27.05.2020 1

1. Значащие цифры в записи числа (З.Ц.)

З.Ц. называются все цифры, стоящие справа от первой не равной нулю цифры.

Пример: 0,013450 – 5 (З.Ц.); 1,35 – 3 (З.Ц.); 1000 – 4 (З.Ц.).

! Это не значит, что справа „разрешено" писать сколько хочется цифр или нулей! Точность (погрешность) числа ограничивается или погрешностями эксперимента, или погрешностями вычислений.

2. Правила записи чисел. (мы будем (или должны были) их придерживаться)

Запись каждого числа имеет: значение ± погрешность.

! Сначала находится погрешность числа, а потом в соответствии с ней приводится значение.

!! Погрешность (обычно) полагается записывать с:

2-мя значащими цифрами, если 1-я значащая цифра погрешности 1 или 2.

1-ой значащей цифрой, если 1-я значащая цифра ≥ 3. (3÷9)

Пример: 0,012456 ≃ 0,012; 1357 ≃ $14 \cdot 10^2$!! 1,346.. ≃ 1,3; 2,457 ≃ 2,5

0,321 ≃ 0,3; 0,0362 ≃ 0,04. 0,0942 → 0,09; 0,954 → 1,0 !!

Последняя цифра погрешности (она может быть и единственной) округляется! (по правилам округления в зависимости от следующ. цифры)

Примечание: Бывают случаи (сплошь и рядом), когда число записано без погрешности, тогда „сомнительной" считается последняя цифра. По умолчанию считается, что погрешность такого числа не превышает половины единицы самого младшего разряда.

Пример: 2530 → погр ±0,5; 1,34 → ±0,005

!! Значение числа записывается в соответствии с его погрешностью, т.е. в записи значения числа последняя цифра остается (или округляется) в том десятичном разряде, в котором находится последняя цифра погрешности.

Пример: 0,12 ⇒ 1,348.. → 1,35 ± 0,12; 0,3 ⇒ 1,348 → 1,3 ± 0,3

~~4593~~ 10 ⇒ 4593,4.. → 4593 ± 10; $14 \cdot 10^2$ ⇒ 4593,4.. → $(46 \pm 14) \cdot 10^2$

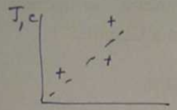
27.05.2020 $\nabla 2$

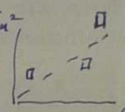
3. Построение графиков. (например, для проверки теоретич. зависимости.)

Главная идея: Для проверки соответствия экспериментальных значений заданной теоретической зависимости по осям откладывают такие величины, в которых теоретическая зависимость представляется прямой линией.

Пример: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ l – длина мат. маятника, T – период

Возможные варианты выбора осей

1) 

2) 

и т.д.

! При этом: – единицы измерений по осям получаются „сложные".
– погрешности должны рассчитываться, например, по формулам погрешностей косвенных измерений (ф-ул)

Например: 1) $\sigma_{\sqrt{l}} = \sqrt{\left(\frac{\partial\sqrt{l}}{\partial l}\cdot\sigma_l\right)^2} = \left|\frac{1}{2\sqrt{l}}\sigma_l\right| = \frac{\sigma_l}{2\sqrt{l}}$ $\left[\frac{м}{\sqrt{м}} = \sqrt{м} \text{ – как у } \sqrt{l}\right]$

2) $\sigma_{T^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial(T^2)}{\partial T}\sigma_T\right)^2} = \left|2T\sigma_T\right| = 2T\sigma_T$ $\left[с\cdot с = с^2 \text{ – как } T^2\right]$

~~Если~~ Для построения самой теоретической зависимости (т.е. прямой в „нужных" осях) используются различные способы.

а) „На глаз" – строим прямую, так чтобы примерно половина точек была выше (не очень точный) прямой, а половина ниже.

б) по методу наименьших квадратов (МНК):
Пусть у нас есть значения ординат y_i, i-номер измерения, всего N штук
(ордината – это может быть T_i, или T_i^2 на рис. 2)
И есть значения абсцисс x_i (абсциссы – ~~это~~ $\sqrt{l_i}$ или l_i).
И ищем наилучшую прямую вида $Y = kX + b$, тогда коэффициенты k и b находятся по формулам:

$$k = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{N}\cdot\sum x_i\cdot\sum y_i}{\sum_i x_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum x_i\right)^2}$$ – угловой коэф. прямой

$$b = \frac{1}{N}\sum_i y_i - \frac{k}{N}\sum_i x_i$$ – ордината пересечения с осью ординат

27.05.2010 ③

Вывод уравнения метода наименьших квадратов

Задача: минимизировать $\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-(kx_i+b)\right)^2$ сумму квадратов отклонений экспериментальных y_i от предполагаемых значений некоторой прямой для этих же значений x_i, т.е. kx_i+b

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial k}\Sigma(\ )^2=0 = \sum_i 2(y_i-kx_i-b)\cdot(-x_i) = 2\left\{\sum_i y_i(-x_i)+k\sum_i x_i^2+b\sum_i x_i\right\} \\ \frac{\partial}{\partial b}\Sigma(\ )^2=0 = \sum_i 2(y_i-kx_i-b)(-1) = 2\left\{-\sum_i y_i+k\sum_i x_i+b\cdot N\right\} \end{cases}$$

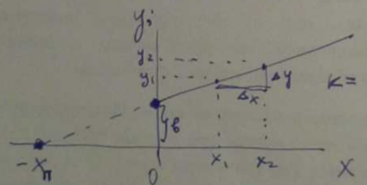
$$\begin{cases} 0=-\sum x_iy_i+k\sum x_i^2+b\sum x_i \\ 0=-\sum y_i+k\sum x_i+bN \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\frac{1}{N}\sum y_i-\frac{k}{N}\sum x_i \\ 0=-\sum x_iy_i+k\sum x_i^2+\left(\frac{1}{N}\sum y_i-\frac{k}{N}\sum x_i\right)\cdot\sum x_i \end{cases}$$

Итого: $0=-\sum x_iy_i+k\sum x_i^2+\frac{1}{N}\sum x_i\sum y_i-\frac{k}{N}\left(\sum x_i\right)^2$

$$\sum x_iy_i-\frac{1}{N}\sum x_i\sum y_i=k\left(\sum x_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum x_i\right)^2\right)$$

$$\begin{cases} k=\dfrac{\sum x_iy_i-\frac{1}{N}\sum x_i\sum y_i}{\sum x_i^2-\frac{1}{N}\left(\sum x_i\right)^2}=\dfrac{x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_Ny_N-\frac{1}{N}(x_1+x_2+\ldots+x_N)(y_1+y_2+\ldots+y_N)}{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_N^2-\frac{1}{N}(x_1+x_2+\ldots+x_N)^2} \\ b=\frac{1}{N}\sum y_i-\frac{k}{N}\sum x_i=\frac{1}{N}(y_1+y_2+\ldots+y_N)-\frac{k}{N}(x_1+x_2+\ldots+x_N) \end{cases}$$

Примечание. Напомним, что физический смысл k и b зависит от конкретных величин, откладываемых по осям, в которых мы ищем уравнение прямой линии. Но геометрический их смысл очевиден.



$$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{b-0}{0-(-x_п)}=\frac{b}{x_п}$$

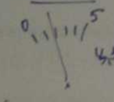
Если вы построили прямую „на глаз", то для вычисления углового коэффициента „надо" (можно) брать любые две точки лежащие на построенной вами прямой. Пересечения тоже ищутся на глаз.

27.05.2020

4. О погрешностях

а) Погрешность ~~[illegible]~~ измерения на измерительном приборе даётся в паспорте прибора. Мы **условимся** брать в качестве погрешности **цену деления**.
(если иной в описании задания к лабе не сказано иное)

Пример



ЦД = 1 $\qquad$ 0,048 $\quad$ ЦД = 0,001

Примечание: шкала может быть неравномерной => надо брать ЦД „в месте" измеряемого значения;

показания могут „немного" плавать => в качестве оценки ошибки можно взять половину размаха;

б) Погрешности различных констант обычно приводятся в „исходных данных" к лаб. работе.

в) Погрешность многократных прямых измерений **одного и того же**

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \text{ — среднее}$$

$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot t(\alpha, N) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}{N-1}} \text{ — погрешность среднего}$$

$t(\alpha, N)$ — коэф. Стьюдента для доверительной вероятности α и числа измерений N. $\quad t(0{,}95; 3) = 4.3 \quad t(0{,}95; 5) = 2{,}8$

г) Погрешность косвенных измерений (погрешность функции через погрешности аргументов)

$f = f(x_1; x_2; \ldots; x_N)$ Известны $\overline{x}_1 \pm \sigma_{\overline{x}_1}$; $\overline{x}_2 \pm \sigma_{\overline{x}_2}$; $\ldots$; $\overline{x}_N \pm \sigma_{\overline{x}_N}$

$$\sigma_{\overline{f}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \sigma_{x_i}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_{x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\sigma_{x_N}\right)^2}$$

в выражения для значений производных надо подставлять средние значения аргументов, т.е. $\overline{x}_1; \overline{x}_2; \ldots; \overline{x}_N$
При расчете среднего значения функции также использовать средние значения аргументов.

д) Бывает так, что итоговая погрешность зависит от нескольких <u>независимых</u> факторов, функциональная зависимость между которыми не может быть установлена, ~~[illegible]~~ но погрешность каждого фактора известна, тогда общая погрешность может быть оценена по следующей формуле

$$\sigma_{\text{общая}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_N^2},$$ где σ_i – погрешность i-го фактора.

<u>Пример</u>: При измерении промежутка времени погрешность секундомера $\sigma_c = 0{,}01\,с$, однако время реагирования человека $\sigma_ч = 0{,}2\,с$.

Тогда общая погрешность измерения промежутка

$$\sigma_{\text{общ}} = \sqrt{\sigma_c^2 + \sigma_ч^2}.$$

<u>Примечание</u>: Погрешность всегда должна быть <u>обоснована</u>, и „здравый" смысл здесь играет важную роль, но и <u>правил</u> никто не отменял.

В лаб. работах, как правило, всё, что надо для нахождения погрешности, дано либо в исходных данных либо/и в таблице приборов.

! <u>Примечание</u>. В вычислениях я буду использовать компьютер и конечные формулы, т.е. считаться будут числа, содержащие „по 16 (или даже по 32) цифр".

Чтобы ваши результаты (при условии, что вы действуете правильно) совпали с моими вам желательно при расчетах (если вы их делаете по-отдельности) сохранять не менее 5÷6 <u>значащих цифр</u>. (не путать с десятичными разрядами).

! Я буду делать не „на глаз", а по М.Н.К. всякие угловые коэф, пересечения с осями и дальнейшие....