. 11.31).

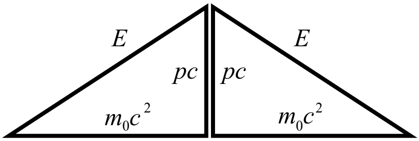


Рис. 11.31

Запишем закон сохранения энергии: до распада – это энергия покоя частицы массой M_0, после распада – одинаковые энергии дочерних частиц массами m_0,

$$M_0c^2 = 2E, \quad E = \frac{M_0c^2}{2}.$$

Кинетическая энергия частицы – это разница между ее полной энергией и энергией покоя:

$$T = E - m_0c^2 = \frac{M_0c^2}{2} - m_0c^2 = \left(\frac{M_0}{2} - m_0\right)c^2.$$

Ответ. $T = \left(\frac{M_0}{2} - m_0\right)c^2$.

Задача 45. Покоящаяся частица массой M_0 распалась на новую частицу с массой m_0 и фотон. Найти энергию E_γ и импульс фотона p_γ.

Дано: m_0, M_0	Задачу будем решать в системе центра инерции. Нарисуем для частиц треугольники энергий (рис. 11.32).
$E_\gamma = ?$, $p_\gamma = ?$	

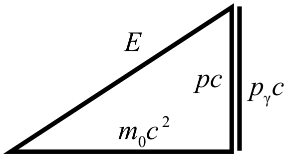


Рис. 11.32

У фотона масса покоя равна нулю, поэтому энергия фотона

$$E_\gamma = p_\gamma c = pc\,.$$

Запишем закон сохранения энергии:

$$M_0c^2 = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} + pc\,,$$

$$M_0c^2 - Pc = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (Pc)^2}\,. \tag{11.81}$$

Возведем левую и правую часть (11.81) в квадрат:

$$\left(M_0c^2 - pc\right)^2 = \left(m_0c^2\right)^2 + (pc)^2$$

и раскроем скобки в левой части:

$$\left(M_0c^2\right)^2 - 2M_0pc^3 + (pc)^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2\,,$$

$$M_0^2c - 2M_0P = m_0^2c\,. \tag{11.82}$$

Выразим из (11.82) импульс фотона p_γ:

$$p = p_\gamma = \frac{M_0^2 - m_0^2}{2M_0}c\,.$$

Энергия фотона

$$E_\gamma = p_\gamma c = \frac{M_0^2 - m_0^2}{2M_0}c^2\,.$$

Ответ. $P_\gamma = \dfrac{M_0^2 - m_0^2}{2M_0}c$; $E_\gamma = \dfrac{M_0^2 - m_0^2}{2M_0}c^2$.

12. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

12.1. ВВЕДЕНИЕ. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

1. Шарик массой $m = 200$ г летит перпендикулярно по направлению к неподвижной стене со скоростью $v = 2$ м/с и после столкновения упруго отскакивает от нее. Найти изменение импульса шарика.

2. Шарик массой $m = 100$ г налетает на стенку под углом $\alpha = 45°$ к ней со скоростью $v = 8$ м/с и после столкновения упруго отскакивает от нее. Найти изменение импульса шарика.

3. Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью $v = 800$ м/с, упруго ударяется о стенку сосуда. Найти изменение импульса молекулы за время удара о стенку.

4. Молекула массой $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ кг, летящая под углом $60°$ к нормали к стенке сосуда со скоростью $v = 800$ м/с, упруго ударяется о стенку сосуда. Найти изменение импульса молекулы за время удара о стенку.

5. Материальная точка массой $m = 10$ г равномерно движется по окружности со скоростью $v = 5$ м/с. Найти изменение импульса материальной точки после того как она пройдет четверть окружности.

6. Материальная точка массой $m = 10$ г равномерно движется по окружности со скоростью $v = 5$ м/с. Найти изменение импульса материальной точки после того как она пройдет три четверти окружности.

7. Материальная точка массой $m = 50$ г равномерно движется по окружности со скоростью $v = 2$ м/с. Найти изменение импульса материальной точки после того как она пройдет половину окружности.

8. Тело массой $m = 200$ г брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти изменение импульса тела в верхней точке траектории.

9. Тело массой $m = 200$ г брошено под углом $\alpha = 60°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти изменение импульса тела в момент падения тела на Землю.

10. Мячик массой $m = 200$ г, подброшенный с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $v_0 = 5$ м/с, падает на землю. Найти изменение импульса мячика за время движения.

11. Камень массой $m = 400$ г брошен с башни горизонтально со скоростью $v_0 = 10$ м/с, высота башни $h = 45$ м. Найти импульс камня в момент падения на землю и изменение импульса камня за время движения.

12.2. ЭЛЕМЕНТЫ КИНЕМАТИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

12. Путь, пройденный материальной точкой, описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 8$ м, $B = 2$ м/с, $C = -6$ м/с^2, $D = 5$ м/с^3. Найти скорость и ускорение точки в момент времени $t = 10$ с.

13. Путь, пройденный материальной точкой, описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2$, где $A = 5$ м, $B = 3$ м/с. Найти момент времени, в который скорость точки будет равняться нулю. Вычислить ускорение точки в этот момент времени и путь, пройденный точкой за это время.

14. Путь, пройденный материальной точкой, описывается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 15$ м, $B = 12$ м/с, $C = -2$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3. Вычислить момент времени, при котором ускорение точки будет равно нулю. Найти скорость точки в этот момент времени и путь, пройденный точкой за это время.

15. Две материальные точки движутся по законам $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 9$ м, $A_2 = 3$ м, $B_1 = -2$ м/с, $B_2 = 2$ м/с, $C_1 = 5$ м/с^2, $C_2 = 4$ м/с^2. Определить момент времени, в который скорости точек будут одинаковы. Вычислить ускорения первой и второй точек в этот момент времени. Вычислить скорости точек в этот момент времени.

16. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r} = 10t^3\vec{i} + 3t^2\vec{j} + 2t^4\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей. Вычислить скорость и ускорение в момент времени $t = 3$ с.

17. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r} = 5t\vec{i} + 12t^2\vec{j} + 2t^3\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей. Вычислить скорость и ускорение в момент времени $t = 2$ с.

18. Материальная точка начинает двигаться в плоскости xOy со скоростью $\vec{V} = At\vec{i} + B\vec{j}$, где A и B – некоторые постоянные. Начальное положение материальной точки – начало координат. Найти уравнение движения материальной точки и определить форму траектории.

19. Движение материальной точки по окружности радиусом $R = 4$ м происходит по закону $\xi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с, $C = 3$ м/с^2. Для момента времени $t = 4$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a.

20. Движение материальной точки по окружности радиусом $R = 2$ м происходит по закону $\xi = At + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 10$ м, $B = -5$ м/с, $C = 3$ м/с^2. Для момента времени $t = 5$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a.

21. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 2$ м. В некоторый момент времени ее нормальное ускорение $a_n = 9$ м/с^2 и угол между направлением скорости и полного ускорения составляет $\alpha = 30°$. Найти:

1) скорость точки v;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a;

22. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 5$ м. В некоторый момент времени ее скорость $v = 10$ м/с и угол между направлением скорости и полного ускорения составляет $\alpha = 30°$. Найти:

1) нормальное ускорение точки a_n;

2) тангенциальное ускорение точки a_τ;

3) полное ускорение точки a.

23. Нормальное ускорение материальной точки, движущейся по окружности радиусом $R = 5$ м, задается уравнением $a_n = 2 + 5t + 8t^2$. Найти:

1) скорость точки в момент времени $t = 5$ с;

2) тангенциальное ускорение в момент времени $t = 3$ с;

3) полное ускорение в момент времени $t = 2$ с ;

4) путь, пройденный телом за $t = 1$ мин .

24. Радиус-вектор материальной точки меняется со временем по закону $\vec{r} = (A + Bt)\vec{i} + Ct^2\vec{j}$, где $\vec{i}, \vec{j}$ – орты координатных осей, $A = 10$ м , $B = 0{,}5$ м/с , $C = 7$ м/с^2 . Вычислить в момент времени $t = 2$ с ее нормальное ускорение a_n и тангенциальное ускорение a_τ .

25. Камень брошен с башни высотой $h = 30$ м горизонтально со скоростью $v_0 = 30$ м/с . Найти в момент времени $t = 2$ с скорость камня, его нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения.

26. Камень брошен под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Найти нормальное ускорение a_n и тангенциальное ускорение a_τ в момент броска.

27. Камень брошен с башни высотой $h = 50$ м горизонтально со скоростью $v_0 = 10$ м/с . Найти радиус кривизны траектории камня через $t = 1$ с после начала движения.

12.3. СИСТЕМА ЦЕНТРА МАСС

28. Определить положение центра масс системы шаров (рис. 12.1), если расстояние между центрами соседних шаров $a = 20$ см .

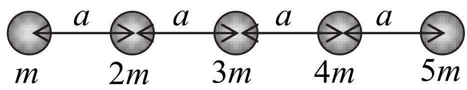


Рис. 12.1

29. Определить положение центра масс системы шаров (рис. 12.2), если расстояние между центрами соседних шаров $a = 20$ см .

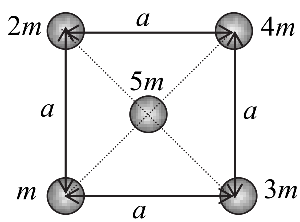


Рис. 12.2

30. Определить положение центра масс системы шаров (рис. 12.3), находящихся в вершинах куба, если сторона куба $a = 20$ см .

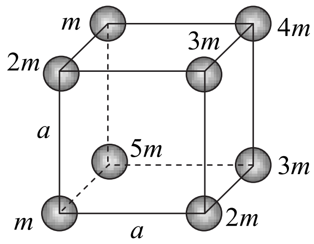


Рис. 12.3

31. Определить положение центра масс системы шаров (рис. 12.4), находящихся в вершинах равностороннего треугольника, если сторона треугольника $a = 20$ см .

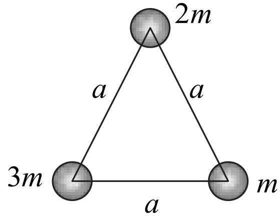


Рис. 12.4

32. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шар массой $m = 100$ г налетает на покоящийся шар такой же массы. Скорость шара $v = 10$ м/с . Найти скорости шаров в системе центра инерции до удара.

33. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шар массой $m_1 = 200$ г налетает на покоящийся шар массы $m_2 = 400$ г . Скорость первого шара $v = 5$ м/с . Найти скорости шаров в системе центра инерции до удара.

34. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шары массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г движутся в одном направлении. Скорость первого шара $v_1 = 5$ м/с , второго – $v_2 = 10$ м/с . Найти скорости шаров в системе центра инерции.

35. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шары массами $m_1 = 400$ г и $m_2 = 200$ г движутся навстречу друг другу. Скорость первого шара $v_1 = 15$ м/с, второго – $v_2 = 10$ м/с. Найти скорости шаров в системе центра инерции до удара.

36. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шары массами $m_1 = 100$ г, $m_2 = 200$ г и $m_3 = 300$ г движутся в одном направлении. Скорость первого шара $v_1 = 5$ м/с, второго – $v_2 = 10$ м/с, третьего – $v_3 = 15$ м/с. Найти скорости шаров в системе центра инерции.

37. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шары массой m и $2m$ движутся перпендикулярно друг другу. Скорости шаров по модулю одинаковы и равны v. Найти скорости шаров в системе центра инерции $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$.

38. В лабораторной системе отсчета (ЛСО – система отсчета неподвижного наблюдателя) шары массой m и $2m$ движутся перпендикулярно друг другу. Скорости шаров $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$, ($|\vec{v}_1| = v$, $|\vec{v}_2| = 2v$). Найти скорости шаров в системе центра инерции $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$, если вдоль оси x двигался первый шар.

12.4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

39. Снаряд массой $m = 8$ кг, летящий горизонтально со скоростью $v = 150$ м/с, разорвался на два осколка. Больший осколок массой $m_1 = 5$ кг получил скорость $v_1 = 250$ м/с в направлении первоначального полета снаряда. Найти направление и величину скорости полета второго осколка v_2.

40. Снаряд массой $m = 10$ кг, летящий горизонтально со скоростью $v = 200$ м/с, разорвался на два осколка. Меньший осколок массой $m_1 = 4$ кг полетел со скоростью $v_1 = 300$ м/с в противоположном направлении. Найти направление и величину скорости полета второго осколка v_2.

41. Снаряд массой $m = 6$ кг, летящий горизонтально со скоростью $v = 300$ м/с, разорвался на два осколка. Больший осколок массой

$m_1 = 4$ кг получил скорость $v_1 = 350$ м/с в направлении полета снаряда под углом $\varphi_1 = 30°$ к первоначальному направлению полета снаряда. Найти направление, величину скорости полета второго осколка v_2 и угол к первоначальному направлению полета φ_2, под которым он отлетел.

42. Снаряд массой $m = 16$ кг, летящий горизонтально со скоростью $v = 200$ м/с, разорвался на два осколка. Больший осколок массой $m_1 = 10$ кг получил скорость $v_1 = 350$ м/с в направлении противоположном первоначальному направлению движения снаряда под углом $\varphi_1 = 45°$ к нему. Найти направление, величину скорости полета второго осколка v_2 и угол φ_2, под которым он отлетел.

43. Снаряд массой $m = 20$ кг, летящий горизонтально со скоростью $v = 250$ м/с, разорвался на два осколка. Больший осколок массой $m_1 = 12$ кг получил скорость $v_1 = 350$ м/с и упал на землю точно под местом разрыва. Найти направление, величину скорости полета второго осколка v_2 и угол к первоначальному направлению полета φ_2, под которым он отлетел.

44. Снаряд массой $m = 100$ кг, летевший на высоте $h = 50$ м горизонтально со скоростью $v = 250$ м/с, разорвался на два одинаковых осколка. Один осколок через $t = 2$ с падает на землю точно под местом взрыва. Определить скорость второго осколка сразу же после взрыва и изменение импульса каждого из осколков.

45. На железнодорожной платформе массой $M = 10$ т установлено орудие. Снаряд вылетает из орудия под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. С какой скоростью покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг, а его скорость $v_1 = 500$ м/с?

46. Шар массой $m_1 = 1$ кг движется горизонтально со скоростью $v_1 = 3$ м/с и догоняет второй шар массой $m_2 = 2$ кг, движущийся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. После удара шары слипаются и движутся вместе. Найти скорость движения слипшихся шаров.

47. Шар массой $m_1 = 0,5$ кг движется горизонтально со скоростью $v_1 = 8$ м/с и сталкивается со вторым шаром массой $m_2 = 0,8$ кг, движущимся навстречу со скоростью $v_2 = 1$ м/с. После удара шары слипаются и движутся вместе. Найти скорость и направление движения слипшихся шаров.

48. Снаряд массой $m = 50$ кг, летящий под углом $\alpha = 20°$ к горизонту со скоростью $v_1 = 300$ м/с, попадает в стоящую платформу с песком и застревает в нем. С какой скоростью покатится платформа, если ее масса $M = 5$ т?

49. В лодке массой $M = 200$ кг стоит человек массой $m = 60$ кг. Лодка плывет по озеру со скоростью $v_1 = 5$ м/с. Человек прыгает с лодки со скоростью $v_2 = 3$ м/с (относительно лодки). Найти скорость лодки после прыжка человека:

а) когда человек прыгает в направлении движения лодки;

б) когда человек прыгает в противоположном направлении движения лодки.

50. Спортсмен движется на скейтборде по горизонтальной поверхности со скоростью $v_1 = 2$ м/с, затем прыгает со скейтборда вперед со скоростью $u = 4$ м/с относительно доски. Найти скорость, с которой покатится скейтборд, если масса спортсмена $m = 60$ кг, масса скейтборда $m_1 = 3$ кг.

51. Две одинаковые тележки массой $M = 200$ кг движутся по инерции одна за другой с одинаковой скоростью $v = 20$ м/с. Человек массой $m = 60$ кг прыгает с задней тележки на переднюю со скоростью $u = 2$ м/с относительно своей тележки. Найти скорость передней тележки после того как на нее приземлится человек.

52. Рыбак, стоящий в лодке, переместился с носа на корму. На какое расстояние относительно воды переместится лодка, если ее длина $\ell = 3$ м, масса рыбака $m = 70$ кг, а масса лодки $M = 100$ кг?

12.5. РАБОТА, ЭНЕРГИЯ, МОЩНОСТЬ

53. На тело действует равномерно возрастающая сила. Найти работу A этой силы на участке пути длиной $s = 5$ м, если в начале пути сила, действующая на тело, была $F_1 = 0$ Н, а в конце пути – $F_2 = 50$ Н.

54. На тело действует равномерно убывающая сила. Найти работу A этой силы на участке пути длиной $s = 12$ м, если в начале пути сила, действующая на тело, была $F_1 = 25$ Н, а в конце пути – $F_2 = -5$ Н.

55. На тело действует постоянная сила $F = 20$ Н. Найти работу A этой силы на участке пути длиной $s = 150$ м.

56. На тело на участке пути от $s_1 = 0$ до $s_2 = 10$ м действует равномерно возрастающая сила от $F_1 = 20$ до $F_2 = 50$ Н. На следующем участке пути до $s_3 = 15$ м значение действующей силы не меняется ($F_2 = 50$ Н). На участке пути от $s_3 = 15$ до $s_4 = 25$ м сила равномерно уменьшается и в конце пути она равна $F_3 = -30$ Н. Найти работу A на всем пути.

57. Тело массой $m = 200$ кг поднимают вверх равноускоренно на высоту $h = 2$ м за время $t = 5$ с. Найти работу A, затраченную на подъем тела.

58. Тело массой $m = 400$ кг поднимают вверх с ускорением $a = 4$ м/с^2 на высоту $h = 2$ м. Найти работу A за время $t = 5$ с.

59. Под действием постоянной силы $F = 200$ Н, направленной вертикально вверх, груз массой $m = 60$ кг был поднят вверх на высоту $h = 12$ м. Найти работу A, затраченную на подъем тела, и его потенциальную энергию U.

60. Автомобиль массой $M = 1{,}4$ т поднимается в гору, составляющую угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Найти работу A, совершенную двигателем автомобиля за $\ell = 1$ км пути, если коэффициент трения равен $\mu = 0{,}1$. Вычислить развиваемую автомобилем мощность, если известно, что этот путь был пройден за время $t = 30$ с.

61. Тело массой $m = 2$ кг падает вниз с высоты $h = 7$ м. Найти его кинетическую T и потенциальную U энергии на высоте $h_1 = 2$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

62. Камень массой $m = 300$ г бросают горизонтально с башни высотой $h = 50$ м со скоростью $v = 25$ м/с. Найти кинетическую T и потенциальную U энергии через время $t = 1$ с от момента броска. Сопротивлением воздуха пренебречь.

62. Мяч массой m = 200 г бросают под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $v = 40$ м/с. Найти:

1) кинетическую T и потенциальную энергии U через время $t = 0{,}5$ с полета;

2) кинетическую T и потенциальную энергии U в верхней точке траектории.

Сопротивлением воздуха пренебречь.

63. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $\upsilon = 10$ м/с. Найти, на какой высоте h его кинетическая энергия будет равна потенциальной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

64. Две пружины с жесткостями k_1 и k_2 последовательно соединены и подвешены вертикально. На нижний конец пружин подвешивается груз. Найти отношение потенциальных энергий пружин.

12.6. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

65. При выстреле из ружья пуля массой $m = 50$ г получила кинетическую энергию $T_1 = 15$ Дж. Определить, какую кинетическую энергию получит ружье вследствие отдачи, если его масса $M = 4$ кг.

66. Ядро атома распадается на два осколка массами $m_1 = 1{,}6 \times \times 10^{-25}$ кг и $m_2 = 2{,}4 \cdot 10^{-25}$ кг. Определить кинетическую энергию второго осколка T_2, если кинетическая энергия первого осколка $T_1 = 18$ нДж.

67. Пара фигуристов стоит на льду. Партнер массой $m_1 = 80$ кг бросил вперед партнершу массой $m_2 = 50$ кг. Фигуристка поехала со скоростью $\upsilon_2 = 4$ м/с. Найти работу A, совершенную фигуристом при броске партнерши.

68. На рельсах стоит платформа, на которой в горизонтальном положении закреплено орудие без противооткатного устройства. Из орудия стреляют вдоль железнодорожного пути. Масса снаряда $m_1 = 20$ кг, скорость $\upsilon_1 = 500$ м/с. Масса платформы с орудием $M = 20$ т. На какое расстояние ℓ откатится платформа после выстрела, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$?

69. Пуля массой $m = 20$ г, летящая горизонтально со скоростью $\upsilon = 50$ м/с, попадает в баллистический маятник массой $M = 3$ кг и застревает в нем. Найти высоту h, на которую поднимется маятник после удара.

70. Пуля массой $m = 80$ г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник массой $M = 4$ кг и длиной $\ell = 1$ м и застревает в нем. Маятник после удара поднимется на угол $\varphi = 30°$. Найти скорость пули.

71. Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально со скоростью $\upsilon = 30$ м/с, попадает в баллистический маятник массой $M = 3$ кг и длиной $\ell = 1$ м и застревает в нем. Найти угол φ, на который поднимется маятник после удара.

72. Шарик падает вертикально на пол с высоты $h_1 = 1$ м и отскакивает от него на высоту $h_2 = 80$ см. Найти изменение импульса шарика $\Delta\vec{P}$.

73. Два мешка массами $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 1$ кг подвешены на веревках длиной $\ell = 2$ м так, что соприкасаются. Меньший мешок отклонили на угол $\varphi = 45°$ и отпустили. Считая удар абсолютно неупругим, определить, на какую высоту поднимутся мешки.

74. Шар массой $m_1 = 500$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 30$ м/с, сталкивается с шаром массой $m_2 = 300$ г, движущимся со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Считая удар центральным, абсолютно упругим, найти скорости шаров после удара $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$. Рассмотреть два случая:

1) когда шары движутся друг за другом;
2) когда шары движутся навстречу друг другу.

75. Шар массой $m_1 = 200$ г налетает на покоящийся шар $m_2 = 900$ г. Импульс движущегося шара $P_1 = 10$ кг·м/с. Удар центральный, абсолютно упругий. Найти:

1) скорости шаров после удара $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$;
2) изменение импульса первого шара $\Delta\vec{P}_1$;
3) кинетические энергии шаров после удара T_1' и T_2';
4) изменение кинетической энергии первого шара ΔT_1.

76. Шар массой $m_1 = m$ сталкивается с шаром массой $m_2 = 5$ т. Кинетические энергии шаров до удара одинаковы: $T_1 = T_2 = 200$ Дж. Считая удар центральным, абсолютно упругим, найти кинетические энергии шаров после удара T_1' и T_2'. Рассмотреть два случая:

1) когда шары движутся друг за другом;
2) когда шары движутся навстречу друг другу.

77. Шар массой $m_1 = 200$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 20$ м/с, налетает на покоящийся шар $m_2 = 500$ г. Удар абсолютно неупругий. Найти тепло Q, выделившееся при ударе.

78. Шар массой $m_1 = 500$ г, движущийся со скоростью $v_1 = 30$ м/с, сталкивается с шаром массой $m_2 = 300$ г, движущимся со скоростью $v_2 = 20$ м/с. Считая удар центральным, абсолютно неупругим, найти выделившееся тепло Q. Рассмотреть два случая:

1) когда шары движутся друг за другом;
2) когда шары движутся навстречу друг другу.

79. Шар массой $m_1 = m$ сталкивается с шаром массой $m_2 = 3$ т. Кинетические энергии шаров до удара одинаковы: $T_1 = T_2 = 500$ Дж. Считая удар центральным, абсолютно неупругим, найти выделившееся тепло Q. Рассмотреть два случая:

1) когда шары движутся друг за другом;
2) когда шары движутся навстречу друг другу.

80. Молот массой $m = 5$ кг ударяет небольшой кусок железа, лежащий на наковальне. Масса наковальни $M = 100$ кг. Массой куска железа пренебречь. Удар абсолютно неупругий. Определить КПД η удара молота.

81. Молотком массой $m_1 = 1$ кг забивают в стену гвоздь массой $m_2 = 70$ г. Определить КПД η удара молотка.

12.7. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

82. Диск радиусом $R = 8$ см вращается по закону $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 15$ рад, $B = -3$ рад/с^2, $C = 0,5$ рад/с^3. Для момента времени $t = 5$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;
2) тангенциальное ускорение точки a_τ;
3) полное ускорение точки a.

83. Диск радиусом $R = 10$ см вращается по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 5$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0,2$ рад/с^2, $D = -0,5$ рад/с^3. Для момента времени $t = 5$ с вычислить:

1) нормальное ускорение точки a_n;
2) тангенциальное ускорение точки a_τ;
3) полное ускорение точки a;

4) угол поворота φ, при котором угол между тангенциальным a_τ и нормальным ускорением a_n составляет $45°$.

84. Диск вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = Ct^2$, где $C = 0,2$ рад/с^2. Определить полное ускорение a точки на ободе диска через $t = 3$ с после начала движения, если линейная скорость точки в этот момент времени равнялась $v = 0,5$ м/с.

85. Диск радиусом $R = 20$ см вращается так, что угловая скорость зависит от времени по закону $\omega = At + Bt^2$, где $A = 15$ рад/с^2, $B = -3$ рад/с^3. Для момента времени $t = 5$ с вычислить угол между нормальным ускорением точки a_n и полным ускорением точки a.

86. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2. Найти радиус колеса, если через время $t = 2$ с после начала движения полное ускорение $a = 7,5$ м/с^2.

87. Диск начинает вращаться равноускоренно и за время $t = 20$ с его частота вращения стала $n = 300$ мин$^{-1}$. Найти угловое ускорение диска ε и число оборотов N, которые он сделал за это время.

88. Велосипедное колесо вращается с частотой $n = 3$ с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через время $t = 150$ с. Найти угловое ускорение колеса ε и число оборотов N, которое оно сделало за это время, если считать движение колеса равнозамедленным.

89. Колесо автомашины вращается равнозамедленно. За время $t = 2$ мин оно изменило частоту вращения от $n_1 = 300$ до $n_2 = 60$ мин$^{-1}$. Найти угловое ускорение колеса ε и число оборотов N, которые оно сделало за это время.

90. Якорь электродвигателя, вращающийся с частотой $n_1 = 50$ с$^{-1}$, после выключения тока, сделав $N = 628$ об. остановился. Найти угловое ускорение якоря ε.

91. Линейная скорость точки, находящейся на ободе вращающегося диска, в три раза больше линейной скорости, расположенной на 6 см ближе к его оси. Определить радиус диска.

12.8. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

92. Шарики массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = 3m$ и $m_4 = 4m$ ($m = 20$ г) закреплены на тонком невесомом стержне через равные расстояния $\ell = 10$ см так, как показано на рис. 12.5. Найти момент инерции J системы относительно оси, проходящей через точку O на краю стержня перпендикулярно ему.

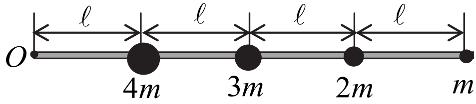


Рис. 12.5

93. Найти момент инерции тонкого однородного стержня длиной $\ell = 60$ см и массой $m = 200$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку, отстоящую от его края:

1) на $\frac{1}{4}\ell$;

2) на $\frac{1}{3}\ell$;

3) на $\frac{1}{5}\ell$.

94. Найти момент инерции J проволочного прямоугольника относительно оси, проходящей через точку пересечения диагоналей перпендикулярно его плоскости. Стороны прямоугольника $a = 20$ см и $b = 10$ см. Масса равномерно распределена по прямоугольнику с линейной плотностью $\tau = 0{,}1$ кг/м.

95. Найти момент инерции J проволочного прямоугольника относительно оси, совпадающей с длинной стороной прямоугольника. Стороны прямоугольника $a = 20$ см и $b = 10$ см. Масса равномерно распределена по прямоугольнику с линейной плотностью $\tau = 0{,}1$ кг/м.

96. Найти момент инерции J проволочного прямоугольника относительно оси, совпадающей с короткой стороной прямоугольника. Стороны прямоугольника $a = 20$ см и $b = 10$ см. Масса равномерно распределена по прямоугольнику с линейной плотностью $\tau = 0{,}1$ кг/м.

97. Найти момент инерции J проволочного квадрата относительно оси, проходящей через одну из его вершин перпендикулярно плоскости квадрата. Сторона квадрата $a = 20$ см. Масса проволочного квадрата $m = 200$ г.

98. Два однородных тонких стержня скреплены под прямым углом, как показано на рис. 12.6. Масса первого стержня $m_1 = 200$ г, длина $\ell_1 = 50$ см, масса второго стержня $m_2 = 400$ г, длина $\ell_2 = 60$ см. Найти момент инерции:

1) относительно оси OO';

2) относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости чертежа.

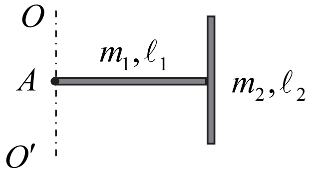


Рис. 12.6

99. На концах тонкого однородного стержня массой $M = 4$ т и длиной $\ell = 100$ см закреплены шарики массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ $(m = 100\ \text{г})$. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через точку O перпендикулярно стержню для трех случаев, изображенных на рис. 12.7.

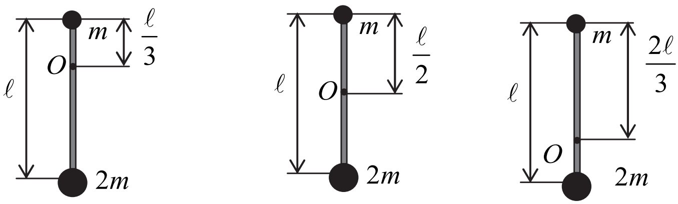


Рис. 12.7

100. Два проволочных кольца массами $m_1 = m$, $m_2 = 2m$ $(m = 50\ \text{г})$ и радиусами $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$ $(R = 5\ \text{мм})$ соединены между собой и могут вращаться вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости колец (рис. 12.8). Найти момент инерции J системы относительно оси, проходящей через точку O (рассмотреть два случая).

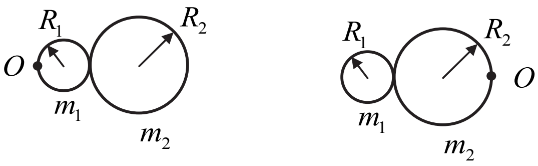


Рис. 12.8

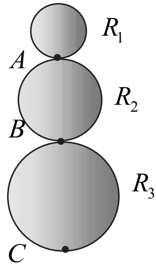


Рис. 12.9

101. Диаметр диска $d = 10$ см, масса $m = 150$ г. Найти момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной диску, проходящей:

а) через середину одного из радиусов;

б) через точку на краю диска.

102. Снежная баба состоит из трех шаров радиусами $R_1 = 20$ см, $R_2 = 30$ см и $R_3 = 40$ см (рис. 12.9). Плотность снега $\rho = 150$ кг/м^3. Найти момент инерции снежной бабы относительно оси, перпендикулярной оси симметрии снежной бабы и проходящей через:

а) точку *C*;

б) точку *B*;

в) точку *A*.

12.9. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

103. Стержень массой $m = 500$ г и длиной $\ell = 0{,}8$ м может вращаться вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно стержню. На стержень действуют силы: $\left|\vec{F}_1\right| = 15$ Н, $\left|\vec{F}_2\right| = 9$, $\left|\vec{F}_3\right| = 8$, $\left|\vec{F}_4\right| = 12$, $\left|\vec{F}_5\right| = 16$, $\left|\vec{F}_6\right| = 18$, $\left|\vec{F}_7\right| = 20$ Н так, как показано на рис. 12.10. Угол $\alpha = 45°$. Найти угловое ускорение вращения стержня ε.

104. Стержень массой $m = 500$ г и длиной $\ell = 0{,}8$ м может вращаться вокруг оси, проходящей через точку *O* перпендикулярно стержню. На стержень действуют силы: $\left|\vec{F}_1\right| = 15$ Н, $\left|\vec{F}_2\right| = 9$, $\left|\vec{F}_3\right| = 8$, $\left|\vec{F}_4\right| = 12$,

$\left|\vec{F}_5\right| = 16$, $\left|\vec{F}_6\right| = 18$, $\left|\vec{F}_7\right| = 20$ Н так, как показано на рис. 12.11. Угол $\alpha = 45^\circ$. Найти угловое ускорение вращения стержня ε.

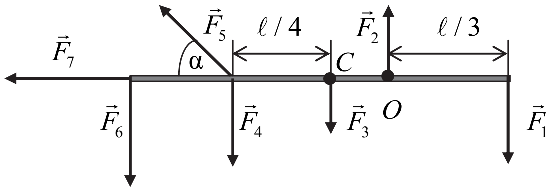


Рис. 12.10

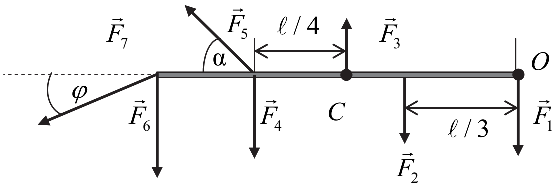


Рис. 12.11

105. Через блок, имеющий форму диска, перекинут легкий нерастяжимый шнур, на котором подвешены грузики массами $m_1 = 50$ г и $m_2 = 100$ г (рис. 12.12). С каким ускорением a будут двигаться грузики, если масса блока $m = 400$ г?

106. Через блок, имеющий форму диска, перекинут легкий нерастяжимый шнур, на котором подвешены грузики массами $m_1 = 500$ г и $m_2 = 600$ г, масса блока $m = 800$ г. Найти силы натяжения нитей T_1 и T_2 (рис. 12.12).

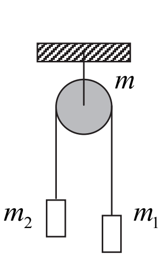


Рис. 12.12

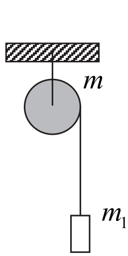


Рис. 12.13

107. На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20$ см намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m_1 = 2$ кг (рис. 12.13). Груз, разматывая нить, опускается вниз с ускорением $a = 4$ м/с^2. Найти массу вала m.

108. На однородный полый цилиндрический вал радиусом $R = 10$ см и массой $m = 1$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m_1 = 200$ г. Груз, разматывая нить, опускается вниз. Найти:

1) ускорение груза a;

2) силу натяжения нити T;

3) зависимость угла поворота вала от времени $\varphi(t)$;

4) тангенциальное и нормальное ускорение точек, находящихся на ободе вала.

109. Тело массой $m_1 = 0,2$ кг соединено через блок тонкой легкой нитью с телом массой $m_2 = 0,4$ кг и скользит по поверхности стола (рис. 12.14). Масса блока $m = 800$ г и равномерно распределена по его ободу. Коэффициент трения тела о поверхность $\mu = 0,1$. Определить ускорение a, с которым будут двигаться тела.

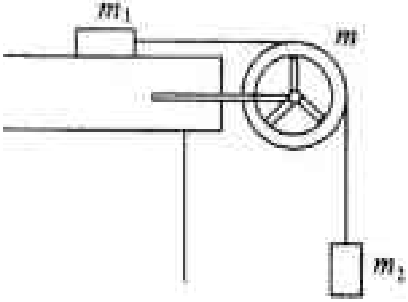


Рис. 12.14

110. Маховик в виде сплошного диска вращается с частотой $n = 240$ об/мин. Момент инерции маховика $J = 120$ кг$\cdot$м^2. Через время $t = 1$ мин после начала действия сил торможения маховик остановился. Найти:

1) момент сил торможения;

2) число оборотов, сделанное маховиком до полной остановки.

111. Колесо скатывается с наклонной плоскости, образующей угол $\varphi = 30°$ с горизонтом. Найти линейное ускорение центра колеса.

112. Шар скатывается с наклонной плоскости, образующей угол $\varphi = 30°$ с горизонтом. Найти линейное ускорение центра колеса.

113. К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 10$ см приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н. При вращении на диск действует момент сил трения $M = 12$ Н·м. Определить массу m диска, если его угловое ускорение постоянно: $\varepsilon = 16$ рад/с^2.

114. Тонкий однородный стержень массой $m = 300$ г и длиной $\ell = 20$ см вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 5$ рад/с^2 вокруг оси, проходящей через середину стержня перпендикулярно ему. Определить момент сил вращения.

115. Сплошной цилиндрический вал массой $m = 800$ г и радиусом $R = 10$ см вращался с частотой $n = 480$ об/мин. К его поверхности прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через время $t = 10$ с. Найти коэффициент трения μ.

116. Шар массой $m = 200$ г и радиусом $R = 10$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угла поворота шара от времени имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 5$ рад, $B = -1$ рад/с, $C = 0{,}2$ рад/с^2, $D = -0{,}5$ рад/с^3. Найти момент сил в момент времени $t = 10$ с.

117. Однородный диск радиусом $R = 5$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O (рис. 12.15). Диск отклонили от вертикали на угол $\beta = 20°$ и отпустили. Определить в начальный момент времени угловое ускорение ε и линейное ускорение a точки B на ободе диска.

118. Однородный диск радиусом $R = 50$ см может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку O (рис. 12.16). Диск отклонили от вертикали на угол $\beta = 30°$ и отпустили. Определить в начальный момент времени угловое ускорение ε и линейное ускорение a точки B, расположенной в центре диска. Расстояние от точки B до точки O равно половине радиуса диска.

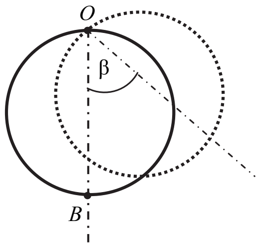


Рис. 12.15

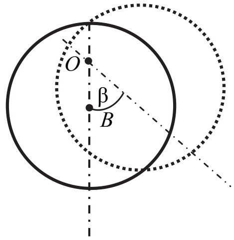


Рис. 12.16

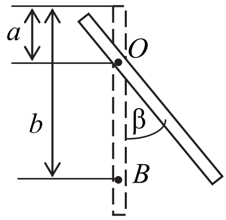


Рис. 12.17

119. Тонкий однородный стержень длиной $\ell = 1$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через точку O (рис. 12.17). Стержень отклонили от вертикали на угол $\beta = 30°$ и отпустили. Определить в начальный момент времени угловое ускорение ε и линейное ускорение a точки B, расположенной на стержне. Вычисления провести для следующих случаев:

1) $a = 0,\ b = \dfrac{2}{3}\ell,\ \beta = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $a = \dfrac{\ell}{3},\ b = \ell,\ \beta = \dfrac{\pi}{3}$;

3) $a = \dfrac{\ell}{4},\ b = \dfrac{\ell}{2},\ \beta = \dfrac{\pi}{4}$;

12.10. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

120. На краю платформы в виде диска, вращающейся вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 4$ об/мин, стоит человек массой $m_1 = 70$ кг. Когда человек перешел к центру платформы, она стала вращаться с частотой $n_2 = 8$ об/мин. Найти массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

121. Горизонтальная платформа в виде однородного диска вращается вокруг оси, проходящей через ее центр с частотой $n_1 = 20$ об/мин. Масса платформы $m_1 = 100$ кг, радиус $R = 0{,}8$ м. В центре платформы стоит человек и держит в вытянутых руках гири. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции с $J_1 = 3$ до $J_2 = 1$ кг $\cdot$ м^2?

122. На краю горизонтальной платформы в виде диска радиусом $R = 2$ м и массой $M = 100$ кг стоит человек массой $m_1 = 70$ кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой частотой будет вращаться платформа, если человек пойдет вдоль ее края со скоростью $u = 2$ м/с относительно платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

123. На краю горизонтальной платформы в виде диска радиусом $R = 1$ м и массой $M = 200$ кг стоит человек массой $m_1 = 60$ кг. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Пренебрегая трением, найти, на какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль ее края и, обойдя его, вернется в исходную точку. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

124. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и держит в руках стержень длиной $\ell = 0,8$ м и массой $m_1 = 3$ кг, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с частотой $n_1 = 8$ об/мин. С какой частотой будет вращаться скамья, если человек повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека со скамьей $J_1 = 5\ кг \cdot м^2$.

125. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и держит в руках стержень, служащий осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $n_1 = 10$ об/с. С какой частотой будет вращаться скамья, если человек повернет стержень на угол $180°$? Суммарный момент инерции человека со скамьей $J_1 = 6\ кг \cdot м^2$. Радиус колеса $R = 0,5$ м, масса колеса $m = 3$ кг. Массу колеса можно считать равномерно распределенной по его ободу.

126. Человек стоит на краю скамьи Жуковского и ловит рукой мяч массой $m = 0,4$ кг, летящий горизонтально по касательной к скамье Жуковского со скоростью $v = 8$ м/с. С какой частотой будет вращаться скамья после того как человек поймает мяч? Суммарный момент инерции человека со скамьей $J_1 = 5\ кг \cdot м^2$.

127. Человек стоит на скамье Жуковского на расстоянии $r = 0,5$ м от ее центра и ловит рукой мяч массой $m = 0,6$ кг, летящий горизонтально по касательной со скоростью $v = 10$ м/с. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 2$ рад/с. С какой угловой скоростью будет вращаться скамья после того как человек поймает мяч? Суммарный момент инерции человека со скамьей $J = 7\ \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

128. Однородный тонкий стержень массой $m_1 = 0,4$ кг и длиной $\ell = 2$ м может вращаться вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно стержню. В край стержня попадает пластилиновый шарик $m_2 = 0,1$ кг, летящий со скоростью $v = 3$ м/с перпендикулярно стержню, и прилипает к нему. Найти угловую скорость вращения стержня ω после того как к нему прилипнет шарик.

129. Однородный тонкий стержень массой $m_1 = 0,3$ кг и длиной $\ell = 1$ м может вращаться вокруг оси, перпендикулярной стержню и отстоящей от центра масс на расстояние $\ell / 3$. В дальний край стержня попадает пластилиновый шарик $m_2 = 0,05$ кг, летящий со скоростью $v = 5$ м/с перпендикулярно стержню, и прилипает к нему. Найти угловую скорость вращения стержня ω после того как к нему прилипнет шарик.

130. Однородный диск массой $m_1 = 0,3$ кг и радиусом $r = 0,5$ м может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной диску и проходящей через точку *B* (рис. 12.18). Расстояние между точкой *B* и центром диска (точкой *O*) $\ell = 0,2$ м. В точку *A* на краю диска попадает пластилиновый шарик массой $m_1 = 0,05$ кг, летящий со скоростью $v = 6$ м/с. Найти угловую скорость вращения диска ω после того как к нему прилипнет шарик.

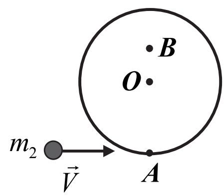


Рис. 12.18

12.11. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ И РАБОТА

131. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу $m = 0,3$ кг, катятся без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v = 5$ м/с. Найти кинетические энергии обруча T_1 и сплошного цилиндра T_2.

132. Шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Кинетическая энергия шара $T = 21$ кДж . Найти кинетическую энергию поступательного движения шара T_1 и кинетическую энергию вращательного движения шара T_2 .

133. Полый тонкостенный цилиндр массой $m = 0,3$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью $v_1 = 5$ м/с , налетает на вертикальную стену и отскакивает от нее со скоростью $v_2 = 2$ м/с . Найти тепло Q , выделившееся при ударе.

133. Обруч и диск одинаковой массы $m = 0,4$ кг катятся без скольжения по горизонтальной плоскости с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с . Кинетическая энергия обруча $T_1 = 50$ кДж . Найти кинетическую энергию диска T_2 .

134. Карандаш длиной $\ell = 15$ см , поставленный вертикально, падает на стол. Найти линейную скорость v острия карандаша в момент падения. Считать, что нижний конец карандаша не проскальзывает.

135. Маховик с моментом инерции $J = 2$ кг $\cdot$ м^2 вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угла вращения шара от времени имеет вид $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $A = 5$ рад , $B = -1$ рад/с , $C = 0,2$ рад/с^2 , $D = -0,5$ рад/с^3 . Найти мощность в момент времени $t = 10$ с .

136. Якорь двигателя вращается с частотой $n = 1200$ об/мин . Определить вращающий момент M , если двигатель развивает мощность $N = 600$ Вт .

137. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0,3$ м и массой $m = 90$ кг покоится. Какую работу надо совершить, чтобы раскрутить его до частоты $n = 600$ об/мин ?

138. Кинетическая энергия маховика $T = 0,4$ кДж . Под действием постоянного тормозящего момента маховик начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 80$ об., остановился. Найти момент сил торможения M .

139. К ободу однородного сплошного диска массой $m = 20$ кг , насаженного на ось, проходящую через центр масс диска перпендикулярно ему, приложена постоянная касательная сила $F = 30$ Н . Определить кинетическую энергию диска T через время $t = 2$ с после начала действия силы.

140. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 40$ см и массой $m = 90$ кг, вращаясь равнозамедленно, уменьшил свою частоту вращения от $n_1 = 600$ до $n_2 = 480$ об/мин за время $t = 2$ мин . Найти:

1) угловое ускорение маховика ε;

2) момент сил торможения M;

3) работу торможения A .

141. Полый цилиндр скатывается без скольжения с наклонной плоскости с высоты. Найти скорость цилиндра v в конце наклонной плоскости. Чему равна скорость сплошного цилиндра при тех же условиях?

142. С наклонной плоскости, составляющей угол $\varphi = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определить время движения шарика, если известно, что высота наклонной плоскости $h = 30$ см .

143. Колесо радиусом $R = 0,3$ м и массой $m = 2$ кг скатывается без скольжения с наклонной плоскости длиной $\ell = 3$ м и углом наклона $\varphi = 30°$ к горизонту. Определить момент инерции колеса, если его скорость в конце наклонной плоскости составляла $v = 5$ м/с .

144. Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтальной плоскости без скольжения со скоростью $v = 50$ м/с . Определить длину пути ℓ , которую он пройдет при подъеме в гору за счет своей кинетической энергии, если угол наклона горы к горизонту $\varphi = 30°$.

12.12. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

145. В оба конца вагона поезда, движущегося со скоростью $v = 60$ км/ч , одновременно, с точки зрения пассажира в вагоне, ударяют молнии. Какое время между ударами Δt зарегистрирует неподвижный наблюдатель, если длина вагона $\ell = 20$ м ?

146. Две нестабильные частицы движутся в K системе отсчета в одном направлении со скоростью $v = 0,99c$. Расстояние между ними в этой системе отсчета $\ell = 120$ м . В некоторый момент времени частицы распадаются одновременно в системе отсчета, связанной с ними.

Какой промежуток времени между распадами зафиксировали в K системе отсчета? Какая из частиц распалась раньше в K системе отсчета?

147. В системе отсчета K', движущейся со скоростью $v = 0,6c$ параллельно оси x системы отсчета K, происходит вспышка света. Пучок света направлен вдоль оси y'. Отразившись от зеркала, пучок возвращается в исходную точку через время 5 мкс. Полагая, что испускание света – событие A, возвращение света в исходную точку – событие B, найти время и расстояние между этими событиями в системе отсчета K.

148. В системе отсчета K происходит событие A, через $t = 5$ с в другой точке этой же системы отсчета происходит событие B. На каком расстоянии в системе отсчета K должны происходить эти события, чтобы в системе отсчета K' они были одновременны? Система отсчета K' движется со скоростью $v = 0,2c$ параллельно оси x системы отсчета K.

149. Найти, во сколько раз увеличится время жизни нестабильной частицы по часам неподвижного наблюдателя, если скорость движения частицы $v = 0,6c$.

150. На космическом корабле находятся часы, синхронизированные до старта с часами на Земле. Сколько времени пройдет на ракете, когда на Земле пройдет один год? Скорость движения ракеты $v = 0,5$с. Сколько времени пройдет на ракете, если она движется со скоростью $v_1 = 7,9$ км/с?

151. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $t_0 = 5$ нс. Какой путь пройдет эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, если в этой системе отсчета жизни частицы $t = 10$ нс?

152. В лабораторной системе отсчета π-мезон с момента рождения до момента распада пролетел расстояние $\ell = 100$ м. Скорость движения π-мезона $v = 0,99999c$. Определить собственное время жизни π-мезона.

153. Собственное время жизни μ-мезона $t_0 = 2$ мкс. От места рождения до места распада μ-мезон пролетел в лабораторной системе отсчета расстояние $\ell = 6$ км. С какой скоростью двигался μ-мезон?

154. С какой скоростью должно двигаться тело, чтобы его продольный размер сократился в 2 раза?

155. Определить собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета скорость стержня $v = 0,2c$, длина $\ell = 2$ м, а угол между ним и направлением его движения $\theta = 30°$.

156. В системе отсчета K' покоится стержень, собственная длина которого $\ell_0 = 5$ м. Стержень расположен так, что составляет угол $\theta = 30°$ с осью x'. Определить длину стержня ℓ и угол φ в системе отсчета K, если скорость движения системы отсчета K' относительно K равна $v = 0,2c$.

157. В системе отсчета K' покоится квадрат, две стороны которого параллельны оси x', длина стороны $a = 1$ м. Определить площадь фигуры в системе отсчета K, если скорость движения системы отсчета K' относительно K равна $v = 0,2c$.

158. В системе отсчета K' покоится квадрат, две стороны которого параллельны оси x', длина стороны $a = 2$ м. Определить угол между диагоналями фигуры в системе отсчета K, если скорость движения системы отсчета K' относительно K равна $v = 0,5c$.

159. В системе отсчета K покоится равнобедренный прямоугольный треугольник, один из катетов которого параллелен оси x, длина катета $a = 2$ м. Определить:

1) площадь треугольника в системе отсчета K';

2) угол между одним из катетов и гипотенузой в системе отсчета K', если скорость движения системы отсчета K' относительно K равна $v = 0,5c$ и направлена вдоль оси x.

160. Две релятивистские частицы движутся со скоростями $v = 0,5c$ и $v = 0,8c$ вдоль одной прямой. Определить скорость одной из частиц относительно другой:

1) если они движутся друг за другом;

2) если они движутся навстречу друг другу.

161. Ион, вылетев из ускорителя, испустил фотон в направлении своего движения. Определить скорость фотона относительно ускорителя, если скорость иона относительно ускорителя равна $v = 0,5c$.

162. Космический корабль улетает с Земли со скоростью $v = 0,5c$, с корабля стартует ракета в направлении от Земли со скоростью $v = 0,8c$ относительно корабля. Найти скорость ракеты относительно Земли.

163. Частица движется в системе отсчета K со скоростью $u = 0,5c$ под углом $\theta = 60°$ к оси x. Найти скорость движения частицы в системе отсчета K' и угол θ', под которым она движется к оси x'. Скорость системы отсчета K' относительно K направлена вдоль оси x и равна $v = 0,2c$.

164. Частица движется в системе отсчета K' со скоростью $u = 0,5c$ под углом $\theta = 60°$ к оси x'. Найти скорость движения частицы в системе отсчета K и угол θ, под которым она движется к оси x. Скорость системы отсчета K' относительно K направлена вдоль оси X и равна $v = 0,2c$.

165. Электрон движется со скоростью $v = 0,5c$. Найти релятивистский импульс электрона.

166. Найти скорость релятивистского протона, если его импульс $p = 6,69 \cdot 10^{-19}$ Н/м.

167. Определить скорость, с которой должна двигаться частица, чтобы ее релятивистский импульс превышал ньютоновский в 3 раза.

168. При каких скоростях частицы ее релятивистский импульс отличается от классического на 10 %?

169. Частица движется со скоростью $v = 0,2c$. Найти отношение полной энергии к энергии покоя частицы.

170. Определить скорость движения частицы, если ее полная энергия в 2 раза больше энергии покоя частицы.

171. Вычислить в джоулях и электрон-вольтах энергию покоя электрона и протона.

172. Электрон движется со скоростью $v = 0,5c$. Найти его кинетическую энергию.

173. При какой скорости частицы ее кинетическая энергия равна энергии покоя?

174. При какой скорости частицы ее кинетическая энергия в 3 раза превышает энергию покоя?

175. Найти скорость электрона, если его кинетическая энергия:

1) T = 10 МэВ;

2) T = 1 кэВ.

176. Найти скорость протона, если его кинетическая энергия:

1) T = 10 МэВ;

2) T = 1 ГэВ.

177. Определить релятивистский импульс и кинетическую энергию протона, движущегося со скоростью $v = 0,9c$.

178. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его скорость достигла значения $v = 0,9$с ?

179. Определить, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

180. Рассчитать работу, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость электрона от $v_1 = 0,2c$ до $v_2 = 0,5c$.

181. Определить релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого T = 1 ГэВ.

182. Покоившаяся частица массой M распадается на две одинаковые частицы с массами m. Найти импульсы этих частиц.

183. Покоившаяся частица массой M распадается на две одинаковые частицы с массами m. Найти полные энергии этих частиц.

184. Покоившаяся частица массой M распадается на две одинаковые частицы с массами m. Найти кинетические энергии этих частиц.

185. Покоившаяся частица массой M распадается на две частицы с массами m_1 и m_2. Найти импульсы этих частиц.

186. Покоившаяся частица массой M распадается на новую частицу с массой m и фотон. Найти импульс и энергию фотона.

187. Покоившаяся частица распадается на новую частицу с массой m и фотон с энергией E. Найти массу распавшейся частицы M.

188. Покоившаяся частица распадается на две частицы массами m_1 и m_2 и с импульсами p. Найти массу распавшейся частицы M.

189. Определить скорость частицы, кинетическая энергия которой T = 500 МэВ, а импульс $p = 4,61 \cdot 10^{-19}$ кг/м $\cdot$ с .

190. В лабораторной системе отсчета находятся две частицы. Одна частица массой покоя m_0 движется со скоростью $v = 0,8c$. Другая частица с массой покоя $2m_0$ – покоится. Найти скорость центра масс частиц. Вычислить скорости и импульсы частиц в системе центра масс.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики / Т.И. Трофимова. – М., 2007.

2. *Чертов А.Г.* Задачник по физике / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – М., 2008.

3. *Волькенштейн В.С.* Сборник задач по общему курсу физики / В.С. Волькенштейн.– СПб., 2003.

4. *Иродов. И.Е.* Основные законы механики / И.Е. Иродов. – М.: Высшая школа, 2000.

5. *Трофимова Т.И.* Сборник задач по курсу физики / Т.И. Трофимова. – М., 2008.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Сарина Марина Павловна

МЕХАНИКА
МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА
И ТЕРМОДИНАМИКА

Часть 1

МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *Н.А. Лукашова*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 16.09.2014. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 500 экз.
Уч.-изд. л. 10,92. Печ. л. 11,75. Изд. № 322/13. Заказ № 1040. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20