8.06.2010

Основы теории вероятностей
(дискретные случайные величины)

Теория вероятностей широко используется в молекулярной физике.

Классическое определение вероятности. Пусть у нас имеется случайное событие (событие исход (результат) которого заранее не известен), исходы которого могут принимать ряд значений [например, для кубика это выпадение $\{1,2,3,4,5,6\}$, т.е. 6 исходов]. В терминах этих исходов надо сформулировать „наше" событие: Например наше событие – „выпадение чётной грани". Значит, нашему событию удовлетворяют исходы $\{2,4,6\}$.

Тогда вероятность наступления нашего события будет:

$$P_{\text{чётн. грани}} = \frac{\text{Количество исходов „наших"}}{\text{Общее кол-во возможных исходов}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ – это теоретич. рез-т.}$$

НО:

а) $\frac{1}{2}$ – это не значит, что, бросив кубик 2 раза, вы получите один раз „чёт", другой раз „нечёт".

б) $\frac{1}{2}$ – это значит, что если вы будете бросать „много" (а лучше „∞ много"), то „приблизительно" в $\frac{\text{„много"}}{2}$ случаях (а по теории в $\frac{\text{„∞ много"}}{2}$ случаях) вы получите „чётную грань".

в) Чем больше это „много", тем, по теории, меньше будет „относительное отклонение" $\frac{\text{„много"}}{2}$ от $\frac{1}{2}$.

г) Важно, все эти нюансы отклонений реальных бросаний от идеальных изучают точные науки: теория вероятностей и математическая статистика.

События могут быть „сложными", составленными из „простых", тогда и вероятность сложных событий определённым образом „связана" с вероятностями простых событий. Сложное событие может быть „суммой" или „произведением" простых событий.

„Сумма событий" (или одно, или другое): $\{\text{выпадение чётной}\} = \{\{2\} \overset{+}{\text{или}} \{4\} \overset{+}{\text{или}} \{6\}\}$

$$P\{2\} = \frac{1}{6} = P\{4\} = P\{6\}; \quad P\{\text{чётн}\} = P\{2\} + P\{4\} + P\{6\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(I способом: классич. $P\{\text{2 или 4 или 6}\} = \frac{3 \text{ исх}}{6 \text{ исх}} = \frac{1}{2}$ уже решали)

Вероятность суммы ~~нез~~ несовместных (которые не могут осуществиться одновременно в одном исходе) **равна сумме вероятностей этих событий**

„Произведение событий" (и одно, и другое): Пусть бросают одновременно 2 кубика. (или один кубик 2 раза)

$\{\text{Наше событие}\} = \left\{ \begin{array}{l} 1^{\text{ый}} \text{ кубик (раз) выпадет „3"} \\ 2^{\text{ой}} \text{ кубик (раз) выпадет „5"} \end{array} \right\}$

I способ: классич. Всего $= \{11, 12, \ldots 66\} = 36$ исходов

наш $= \{35\} = 1$ исх $P_{35} = \frac{1}{36}$

II способ: Оба кубика (бросания) независимы

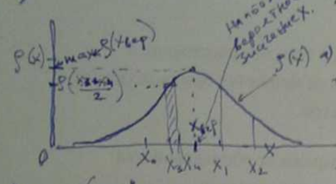
$P_3 = \frac{1}{6}$ $P_5 = \frac{1}{6}$ $P\{3 \text{ и } 5\} = P_3 \cdot P_5 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей каждого из событий.

[illegible]

Непрерывные случайные величины.

Случайные величины могут принимать и непрерывные значения (∞ много), ограниченные каким-либо требованием. Для того, чтобы показать, что одни значения могут встречаться „относительно чаще“, чем другие, используют понятия функции плотности вероятности случайной величины.



Пусть X – случайная величина

$\rho(x)$ – плотность вер-ти случ. величины X

а) $\rho(x_1) > \rho(x_2)$ см. рис. ⇒ значения случайной величины X вблизи значения x_1 наблюдаются чаще, чем значения вблизи x_2.

НО! – это при „большом“ числе наблюдений (при малом числе наблюдений „всякое бывает“..)

б) „философское“, т.к. в „жизни“ всё имеет конечное значение, конечное кол-во и т.п., а кол-во точек на непрерывной прямой X бесконечно (даже на любом малом участке), то и имеет смысл говорить не о конкретном значении случайной величины, а о попадании значения случайной величины в некоторый „малый“ (физически малый) интервал значений. Тогда вер-ть того, что случайная величина имеет значение в интервале dx вблизи значения x_0, определяется как

$$\boxed{dP(x_0) \overset{def}{=} \rho(x_0)\,dx}$$

Вероятность попадания в отрезок (интервал) $x_1 \le X \le x_2$ (строгое, нестрогое неважно) (по смыслу это или x_1, или x_1+чуть, или x_1+чуть больше..., или x_2, т.е. суммирование → интеграл)

$$\boxed{P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\,dx}$$

Примечание: Если интервал $[x_3; x_4]$ мал, то

$$P[x_3 \le x \le x_4] = \int_{x_3}^{x_4} \rho(x)\,dx \approx \rho\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\cdot(x_4-x_3)$$

т.е. площадь узкой криволинейной трапеции заменяем на площадь прямоугольника с высотой в средней точке (см. рис.)

Условие нормировки (т.к. вер-ть того, что случ. велич. имеет хотя бы какое-то значение равна 1, то)

$$\boxed{1 = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx.}$$

Формы функции плотностей вероятности различных физических величин могут быть различны (и есть различны).

Среднее значение случайной величины:

$$X_{ср} = \sum_{i=1}^{m} x_i \overset{\text{вер. } x_i}{P_i} = x_1\cdot\frac{N_1}{N} + \dots + x_{m-1}\cdot\overset{N_{m-1}/N}{P_{m-1}} + x_m \overset{N_m/N}{P_m} = \frac{\overbrace{(x_1+x_1\dots)}^{N_1} + \overbrace{(x_2+\dots)}^{N_2} + \dots + \overbrace{(x_m+x_m)}^{N_m}}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N} x_j}{N}$$

Внимание: У дискретной С.В. см. выше m-разных значений, но было сделано N наблюдений

$$X_{ср} = \overline{X} = \langle X \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot \overset{\text{вер. } x}{dP(x)}$$