8.05.2020.

Распределение Максвелла по скоростям (вывод)

В 3D пр-ве у нас есть 3 независимых направления в пр-ве. Пусть вер-ть того, что у молекулы проекция скорости v_x будет $dP(v_x)=\varphi(v_x)\,dv_x$. Вид $\varphi(v_i)$ одинаков для x, y, z.
Аналогично, $dP(v_y)=\varphi(v_y)\,dv_y$; $dP(v_z)=\varphi(v_z)\,dv_z$.

$\varphi(v_x)$ — плотность вер-ти распределения по проекции скорости на ось X.

Т.к. распределения по направлениям x, y, z независимы, то $dP(v_x, v_y, v_z)=dP(v_x)\,dP(v_y)\,dP(v_z)$ — произведение вероятн.

т.к. задание $v_x; v_y; v_z$ однозначно определяют величину скорости $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$, то $v=\sqrt{v_x^2+\ldots}$

$$dP(v_x, v_y, v_z) \underset{\text{сказать}}{=} \text{можно} = dP(v) = \cancel{\ldots} \overset{\text{тогда}}{=} \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)\,dv_x\,dv_y\,dv_z$$

Определим так: $f(v)=\varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z) \Rightarrow \ln f = \ln\varphi_x+\ln\varphi_y+\ln\varphi_z \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial v_x}$

$$\frac{\partial f(v)}{\partial v_x}=\frac{\partial f(v)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial v_x}=f'_v\cdot\frac{v_x}{v};$$

$$\frac{\partial \ln f}{\partial f}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial v_x}=\frac{1}{f}\cdot f'_v\cdot\frac{v_x}{v}=\frac{\partial \ln\varphi_x}{\partial\varphi_x}\cdot\frac{\partial\varphi_x}{\partial v_x}=\frac{1}{\varphi_x}\cdot\frac{\partial\varphi_x}{\partial v_x}$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial f}{f\,\partial v}=\underbrace{\frac{1}{v_x}\frac{\partial\varphi_x}{\varphi_x\,\partial v_x}}_{\text{не зависит от } v_y v_z}$$

Аналогичные ур-я будут и для

$$=\underbrace{\frac{1}{v_y}\frac{\partial\varphi_y}{\varphi_y\,\partial v_y}}_{\text{не завис. от } v_x v_z}=\underbrace{\frac{1}{v_z}\frac{\partial\varphi_z}{\varphi_z\,\partial v_z}}_{\text{не зависит от } v_x v_y}=\text{const}!\ \Rightarrow \text{обозначим} -\alpha$$

Пусть $\frac{1}{v}\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{1}{f}=-\alpha$ $\qquad \frac{1}{v_x}\frac{\partial\varphi_x}{\partial v_x}\cdot\frac{1}{\varphi_x}=-\alpha$

$$\frac{\partial f}{f}=-\alpha v\,dv \qquad \frac{\partial\varphi_x}{\varphi_x}=-\alpha v_x\,dv_x$$

$$f= \qquad \varphi_x=\varphi(v_x)=Ae^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Из нормировки $1=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v_x)\,dv_x=A\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \Rightarrow \underline{\varphi(v_x)=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}}$

Вспомним, что было, $\left\langle\frac{m_0v^2}{2}\right\rangle=\frac{3}{2}kT$; $\langle v_x^2\rangle=\frac{1}{3}\langle v^2\rangle$; $x_{ср}=\int_{-\infty}^{\infty}x\,dP(x)$

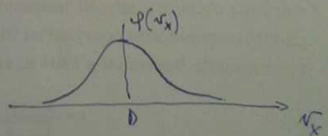
тогда

$$\frac{kT}{m_0}=\langle v_x^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}v_x^2\varphi(v_x)\,dv_x=\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\cdot v_x^2e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}dv_x=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}-2\cdot\frac{d}{d\alpha}\left\{e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}\right\}dv_x=$$

$$=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\,(-2)\cdot\frac{d}{d\alpha}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\alpha v_x^2}{2}}dv_x\right\}=\frac{1}{\alpha} \qquad \Rightarrow \alpha=\frac{m_0}{kT}$$

Итого:

$$\boxed{\varphi(v_x)=\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}\cdot e^{-\frac{m_0v_x^2}{2kT}}}$$



$\varphi(v_x)\,dv_x=dP(v_x)$ — вер-ть того, что проекция скорости молекулы на ось X имеет значение около v_x в интервале dv_x.

Например: $\varphi(100)\cdot 1 \Rightarrow$ вер-ть ...., что $v_x=100\,м/с \pm 0{,}5\,м/с$ (я выбрал симметричный в обе стороны интервал по 0,5 м/с)
в „СИ"