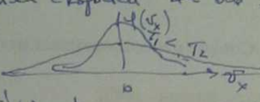
8.05.2020

Распределения Максвелла по скоростям и энергиям

① Распределение по проекциям скоростей на ось X (произвольное направление)

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}$$



Симметричное

$$P(v_x < 0, \text{т.е. влево}) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(v_x)\,dv_x = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v_x)\,dv_x = 1 \quad \varphi(0) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \Rightarrow T\uparrow \Rightarrow \varphi(0)\downarrow$$

$\Rightarrow$ С ростом $T\uparrow$ понижается и расширяется, но площадь = 1

$$\langle v_x \rangle = \text{среднее значение проекции скорости на } x = \int_{-\infty}^{\infty} v_x \varphi(v_x)\,dv_x = 0$$

② Распределение по величинам скоростей (по модулю значения скорости)

$$dP(v) \sim dP(v_x; v_y; v_z) = dP(v_x)\,dP(v_y)\,dP(v_z) = \varphi(v_x)\varphi(v_y)\varphi(v_z)\,dv_x dv_y dv_z =$$

= Сделаем замену переменных в пр-ве скоростей v_x, v_y, v_z, перейдём к сферическим

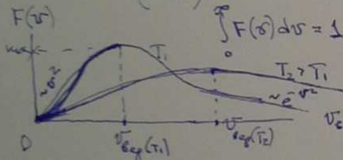
$= \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} v^2 \sin\theta\, dv\, d\theta\, d\varphi$; т.к. нас интересует только величина скорости, а не её направление, то мы должны для каждого значения скорости брать или такое, или другое, или третье... т.е. просуммировать вероятности разных направлений, т.е. проинтегрировать по углам $\varphi \in [0; 2\pi]$; $\theta \in [0; \pi]$ $\iint \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 4\pi$

Получим

$$dP(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot 4\pi v^2\,dv, \text{ где } F(v) = 4\pi v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

плотность вер-ти

$\int_0^{\infty} F(v)\,dv = 1$ – нормировка ф-ция распределения (дифференциальная))



С ростом т-ры кривая ниже, максимум правее, кривая шире. (Но площадь под кривой = 1.)

$$v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} < v_{ср} < v_{ср.кв.}$$

$v_{вер}$ – наиболее вер. значение скорости (при данной т-ре) $\Rightarrow F(v) \to \max \Rightarrow \frac{\partial F(v)}{\partial v} = 0 = (\;)e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}\left(2v - \frac{m_0}{2kT} 2v^3\right)$

$$v_{ср} = \langle v \rangle = \overline{v} = \int_0^{\infty} v \cdot F(v)\,dv = \ldots = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m_0}}$$

$$v_{ср.кв} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 \cdot F(v)\,dv} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

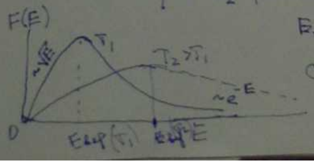
③ Распределение по энергиям (кинетическим).

$$\{\text{Вер. что энергия } E\} = dP(E) = F(E)\,dE = \left\{\text{Вер. что скорость } v = \sqrt{\frac{2E}{m_0}}\right\} = dP(v) = F(v)\,dv$$

$$\text{Доля молекул с } E = \frac{\Delta N(E)}{N_{общ}} \quad = \quad \frac{\Delta N(v)}{N_{общ}} = \text{Доля молекул с } v$$

$$dP(v) = F(v)\,dv = \left| \begin{matrix}\text{замена переменной}\\ E = \frac{mv^2}{2};\ dE = mv\,dv\end{matrix} \right| = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{E}}{(kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}}\,dE = F(E)\,dE$$

$$E_{вер} = \frac{kT}{2}; \quad E_{ср} = \langle E \rangle = \int_0^{\infty} E\,F(E)\,dE = \frac{3}{2}kT; \quad \int_0^{\infty} F(E)\,dE = 1 \text{ „нормировка"}$$



С ростом т-ры T: понижается, расширяется, max „вправо", но площадь = 1