Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Я. С. ГРИНБЕРГ, Э. А. КОШЕЛЕВ

МЕХАНИКА

Учебно- методическое пособие

для студентов 1 курса РЭФ, ФЭН, ФТФ

дневного отделения.

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2013

Рецензенты: д. ф. м. н., проф. Пейсахович Ю. Г.,

к. ф.. м. н., доцент Харламов Г. В.

Работа подготовлена на кафедре прикладной и теоретической физики

Я. С. Гринберг, Э. А. Кошелев

Механика. Учеб. метод. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2013. – с.

Пособие представляет собой сборник заданий по разделу «Механика» курса общей физики. Изложение каждой темы начинается с краткого теоретического введения и сопровождается подробно разобранными примерами решения типовых задач. В пособии представлено 40 вариантов заданий (по 10 задач в каждом), предназначенных в качестве расчетно-графических заданий для самостоятельной работы студентов. Материал пособия отражает требования, предъявляемые к курсу физики ФГОС 3-го поколения. Пособие предназначено для студентов технических направлений 1-го курса дневного отделения НГТУ факультетов РЭФ, ФЭН, ФТФ, где читается 3-х или 4-х семестровый курс физики.

Предисловие

Механика является самой старой из физической наук. Этот раздел физики изучает движение тел. К задачам, которые решает механика, относятся такие разные задачи как, например, полет теннисного шарика или полет космического аппарата, движение автомобиля или анализ траекторий элементарных частиц в электрических и магнитных полях.

Настоящее пособие представляет собой сборник задач, соответствующих следующим темам раздела «Механика» курса общей физики:

1. Кинематика поступательного и криволинейного движения материальной точки.
2. Динамика материальной точки. Законы Ньютона.
3. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея.
4. Динамика твердого тела
5. Законы сохранения
6. Специальная теория относительности
7. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

Самостоятельное решение физических задач студентами является необходимым средством для усвоения курса физики, методом контроля за степенью усвоения учебного материала и понимания физических законов. Как показывает практика проведения практических занятий студенты первого года обучения (особенно первого семестра), как правило, сталкиваются с трудностями квалифицированного применения аппарата математического анализа при решении физических задач. Поэтому материал сборника подобран так, что в большинстве случаев при решении конкретной задачи можно обойтись простыми способами, но там, где это необходимо нужно использовать методы математического анализа. В сборнике не приводятся ответы, так как материал сборника предполагается использовать на контрольных мероприятиях и экзаменах.

При оформлении решений индивидуального задания студент должен обоснованно приводить необходимые пояснения применения конкретных физических законов и процесса выполнения необходимых математических выкладок и преобразований. При необходимости решение нужно доводить до числового результата и проводить анализ размерностей.

Все задачи по степени трудности соответствуют традиционному курсу общей физики И. В. Савельева: (И. В. Савельев. Курс общей физики в 5-ти книгах. М., Астрель, 2003.).

Особенностью пособия является то, что многие из добавленных в новое издание задач, взяты из разделов, темы которых обычно изучаются во втором и последующих семестрах. Сюда относятся, например, задачи в которых рассматривается движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях, рассеяние фотонов на свободных электронах (эффект Комптона) и ряд других. Правда, для решения этих задач не требуется никаких специальных знаний, кроме грамотного применения законов сохранения и законов Ньютона, то есть, тех разделов курса общей физики, которые должны быть освоены студентами в первом семестре. Включение этих задач имеет целью продемонстрировать студентам, что законы механики и законы сохранения применяются во многих областях физики, часто очень далеких друг от друга.

Все формулы и, как правило, все исходные данные в задачах и примерах приведены в системе СИ. Исключение составляют некоторые задачи на применение законов сохранения при столкновении релятивистских частиц, где энергии даются не в джоулях (Дж), а в электрон-вольтах (эв).

Некоторые задачи снабжены указанием на источник. Здесь приняты следующие сокращения: **ОФ 1.228-** задача № 1.228 из 1 (см. список литературы); **КВФ 1.82-** задача 1.82 из 4; **МФТИ 8.45-** задача 8.45 из 5.

При составлении сборника была использована следующая литература:

1. И. Е. Иродов. Задачи по общей физике. 5 изд., М., Лаборатория базовых знаний, 2002.

2. И. В. Савельев. Сборник вопросов и задач по общей физике. М., Наука, 1982.
3. В .Л. Гинзбург, Л. М. Левин, Д. В. Сивухин, И. А. Яковлев. Сборник задач по общему курсу физики. М., Наука, 1976.
4. И. Е. Иродов. Задачи по квантовой физике. Физматлит, 2001.
5. Д. А. Заикин, В. А. Овчинкин, Э. В. Брут. Сборник задач по общему курсу физики. М., Изд-во МФТИ, 1998.
6. А. Г. Чертов, А. А. Воробьев Задачник по физике. Изд-е 5-е: М: Высшая школа, 1988. Изд-е 7-е: Физматлит, 2002.
7. D. Halliday, R. Resnick, K. S. Krane, Physics, vol. 1, 2, John Wiley & Sons, 2002.

Авторы выражают благодарность Г. В. Харламову, внимательно прочитавшему рукопись и указавшему на ряд ошибок, неточностей и нечетких формулировок условий некоторых задач.

Методические указания.

Решение большинства физических задач можно условно разделить на четыре этапа:

1. Анализ условия задачи и его наглядная интерпретация схемой или чертежом. На чертеже должны быть указаны все данные, приведенные в условии задачи.
2. Составление уравнений, которые описывают данное явление, то есть применение физических законов, относящихся к данной задаче. Установление кинематических связей между искомыми величинами.
3. Совместное решение полученных уравнений относительно определяемых величин и получение расчетной формулы в аналитическом виде. Подстановка в расчетную формулу численных значений условий задачи. При этом численные значения должны быть переведены в систему СИ, во избежания численных ошибок.
4. Анализ полученного результата на проверку размерности искомой величины по расчетной формуле. Полученное решение целесообразно проверить также на «здравый смысл», рассмотрев асимптотику решения – устремить какой- либо параметр, определяющий результат, к нулю или к бесконечности и проверить к чему стремится в этом асимптотическом случае решение.

I. Элементы векторного анализа

1. Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов **A** и **B,** угол между которыми α, представляет собой скаляр (число) и вычисляется по одной из следующих формул:

$$\mathbf{AB}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha\equiv AB\cos\alpha \qquad (I.1а)$$

$$\mathbf{AB}=A_X B_X+A_Y B_Y+A_Z B_Z \qquad (I.1б)$$

где

$$|\mathbf{A}|=A=\sqrt{A_X^2+A_Y^2+A_Z^2} \qquad (I.2а)$$

$$|\mathbf{B}|=B=\sqrt{B_X^2+B_Y^2+B_Z^2} \qquad (I.2б)$$

1.1. Свойства скалярного произведения

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA} \qquad (I.3а)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC} \qquad (I.3б)$$

$$\mathbf{AA}=|\mathbf{A}|^2 \qquad (I.3в)$$

Если **AB=0**, то либо **A=0**, либо **B=0**, либо векторы **A** и **B** взаимно перпендикулярны.

$$\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\right)^2=A^2+B^2+2\boldsymbol{AB}=A^2+B^2+2AB\cos\alpha \qquad (I.4)$$

2. Векторное произведение

Векторное произведение двух векторов **A** и **B,** угол между которыми α, представляет собой вектор **C**, который перпендикулярен как вектору **A**, так и вектору **B**.

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\equiv(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \qquad (I.5)$$

Модуль вектора C вычисляется по одной из следующих формул:

$$|\mathbf{C}|=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin a\equiv AB\sin a \qquad (I.6а)$$

$$|\mathbf{C}|\equiv C=\sqrt{C_X^2+C_Y^2+C_Z^2} \qquad (I.6б)$$

где C_X, C_Y, C_Z- есть компоненты вектора **C**:

$$C_x=A_Y B_Z-A_Z B_Y \qquad (I.7а)$$

$$C_y=A_Z B_X-A_X B_Z \qquad (I.7б)$$

$$C_z = A_X B_Y - A_Y B_X \qquad \text{(I.7в)}$$

2.1. Свойства векторного произведения

Если $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=0$, то либо $\mathbf{A}=0$, либо $\mathbf{B}=0$, либо вектора **A** и **B** параллельны.

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=-\mathbf{B}\times\mathbf{A} \qquad \text{(I.8а)}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) \qquad \text{(I.8б)}$$

$$(\mathbf{B}+\mathbf{C})\times\mathbf{A}=(\mathbf{B}\times\mathbf{A})+(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) \qquad \text{(I.8в)}$$

Двойное векторное произведение

$$(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))=\mathbf{B}(\mathbf{AC})-\mathbf{C}(\mathbf{AB}) \qquad \text{(I.9)}$$

3. Свойства единичных ортов прямоугольной декартовой системы координат i, j, k.

$$\mathbf{i}^2=\mathbf{j}^2=\mathbf{k}^2=1 \qquad \text{(I.10а)}$$

$$\mathbf{ij}=\mathbf{ik}=\mathbf{jk}=0 \qquad \text{(I.10б)}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0} \qquad \text{(I.10в)}$$

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k};\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i};\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j} \qquad \text{(I.10г)}$$

4. Разложение вектора по ортонормированному базису в декартовой системе координат

$$\mathbf{A} = A_X\mathbf{i} + A_Y\mathbf{j} + A_Z\mathbf{k} \qquad \text{(I.11)}$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \left(A_Y B_Z - A_Z B_Y\right)\mathbf{i} + \left(A_Z B_X - A_X B_Z\right)\mathbf{j} + \left(A_X B_Y - A_Y B_X\right)\mathbf{k} \qquad \text{(I.12)}$$

5. Компоненты вектора в криволинейных системах координат

Полярные координаты

$$\begin{aligned} A_r &= A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi \\ A_\varphi &= -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(I.13а)}$$

$$\begin{aligned} A_x &= A_r\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi \\ A_y &= A_r\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi \end{aligned} \qquad \text{(I.13б)}$$

Сферические координаты

$$\begin{aligned} A_r &= A_z \cos q + A_x \sin q \cos j + A_y \sin q \sin j \\ A_q &= -A_z \sin q + A_x \cos q \cos j + A_y \cos q \sin j \\ A_j &= -A_x \sin j + A_y \cos j \end{aligned} \qquad \text{(I.14а)}$$

$$\begin{aligned} A_x &= A_r \sin q \cos j + A_q \cos q \cos j - A_j \sin j \\ A_y &= A_r \sin q \sin j + A_q \cos q \sin j + A_j \cos j \\ A_z &= A_r \cos q - A_q \sin q \end{aligned} \qquad \text{(I.14б)}$$

Пример I.1. Два вектора ***a*** и ***b*** имеют компоненты, в произвольных единицах, a_x=3.2, a_y=3.6; b_x=0.50, b_y=4.5. Найти: а) угол между векторами ***a*** и ***b***; б) компоненты вектора **c,** который лежит в плоскости xy, перпендикулярен вектору ***a*** и имеет абсолютное значение равное 5.0 единиц.

Решение а) зная компоненты векторов ***a*** и ***b*** можно вычислить их скалярное произведение

$$\boldsymbol{ab} = a_x b_x + a_y b_y = 3.2\times 0.50 + 3.6\times 4.5 = 17.6$$

С другой стороны

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos\alpha = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}\cos\alpha$$

Сравнив эти два выражения, получим

$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

Подставив в эту формулу исходные данные, получим

$$\cos\alpha = \frac{3.2\times 0.50 + 3.6\times 4.5}{\sqrt{3.2^2 + 3.6^2}\sqrt{0,5^2 + 4.5^2}} = \frac{17.6}{21.8} = 0.81$$

откуда $\alpha \approx 36°$

б) по условию

$$\sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 5.0\,.$$

С другой стороны, поскольку вектора ***a*** и ***c*** перпендикулярны, то

$$\boldsymbol{ac} = a_x c_x + a_y c_y = 0$$

Выразим из этого уравнения c_y

$$c_y = -\frac{a_x c_x}{a_y}$$

Тогда из первого условия получим

$$c_x = \frac{5.0 a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{5.0 \times 3.6}{\sqrt{3.2^2 + 3.6^2}} = \frac{18}{4.82} = 3.73$$

$$c_y = -\frac{5.0 a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = -\frac{5.0 \times 3.2}{\sqrt{3.2^2 + 3.6^2}} = -\frac{18}{4.82} = -3.31$$

II. Кинематика поступательного и криволинейного движения материальной точки

Кинематика- это раздел механики, в котором описывается движение частиц, безотносительно к причинам, которые это движение вызвали. Основными параметрами, характеризующими движение частицы в кинематике, являются зависящие от времени: координаты частицы x(t), y(t), z(t), ее вектор скорости **v**(t) и ускорения ***a***(t).

1. Одномерное движение

Основная задача кинематики одномерного движения формулируется следующим образом: по заданной зависимости от времени одной из величин: координаты x(t), скорости v(t), или ускорения *a*(t) найти зависимость от времени двух других. Связь скорости и ускорения с x(t) определяется следующим образом:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \text{(II.1a)}$$

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad \text{(II.1б)}$$

Если ускорение постоянно, то

$$x(t) = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad \text{(II.2a)}$$

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 + at \qquad \text{(II.2б)}$$

где x_0 и v_0 значения координаты и скорости в начальный момент времени. Знак v_0 и a может быть как положительный, так и отрицательный в зависимости от направления этих величин по отношению к положительному направлению оси x.

Пример II.1. Камень бросили вертикально вверх. Известно, что на высоте h камень побывал дважды с интервалом времени Δt. С какой начальной скоростью v_0 бросили камень?

Решение. Направим ось y вертикально, причем положительным выберем направление вверх. Тогда зависимости координаты y и скорости от времени будут следующими

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \tag{II.3а}$$

$$v(t) = v_0 - gt \tag{II.3б}$$

где v_0 начальная скорость камня, g ускорение свободного падения.

Очевидно, что любое значение координаты y, за исключением верхней точки траектории будет пройдено камнем дважды. Таким образом, координата y(t)=h удовлетворяет уравнению (3а)

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} \tag{II.3в}$$

где t момент времени прохождения координаты y(t)=h. Это уравнение является квадратным и имеет два решения

$$t_{1.2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}} \tag{II.4}$$

Откуда

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2\sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{2h}{g}} \tag{II.5}$$

Из последнего уравнения получим

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{g^2(\Delta t)^2}{4}} \tag{II.6}$$

Пример II.2. В момент времени t=0 тело вышло из начала координат в положительном направлении оси x с начальной скоростью v_0 Зависимость скорости тела от координаты дается следующим выражением

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 - kx \qquad \text{(II.7a)}$$

где k- положительная константа.

Найти зависимость от времени координаты тела, его скорости и ускорения.

Решение. Перепишем уравнение (7а) следующим образом

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_0 - kx \qquad \text{(II.7б)}$$

Это уравнение преобразуем к следующему виду

$$\frac{dx}{\mathrm{v}_0 - kx} = dt$$

И возьмем интеграл от обеих частей

$$\int_0^x \frac{dx'}{\mathrm{v}_0 - kx'} = \int_0^t dt' \qquad \text{(II.8)}$$

Вычисляя интегралы, получим

$$\ln\frac{\mathrm{v}_0 - kx}{\mathrm{v}_0} = -kt \qquad \text{(II.9)}$$

Откуда

$$x(t) = \frac{\mathrm{v}_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right) \qquad \text{(II.10)}$$

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = \mathrm{v}_0 e^{-kt} \qquad \text{(II.11)}$$

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -k\mathrm{v}_0 e^{-kt} \qquad \text{(II.12)}$$

2. Криволинейное движение.

Траектория s(t)- это линия в пространстве, вдоль которой движется тело. В случае одномерного движения траекторией является прямая линия.

В *декартовой* системе координат положение точки на траектории в момент времени t задается декартовыми координатами ***x(t), y(t), z(t).*** При этом, радиус- вектор точки $\vec{r}(t) = \vec{i}\,x(t) + \vec{j}\,y(t) + \vec{k}\,z(t)$ и его модуль $r = \sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2 + [z(t)]^2}$.

В *сферической* системе координат положение точки на траектории в момент времени t задается расстоянием до центра координат *r*, (0<r<∞) полярным углом θ (0<θ<π) и азимутальным углом φ (0<φ<2π). Связь между декартовыми и сферическими координатами: $x = r\sin q\ \cos j$, $y = r\sin q\ \sin j$, $z = r\cos q$.

В *цилиндрической* системе координат положение точки на траектории в момент времени t задается координатой $z(t)$, расстоянием r (0<r<∞) до оси z координат и азимутальным углом φ (0<φ<2π). Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами: $x = r\cos j$, $y = r\sin j$, $z = z(t)$.

В том случае, если траектория движения лежит в одной плоскости, то положение точки на траектории можно задать как ее декартовыми координатами x(t), y(t), так и ее *полярными* координатами: расстоянием до центра системы координат r, (0<ρ<∞) и полярным углом φ (0<φ<2π), между положительной осью x и радиусом- вектором r. Связь между декартовыми и полярными координатами: $x = r\ \cos j$, $y = r\ \sin j$.

Скорость и ускорение

1. В каждой точке траектории вектор скорости направлен по касательной к траектории в данной точке:

$$\vec{V} = \frac{ds(t)}{dt}\vec{t} = \left|V\right|\vec{t} \tag{II.13}$$

где s(t)- траектория, по которой движется тело, $\vec{t}$ -единичный вектор, направленный по касательной в данной точке траектории.

2. *Мгновенная скорость* точки в декартовых координатах есть

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt} = \vec{i}V_x + \vec{j}V_y + \vec{k}V_z \tag{II.14}$$

и ее величина (модуль)

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \tag{II.15}$$

3. Связь между декартовыми и полярными компонентами вектора скорости (см. Рис. 1).

$$V_r = \frac{dr}{dt} = \frac{\left(\vec{r}\vec{V}\right)}{r} = V_x \cos j + V_y \sin j \tag{II.16a}$$

$$V_\varphi = \rho \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\left(\vec r \times \vec V\right)_z}{r} = -V_x \sin\varphi + V_y \cos\varphi \qquad \text{(II.16б)}$$

$$V_x = V_r \cos\varphi - V_\varphi \sin\varphi \qquad \text{(II.16в)}$$

$$V_y = V_r \sin\varphi + V_\varphi \cos\varphi \qquad \text{(II.16г)}$$

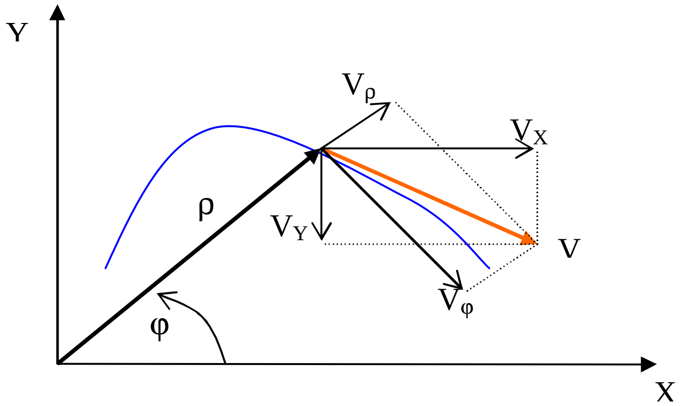


Рис. I.1. Связь между декартовыми и полярными компонентами вектора скорости

4. Перемещение точки за время t_0 равно

$$\Delta\vec r = \vec r(t_0) - \vec r(0) = \int_0^{t_0} \vec V(t)dt \qquad \text{(II.17)}$$

5. Путь, пройденный точкой за время t_0 равен

$$S = \int_0^{t_0} \left|\vec V(t)\right| dt\,. \qquad \text{(II.18)}$$

В общем случае пройденный путь не равен модулю перемещения: $S \neq \left|\Delta\vec r\right|$.

6. Ускорение точки в декартовой системе координат

$$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = \frac{d^2\vec r}{dt^2}; \qquad \text{(II.19а)}$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}; \qquad \text{(II.19б)}$$

$$\vec a = \vec i\frac{dV_x}{dt} + \vec j\frac{dV_y}{dt} + \vec k\frac{dV_z}{dt} = \vec i a_x + \vec j a_y + \vec k a_z; \qquad \text{(II.19в)}$$

$$a = \left|\vec a\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad \text{(II.19г)}$$

7. Изменение вектора скорости за время t_0 равно:

$$\Delta\vec V = \vec V(t_0) - \vec V(0) = \int_0^{t_0} \vec a(t)dt \qquad \text{(II.20)}$$

8 Средние за интервал времени Δt значения векторов скорости и ускорения: средний вектор скорости $\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$; средняя путевая скорость $\langle |\vec{V}| \rangle = \frac{S}{\Delta t}$; среднее ускорение $\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$.

8. Нормальное и тангенциальное ускорения (см. Рис. 2)

$$\vec{a} = \frac{d|V|}{dt}\vec{t} + |V|\frac{d\vec{t}}{dt} = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \tag{II.21}$$

где тангенциальное ускорение a_τ направлено по касательной к траектории, а нормальное ускорение a_n направлено перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории.

$$|a_t| = \frac{d|V|}{dt}; \quad |a_n| = \frac{V^2}{R} \tag{II.22}$$

где R- радиус кривизны траектории в данной точке.

В общем случае при криволинейном движении вектор ускорения не совпадает с вектором скорости.

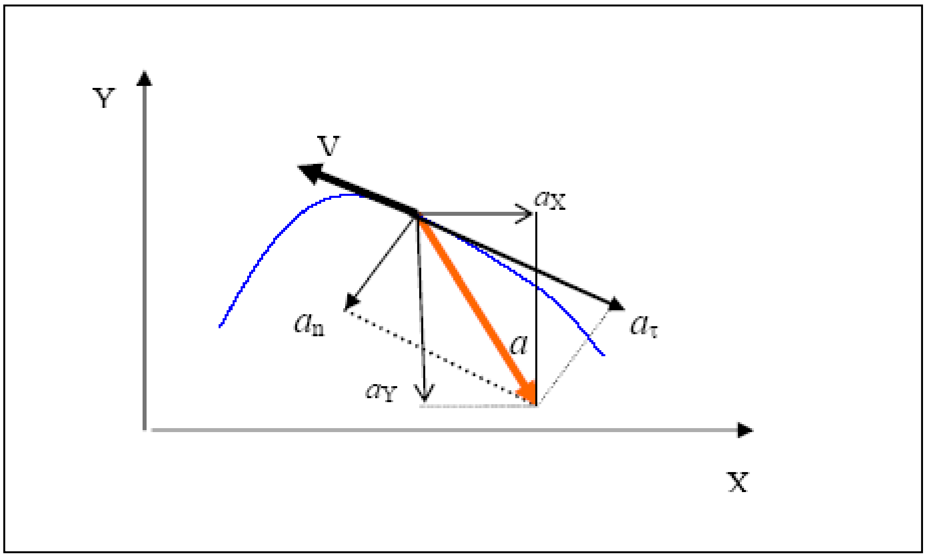


Рис. I.2. разложение ускорения по компонентам

9. Полезные соотношения

$$\text{(а)}\ \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}; \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}; \frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}. \tag{II.23}$$

(б) Эти три равенства можно в векторной форме записать как $\frac{dr}{d\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r}$.

$$\text{(в)}\ \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{(\vec{r}\vec{V})}{r} \tag{II.24}$$

где $r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$ -расстояние точки от начала координат, $\vec{V}$ - скорость точки.

3. Движение в двух измерениях с постоянным ускорением

Частным случаем криволинейного движения является двумерное движение с постоянным ускорением. В этом случае зависимость от времени радиус- вектора точки и вектора скорости имеют вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t + \frac{\boldsymbol{a} t^2}{2} \tag{II.25}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{a} t \tag{II.26}$$

где $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$- значения радиус- вектора и скорости в начальный момент времени. Эти соотношения можно расписать по компонентам следующим образом

$$x = x_0 + \mathrm{v}_{0,x} t + \frac{a_x t^2}{2} \tag{II.25а}$$

$$y = y_0 + \mathrm{v}_{0,y} t + \frac{a_y t^2}{2} \tag{II.25б}$$

$$\mathrm{v_x} = \mathrm{v_{0,x}} + a_x t \tag{II.26а}$$

$$\mathrm{v_y} = \mathrm{v_{0,y}} + a_y t \tag{II.26б}$$

Пример II.4. Камень, брошенный с высоты h=2 м под углом α=45° к горизонту, падает на землю на расстоянии L = 47 м (по горизонтали от места бросания). Вычислить время полета t_0 и радиус кривизны R в точке падения камня на землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

1 Вычисление времени полета

Уравнения для координат точки падения (x_0=L, y_0=0) имеют следующий вид:

$$L = \mathrm{v}_{0,x} t_0 = \mathrm{v}_0 cos\alpha\, t_0 \tag{II.27а}$$

$$0 = h + \mathrm{v}_{0,y} t_0 - \frac{g t_0^2}{2} \tag{II.27б}$$

Из уравнения (27а) выражаем t_0 и подставляем в уравнение (27б)

$$h + Ltg\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2 cos^2\alpha} = 0$$

Из этого уравнения определяем начальную скорость v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gL^2}{2cos^2\alpha(h + Ltg\alpha)}}$$

Время в пути определяем из уравнения (II.27a)

$$t_0 = \sqrt{\frac{2(h + Ltg\alpha)}{g}}$$

Подставив исходные данные, получим

$$t_0 = \sqrt{\frac{2(2м + 47м)}{9.8м/с^2}}\backslash = 3.16с$$

2 Вычисление радиуса кривизны в конечной точке

Уравнения для скоростей в этом примере

$$v_x = v_{0,x} = v_0 cos\alpha$$

$$v_y = v_{0,y} - gt = v_0 sin\alpha - gt$$

Радиус кривизны находится из уравнения

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Поскольку для движения в поле тяжести

$$\frac{a_n}{g} = \frac{v_x}{v},$$

то получим

$$R = \frac{v^3}{gv_x} = \frac{v^2}{g\,cos\alpha}$$

где

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0 t\,sin\alpha}$$

Таким образом, в конечной точке

$$R = \frac{v_0^2 + g^2t_0^2 - 2gv_0t_0\,sin\alpha}{g\,cos\alpha}$$

Подставив в эту формулу выражения для v_0 и t_0, найденные в п. 1, получим

$$R=\frac{1}{\cos\alpha}\left(2h+\frac{L^2}{2\cos^2\alpha\left(h+Ltg\alpha\right)}\right)$$

Для угла α=45°

$$R=\sqrt{2}\left(2h+\frac{L^2}{\left(h+L\right)}\right)=\sqrt{2}\left(2\times2\text{м}+\frac{47^2\text{м}^2}{2\text{м}+47\text{м}}\right)=69.4\text{м}$$

Движение по окружности.

Частным случаем криволинейного движения является вращение материальной точки по окружности радиуса R. Основными параметрами, описывающими это движение, являются зависимости от времени угла $\varphi(t)$, частоты $\omega(t)$ и углового ускорения $\varepsilon(t)$. Основные уравнения этого движения выглядят следующим образом:

$$\omega(t)=\frac{d\varphi}{dt};\qquad \varepsilon(t)=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{II.28}$$

Скорость тела и его тангенциальное и нормальное ускорение связаны с этими величинами следующим образом:

$$v(t)=\omega(t)R;\quad a_\tau(t)=\varepsilon(t)R;\quad a_n(t)=\frac{v^2}{R}=\omega^2(t)R \tag{II.29}$$

При движении с постоянным угловым ускорением

$$\varphi(t)=\varphi_0+\omega_0 t+\frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{II.30}$$

$$\omega(t)=\omega_0+\varepsilon t \tag{II.31}$$

где φ_0 и ω_0- значения этих величин в начальный момент времени. При равноускоренном вращении $\varepsilon>0$, при равнозамедленном вращении $\varepsilon<0$.

III. Динамика материальной точки и твердого тела. Законы Ньютона.

Динамика это раздел механики, в котором, в отличие от кинематики, движение частиц рассматривается как следствие причин, которые это движение вызвали.

Основными динамическими переменными частицы массы m, движущейся со скоростью v, являются импульс, кинетическая энергия и момент импульса:

$$\vec{P} = m\vec{v} \tag{III.1а}$$

$$E = \frac{m v^2}{2} \tag{III.1б}$$

$$\vec{L} = m[\vec{r} \times \vec{v}\,] = [\vec{r} \times \vec{p}\,] \tag{III.1в}$$

где $\vec{r}$ - радиус-вектор частицы относительно неподвижной, фиксированной точки. Как следует из (1в), момент импульса, в отличие от импульса и кинетической энергии, значения которых не изменяются при изменении начала отсчета, определяется относительно фиксированной точки, и, следовательно, изменяется при изменении начала отсчета.

Первый закон Ньютона. Если на тело не действуют внешние силы, то тело находится в покое или в состоянии равномерного прямолинейного движения. Фактически этот закон утверждает, что существует множество инерциальных систем отсчета, в каждой из которых ускорение тела равно нулю, если на него не действуют внешние силы

Второй закон Ньютона. Скорость изменения импульса тела равна

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{III.2}$$

где $\vec{F} = \sum_i F_i$ - сумма внешних сил, действующих на тело.

Уравнение (2) справедливо всегда: и в том случае, когда масса тела является переменной величиной (при выгорании топлива в ракете), и в том случае, когда скорость тела близка к скорости света.

Если масса тела постоянна, то второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: произведение массы тела на его ускорение равно сумме внешних сил, действующих на тело.

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad \text{(III.2a)}$$

Это уравнение можно записать следующими эквивалентными способами

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = \vec{F}, \text{ или } m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \qquad \text{(III.2б)}$$

Уравнения (2а) и (2б) справедливы только в нерелятивистском случае, когда скорость тела много меньше скорости света.

При движении материальной точки по криволинейной траектории результирующая сила, действующая на точку, может быть представлена в виде векторной суммы тангенциальной (касательной) F_τ и нормальной F_n составляющих силы:

$$F_t = ma_t = m\frac{d\mathrm{v}}{dt}, \; F_n = ma_n = m\frac{\mathrm{v}^2}{R},$$

где R – радиус кривизны траектории.

Третий закон Ньютона. Если имеются два взаимодействующих тела А и В, то сила F_{AB}, с которой тело А действует на тело В, равно и противоположно по знаку силе F_{BA}, с которой тело В действует на тело А:

$$\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} = 0 \qquad \text{(III.3)}$$

Существенно, что эта пара сил приложена к *разным* телам: сила F_{AB} приложена к телу А, а сила F_{BA} к телу В. Например, сила гравитационного притяжения, приложенная к человеку со стороны Земли в точности равна и противоположна силе гравитационного притяжения, приложенной к центру Земли со стороны человека.

В правой части уравнений, выражающих второй закон Ньютона (1, 2) стоит внешняя сила, которая в общем случае может зависеть от всех динамических переменных: скорости, времени, координат **F**(**v**,**r**,t). Основная задача динамики заключается в том, чтобы по известной зависимости внешних сил от динамических переменных определить траекторию тела, его скорость и ускорение как функции времени.

Типы сил.

1. **Постоянная, не зависящая от времени сила.**

В этом случае согласно второму закону Ньютона, ускорение будет постоянно $\vec{a} = \vec{F}/m$ и скорость и радиус- вектор будут определяться выражениями (II.25, II.26). К такого рода силам относится сила, действующая на тело вблизи земной поверхности **F**=m**g**, откуда ***a***=**g**, и сила, действующая на заряженную частицу в постоянном электрическом поле **F**=q**E**, откуда ***a***=q**E**/m.

2. Сила, явно зависящая от времени

Пример III.1. Поезд, двигающийся со скоростью v_0, начинает тормозить, причем сила торможения зависит от времени следующим образом: $F=-kt^2$. Через какое время поезд остановится? Какой путь он пройдет до остановки?

Решение. Интегрируя уравнение $m\frac{d\mathrm{v}}{dt} = -kt^2$, получим последовательно:

$$d\mathrm{v} = -\frac{k}{m}t^2 dt;$$

$$\int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} d\mathrm{v}' = -\frac{k}{m}\int_0^t t'^2 dt';$$

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 - \frac{k}{3m}t^3 \qquad \text{(III.4)}$$

Поезд остановится в момент, когда его скорость обратится в нуль. Из (4) находим

$$t_0 = \left(\frac{3m\mathrm{v}_0}{k}\right)^{1/3} \qquad \text{(III.5)}$$

Вычисление пути

$$s=\int_0^{t_0} \mathrm{v}(t)dt=\int_0^{t_0}\left(\mathrm{v}_0-\frac{k}{3m}t^3\right)dt=\mathrm{v}_0 t_0-\frac{k}{12m}t_0^4 \qquad \text{(III.6)}$$

Подставив сюда t_0 из (5) получим

$$s=\frac{3}{4}\left(\frac{3m\mathrm{v}_0}{k}\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{v}_0$$

3. Силы, зависящие от скорости

К этому типу сил относятся силы вязкого трения, то есть, силы сопротивления движению тела в вязкой среде. Эта сила возникает при движении тела в газообразной или жидкой среде и при малых скоростях пропорциональна скорости тела:

$$\vec{F}=-b\,\vec{\mathrm{v}}, \qquad \text{(III.7)}$$

где коэффициент β зависит от свойств среды и параметров движущегося тела.

4. *Сила трения скольжения*

$$\vec{F}=-mN\frac{\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}}, \qquad \text{(III.8)}$$

где μ- коэффициент трения, N- сила нормального давления на поверхность скольжения. Эта сила направлена противоположно скорости v.

5. *Сила трения покоя*. Эта сила равна и противоположна по знаку сумме внешних сил, действующих на тело до тех пор, пока тело находится в покое. Тело начинает двигаться в момент, когда сила трения покоя становится равной силе трения скольжения.

Пример III.2. На тело массы *m*, движущееся в вязкой среде действует сила сопротивления $F=-k\mathrm{v}^2$ (v- скорость тела, *k* – положительная постоянная, коэффициент сопротивления). Начальная скорость тела v_0. Определить зависимость скорости и пути, пройденным телом, от времени.

Решение. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\frac{d\mathrm{v}}{dt}=-k\mathrm{v}^2.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{d\,\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2} = -\frac{k}{m}dt\ , \quad \int\limits_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} \frac{d\,\mathrm{v}}{\mathrm{v}^2} = -\int\limits_0^t \frac{k}{m}dt$$

откуда

$$\frac{1}{\mathrm{v}} - \frac{1}{\mathrm{v}_0} = \frac{k}{m}t\,. \qquad \text{(III.9)}$$

Из (9) получим зависимость скорости тела от времени

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0\left(1 + \frac{k}{m}\mathrm{v}_0 t\right)^{-1}.$$

Зная эту зависимость, вычисляем зависимость от времени пройденного пути:

$$s = \int\limits_0^t \mathrm{v}(t')dt' = \int\limits_0^t \mathrm{v}_0\left(1 + \frac{k}{m}\mathrm{v}_0 t'\right)^{-1} dt' = \frac{m}{k}\ln\left(1 + \frac{k}{m}\mathrm{v}_0 t\right)$$

Обратите внимание, что ни скорость, ни пройденный путь формально нигде в нуль не обращаются. Это связано именно с зависимостью силы сопротивления от скорости: при уменьшении скорости сила сопротивления тоже уменьшается.

Силы, зависящие от координат

Наиболее известные силы этого типа- это центральные силы, к которым относятся гравитационные силы, силы кулоновского взаимодействия между заряженными телами и силы упругости (закон Гука).

1. Сила, действующая на движущееся тело, называется *центральной*, если она всегда направлена вдоль радиуса- вектора ***r***, соединяющего некоторую неподвижную точку (центр силы) с движущимся телом:

$$\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{(III.10)}$$

К этому типу сил относятся гравитационная, кулоновская и сила упругости.

2. *Гравитационная сила*, действующая со стороны тела массы M на тело массой m, находящееся на расстоянии r от тела M:

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^3}\vec{r} \qquad \text{(III.11)}$$

где γ- гравитационная постоянная, и вектор $\vec{r}$ направлен от массы M к массе m.

3. Кулоновская сила взаимодействия между двумя зарядами

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r} \qquad \text{(III.12)}$$

где ε_0- электрическая постоянная, и вектор $\vec{r}$ направлен от заряда q_1 к заряду q_2.

4. Сила *упругости*, возникающая при отклонении тела от положения равновесия $\vec{r}_0$.

$$\vec{F} = -k\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \qquad \text{(III.13)}$$

где k- коэффициент жесткости (упругая постоянная).

Пример III.3. Тело двигается вдоль оси x так, что в момент времени t=0 оно находится в начале координат x=0 и имеет скорость v_0. Вдоль оси x на тело действует сила F=–kx. Найти зависимость от времени координаты, тела, его скорости и ускорения.

Решение. Запишем второй закон Ньютона

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Это уравнение является уравнением гармонического осциллятора и его решение имеет следующий вид

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$. Отсюда получим скорость и ускорение

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$$

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$$

Величины A и B являются постоянными, которые надо определить из начальных условий

$$x(t=0) = A = 0$$
$$\mathrm{v}(t=0) = Bw = \mathrm{v}_0$$

Таким образом, с учетом начальных условий, решение будет иметь следующий вид

$$x(t) = \frac{\mathrm{v}_0}{w}\sin wt$$

$$\mathrm{v}(t) = \mathrm{v}_0 \cos wt$$

$$a(t) = -\mathrm{v}_0 w \sin wt$$

IV. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея.

Системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной по величине и направлению скоростью, называются инерциальными. Важность выделения таких систем связана с тем, все законы физики одинаковы во всех инерциальных системах, то есть, никакими физическими опытами нельзя отличить одну инерциальную систему от другой. Это утверждение называется *принципом относительности*.

Пусть в некоторый момент времени в одной системе отсчета (назовем ее K-системой), положение частицы и ее скорость характеризуется векторами $\vec{r}$ и $\vec{\mathrm{v}}$. Тогда в системе отсчета K', которая движется со скоростью $\vec{V}$ относительно системы K, положение частицы и ее скорость будут определяться следующими соотношениями:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t \qquad \text{(IV.1)}$$

$$\vec{\mathrm{v}}\,' = \vec{\mathrm{v}} - \vec{V} \qquad \text{(IV.2)}$$

Соотношения (1) и (2) называются *преобразованиями Галилея*. Из (2) следует, что ускорение частицы во всех инерциальных системах одно и тоже. Эти соотношения справедливы только в нерелятивистском случае, когда скорости частиц много меньше скорости света.

V. Системы, состоящие из многих частиц

Для таких систем импульс, кинетическая энергия и момент импульса определяются следующим очевидным образом:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{V.1а}$$

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{V.1б}$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i [\vec{r}_i \times \vec{v}_i] \tag{V.1в}$$

где $m_i, \vec{v}_i, \vec{r}_i$ - масса, скорость *i*-й материальной точки и ее радиус-вектор. Суммирование в (1) проводится по всем материальным точкам, входящим в систему. Положение центра масс системы определяется радиусом-вектором:

$$\vec{R}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}, \tag{V.2а}$$

Если начало координат совпадет с центром масс системы, то очевидно

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0, \tag{V.2б}$$

Применив формулу (IV.1) к (2а), получим связь между радиус- векторами центра масс в двух инерциальных системах:

$$\vec{R}'_C = \vec{R}_C - \vec{V}t \tag{V.2в}$$

Скорость центра масс:

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{R}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{\vec{P}}{M}. \tag{V.3}$$

где $\vec{P}$ - полный импульс системы как целого, $M = \sum m_i$ - полная масса.

Таким образом,

$$\vec{P} = M\vec{v}_C \tag{V.4}$$

Отсюда следует, что если полный импульс системы частиц сохраняется, то ее скорость центра масс остается постоянной.

Преобразование импульса и кинетической энергии при переходе из одной инерциальной системы в другую.

Пусть в *K'*- системе, движущейся относительно *K* системы со скоростью V энергия, импульс и момент импульса системы частиц соответственно есть

$$\vec{P}' = \sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i' \qquad \text{(V.5а)}$$

$$E' = \sum \frac{m_i \mathrm{v}_i'^2}{2} \qquad \text{(V.5б)}$$

$$\vec{L}' = \sum m_i [\vec{r}_i' \times \vec{\mathrm{v}}_i'] \qquad \text{(V.5в)}$$

С помощью формул (IV.1, IV.2) получим связь между этими величинами

$$\vec{P}' = \vec{P} - M\vec{V} \qquad \text{(V.6а)}$$

$$E' = E + \frac{MV^2}{2} - PV \qquad \text{(V.6б)}$$

Из (6а) следует, что в инерциальной системе центра масс (*Ц*- системе) ($V = \mathrm{v}_C$) полный импульс системы частиц равен нулю и, следовательно, центр масс системы частиц в *Ц*- системе покоится. Кроме того, кинетическая энергия системы частиц в системе центра масс является минимальной и равна

$$E_C' = E - \frac{P^2}{2M} \qquad \text{(V.6в)}$$

Преобразование момента импульса при переходе из одной инерциальной системы в другую.

Следует отметить, что, момент импульса, в отличие от импульса и кинетической энергии, значения которых не изменяются при изменении начала отсчета, определяется относительно фиксированной точки. В данном случае (формула (1в)) относительно начала координат- точки *O*. Если перенести начало координат в другую точку *O'*, то относительно этой точки момент импульса будет уже другой. Связь между ними определяется следующим образом:

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{d} \times \vec{P}] \qquad \text{(V.7а)}$$

где $\vec{d}$ - вектор, направленный из точки O в точку O', $\vec{L}'$ - момент импульса относительно точки O', $\vec{P}$ - полный импульс системы как целого. Из формулы (7а) можно сделать два важных вывода.

1. Если полный импульс системы как целого P=0, то есть, мы находимся в Ц- системе, то в этом случае момент импульса не зависит от выбора точки, относительно которой он определяется. В этом случае он называется собственным моментом импульса системы. Часто собственный момент импульса удобно рассчитывать относительно центра масс системы.
2. Если вектор $\vec{d}$ в (7а) совпадает с вектором $\vec{R}_C$ то формула (7а) примет вид

$$\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{R}_C \times \vec{P}] \qquad \text{(V.7б)}$$

То есть, момент импульса системы частиц $\vec{L}$ относительно начала координат лабораторной системы (точки O) складывается из ее момента $\vec{L}'$ в *Ц*- системе и момента $[\vec{R}_C \times \vec{P}]$ относительно точки O, обусловленного движением системы частиц как целого.

Посмотрим, как изменяется момент импульса при переходе из одной инерциальной системы в другую. Начнем с выражения (1в), куда вместо $\vec{r}_i, \vec{\mathrm{v}}_i$ подставляем их выражения из формул (IV.1, IV.2)

$$\vec{L} = \sum m_i[\vec{r}_i \times \vec{\mathrm{v}}_i] = \sum m_i[(\vec{r}_i' + \vec{V}t) \times (\vec{\mathrm{v}}_i' + \vec{V})] = \vec{L}' + M[\vec{R}_C' \times \vec{V}] + [\vec{P}' \times \vec{V}]t \qquad \text{(V.7в)}$$

где векторы $\vec{P}'$ и $\vec{L}'$ определены, соответственно, в (5а) и (5в). Величина $\vec{R}_C' = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i'$ в (7в) есть радиус вектор центра масс в K' системе.

Воспользовавшись формулой (V.2в), перепишем правую часть (7в) в следующем виде:

$$\vec{L} = \vec{L}' + M[\vec{R}_C \times \vec{V}] + [\vec{P}' \times \vec{V}]t \qquad \text{(V.7г)}$$

Если на систему не действуют внешние силы, то скорость ее центра масс постоянна и всегда можно выбрать такую инерциальную систему, чтобы

$\vec{V} = \vec{v}_C$. В этом случае $\vec{P}' = 0$ и (7г) переходит в (7б). Однако, следует иметь в виду, что в то время как формула (7б) справедлива всегда, переход (7г) в (7б) возможен только в отсутствии внешних сил.

Пример V.1. Небольшой шарик массы m брошен из начала координат с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти зависимость от времени момента импульса шарика относительно начала координат.

Решение. Пусть движение шарика происходит в плоскости x, y. Тогда легко видеть, что имеется только одна компонента L, направленная по оси z:

$$L_z = m(x v_y - y v_x) \tag{V.8}$$

Воспользуемся уравнениями (II.25а,б) и (II.26а,б), описывающих координаты и скорости при плоском движении тела с постоянным ускорением. В данном случае $a_x = 0; a_y = -g; v_x = v_0 \cos a$. Следовательно, $x(t) = v_0 t \cos a$; $y(t) = v_0 t \sin a - \frac{gt^2}{2}$; $v_y(t) = v_0 \sin a - gt$. Подставляя эти выражения в (8), получим $L_z = -\frac{gt^2}{2} v_0 \cos a$. Знак "–" отражает тот факт, что в данном случае вектор момента импульса направлен в сторону отрицательного направления оси z.

Пример V.2. Гантель, состоящая из двух точечных масс, каждая из которых равна m и соединенных невесомой спицей длиной *l*, движется так, что все время находится в плоскости xy. При этом центр инерции гантели движется равномерно и прямолинейно со скоростью V, параллельно оси x. Траектория, вдоль которой движется центр инерции, пересекает ось y в точке $x = 0; y = |b|$. угловая скорость гантели Ω, гантель вращается против часовой стрелки. Найти вектор момента импульса гантели $\vec{L}$ относительно начала координат.

Решение. Воспользуемся формулой (7б). В данном случае есть только одна компонента момента импульса, направленная по оси z. Поскольку гантель вращается против часовой стрелки, то ее собственный момент импульса L'

направлен вдоль положительного направления оси z. Проще всего вычислять L'_Z относительно центра масс системы. В этом случае скорости каждого тела одинаковы и противоположны по направлению $(\vec{v}_2 = -\vec{v}_1 \equiv \vec{v})$ и, кроме того, перпендикулярны к направлению радиус- вектора. Следовательно

$$L'_Z = m[\vec{r}_1 \times \vec{v}_1]_Z + [\vec{r}_2 \times \vec{v}_2]_Z = m[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \mathrm{v}]_Z = m\mathrm{v}l = \frac{m\Omega l^2}{2} \qquad \text{(V.9a)}$$

При получении этого результата мы воспользовались тем, что $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = l$ и $\mathrm{v} = \dfrac{\Omega l}{2}$. Второе слагаемое в (7б) описывает момент импульса системы как целого относительно начала координат. Этот вектор направлен в сторону отрицательного направления оси z.

$$[\vec{R}_C \times \vec{P}]_Z = -2mR_C V \sin a = -2mVb \qquad \text{(V.9б)}$$

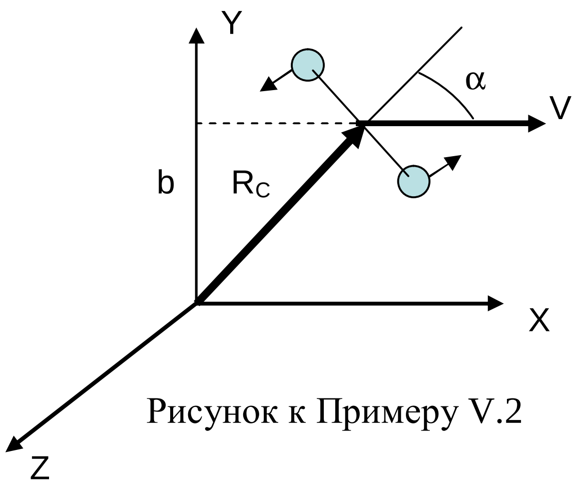


Рисунок к Примеру V.2

Таким образом, полный момент импульса относительно начала координат будет

$$L_Z = \frac{m\Omega l^2}{2} - 2mVb \qquad \text{(V.9в)}$$

Пример V.3. Шарик массы m падает без начальной скорости с высоты *h*. Найти модуль приращения момента импульса шарика за время падения относительно точки O' системы отсчета, движущейся поступательно со скоростью V в горизонтальном направлении. В начальный момент времени точка O' совпадала с точкой *O*, в которой находился шарик в момент начала падения.

Решение. Воспользуемся формулой (7г). В этом выражении величина ***L***- это момент импульса относительно неподвижной точки в лабораторной системе отсчета. В данном случае- относительно точки *O*, в которой шарик находился в момент начала падения. Относительно этой точки момент импульса шарика равен нулю, так как в каждый момент времени радиус-вектор и скорость шарика совпадают по направлению. Таким образом, из (7г) получим:

$$\vec{L}' = -M[\vec{R}_C \times \vec{V}] - [\vec{P}' \times \vec{V}]t \qquad \text{(V.10a)}$$

где $\vec{L}'$- момент импульса шарика относительно точки O', $\vec{R}_C$- радиус-вектор из точки O в точку нахождения шарика в некоторый момент времени. Очевидно, что в рассматриваемом случае момент импульса имеет только одну z- компоненту. Считая, что скорость V направлена вдоль положительной оси x, получим из (10)

$$L'_Z = -my_C(t)V + m\mathrm{v}'_y(t)Vt = -my_C(t)V + m\mathrm{v}_y(t)Vt \qquad \text{(V.10б)}$$

Здесь использовано то обстоятельство, что в данном случае $\mathrm{v}'_y = \mathrm{v}_y$.

Воспользовавшись кинематическими формулами $y_C(t) = -\dfrac{gt^2}{2}; \mathrm{v}_y(t) = -gt$,

получим $L'_Z = -\dfrac{mgt^2V}{2}$. Подставив в это выражение время падения шарика

$t_0 = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, получим величину момента импульса в момент удара шарика о

землю $L'_Z = -mhV$. Таким образом, изменение момента импульса $\left|\Delta L'_Z\right| = 0 - \left(-mhV\right) = mhV$.

VI. Динамика твердого тела

Твердое тело- это частный случай системы многих частиц, в которой расстояния между любыми двумя частицами строго фиксированы и не меняются во времени. Динамические переменные для твердого тела- импульс, кинетическая энергия, момент импульса, определяются также как и для системы многих частиц (формулы (V.5а, б, в). В общем случае твердое тело может участвовать как в поступательном, так и во вращательном движениях, а также в их комбинации. Поступательное движение можно выделить переходя в *Ц*- систему. При этом, уравнения движения для центра масс твердого тела будут те же, что и для материальной точки. Поэтому ниже мы рассмотрим только вращательное движение твердого тела.

Вращение твердого тела относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс

В этом случае все точки тела имеют в один и тот же момент времени одну и туже угловую скорость ω. При этом линейная скорость каждой точки тела v_i связана с его угловой скоростью посредством соотношения $v_i = w r_i$, где ρ_i- наименьшее расстояние от точки *i* до оси вращения. Для момента импульса и кинетической энергии получим из (V.5б, в)

$$L = J_C w \qquad \text{(VI.1)}$$

$$E = \frac{J_C w^2}{2} = \frac{L^2}{2 J_C} \qquad \text{(VI.2)}$$

где величина

$$J_C = \sum_i m_i r_i^2 \qquad \text{(VI.3)}$$

Называется моментом инерции тела относительно оси вращения. В данном случае эта ось проходит через центр масс тела.

В уравнении (1) вектор момента импульса направлен вдоль оси вращения тела. Величина, определяемая уравнением (2), называется кинетической энергией вращательного движения.

Для непрерывного распределения масс сумму в формуле (3) заменяют интегралом по распределению массы тела

$$J = \int r_c^2 dm, \qquad \text{(VI.4a)}$$

где r_c – расстояние от элемента массы dm до оси вращения.

Если тело выполнено из однородного материала, удельная плотность которого ρ всюду одинакова, то $dm = r\, dV$ и выражение (4а) можно переписать следующим образом

$$J = \rho \int_V r_c^2 dV = M \frac{\int_V r_c^2 dV}{V}, \qquad \text{(VI.4б)}$$

где $M = \rho V$ - масса тела и интегрирование в (4б) идет по объему тела.

Пример VI.1. Вычислить момент инерции однородного шара массы M, радиуса R, вращающегося относительно оси, проходящей через его центр масс.

Решение. Воспользуемся формулой (4б). Начало координат поместим в центр шара и ось z направим вдоль оси вращения. Обозначим угол между радиус- вектором r элемента объема dV и осью z через θ. Тогда $r_c = r\sin\theta$. В сферической системе координат $dV = r^2 dr \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$. Таким образом,

$$\int_V r_c^2 dV = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \;\; r^4 \sin^3\theta = \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3}$$

Разделив этот результат на объем шара $V = \frac{4\pi}{3} R^3$, получим момент инерции шара, относительно оси, проходящей через его центр масс $J_C = \frac{2MR^2}{5}$.

Приведем здесь еще несколько выражений для моментов инерции геометрически правильных тел относительно осей, проходящих через их центр масс: $J_C = \frac{Ml^2}{12}$ для тонкого однородного стержня длины l относительно оси, перпендикулярной стержню; $J_C = MR^2$ для тонкого обруча радиуса R, относительно оси, перпендикулярной плоскости обруча; $J_C = \frac{MR^2}{2}$ для сплошного диска радиуса R, относительно оси, перпендикулярной плоскости диска; $J_C = \frac{MR^2}{2}$ для сплошного цилиндра радиуса R, относительно его продольной оси.

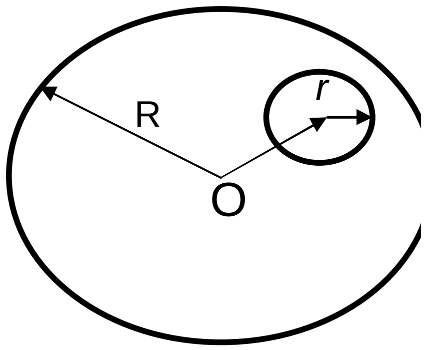
Момент инерции тела относительно произвольной оси определяется по теореме Штейнера:

$$J = J_C + md^2, \qquad \text{(VI.5)}$$

где d – расстояние между данной осью и параллельной осью, проходящей через центр масс тела, J_C- момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела, которая параллельна данной оси. При этом, выражения (1, 2) остаются справедливыми и в этом случае, если в них вместо величины J_C подставить J.

Момент инерции является положительной и аддитивной величиной. То есть, момент инерции тела относительно фиксированной оси есть сумма моментов инерции отдельных частей тела относительно той же оси.

Пример VI.2. Вычислить момент инерции относительно оси проходящей через геометрический центр однородного диска перпендикулярно его плоскости. Радиус диска R, в нем вырезано круглое отверстие радиуса r. Расстояние между центром диска и центром отверстия равно a.



Решение. Обозначим через J момент инерции сплошного диска (без вырезанного отверстия) относительно оси, проходящей через точку O. Тогда в силу аддитивности момента инерции можно записать $J = J_1 + J_2$, где J_1- момент инерции диска с вырезанным отверстием, а J_2- момент инерции маленького диска, закрывающего отверстие радиуса r, относительно оси, проходящей через точку O. Момент инерции сплошного диска $J = \frac{MR^2}{2}$. Момент инерции маленького диска относительно оси, проходящей через точку O, находим с помощью теоремы Штейнера $J_2 = \frac{mr^2}{2} + ma^2$. Следовательно, момент инерции диска с вырезанным отверстием $J_1 = J - J_2 = \dfrac{MR^2}{2} - \dfrac{mr^2}{2} - ma^2$. Поскольку диск выполнен из однородного материала, то очевидно отношение *m/M* равно отношению площадей: $\dfrac{m}{M} = \dfrac{r^2}{R^2}$, откуда $m = M\dfrac{r^2}{R^2}$. Таким образом, момент инерции диска с вырезанным отверстием $J_1 = \dfrac{MR^2}{2} - \dfrac{Mr^4}{2R^2}\left(1 + \dfrac{2a^2}{r^2}\right)$.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела (второй закон Ньютона) имеет следующий вид:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{N}_i \qquad \text{(VI.6)}$$

где в правой части стоит сумма моментов внешних сил F_i, действующих на тело.

$$\vec{N}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] \qquad \text{(VI.7)}$$

где $\vec{r}_i$ радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку приложения силы. В уравнении (6) момент импульса и момент внешних сил определяются относительно одной и той же точки.

В *Ц*- системе уравнение (6) преобразуется к виду

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_C \qquad \text{(VI.8а)}$$

где $\vec{N}_C$ - момент внешних сил (без учета сил инерции) относительно центра масс твердого тела. При вращении твердого тела относительно неподвижной оси, проходящей через центр масс $\vec{L} = J\vec{\omega}$, и из (8а) получим

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} = \vec{N}_C \qquad \text{(VI.8б)}$$

где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение тела.

В общем случае твердое тело может одновременно участвовать как в поступательном, так и во вращательном движении. Частным случаем такого движения является *плоское движение твердого тела*. При таком движении центр масс твердого тела движется в определенной плоскости, которая неподвижна в лабораторной системе, а вектор угловой скорости тела ω всегда остается перпендикулярным к этой плоскости. Примером такого движения является качение диска, шара, цилиндра по горизонтальной плоскости или скатывание этих тел с наклонной плоскости. Уравнения движения, описывающие плоское движение твердого тела есть:

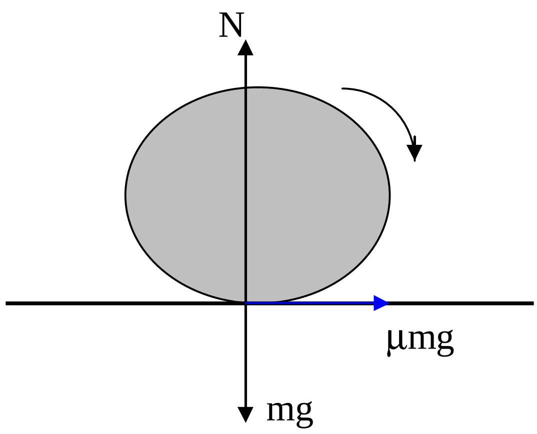
$$m\vec{a}_C = \vec{F} \tag{VI.9}$$

$$J_C\vec{\varepsilon} = \vec{N}_C \tag{VI.10}$$

где $\vec{a}_C$ - ускорение центра масс тела, $\vec{F}$ - результирующая всех внешних сил, J_C- момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, $\vec{N}_C$ - момент внешних сил относительно центра масс тела. Полная кинетическая энергия тела при плоском движении есть сумма кинетической энергии движения тела как целого и вращательной кинетической энергией тела:

$$E = \frac{m v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} \tag{VI.11}$$

Пример VI.3. Однородный сплошной цилиндр радиуса R и массой m привели во вращение по часовой стрелке с начальной угловой скоростью ω_0 и затем осторожно положили на плоскую горизонтальную поверхность. Коэффициент трения между поверхностью и цилиндром равен μ. Первое время цилиндр катится по поверхности с проскальзыванием, но через время t_0 проскальзывание прекращается и дальше цилиндр катится без проскальзывания. Найти: (а) время t_0 и (б) скорость центра масс v_0 в этот момент времени.



Решение. Динамика этого движения описывается двумя уравнениями (9) и (10). Ускорение поступательного движения, с которым движется центр масс тела, определяется силой трения mmg. Из второго закона Ньютона $ma_C = mmg$, откуда $a_C = mg$. Поскольку начальная скорость тела равна нулю, то зависимость скорости центра масс тела от времени есть $\mathrm{v}_C(t) = mgt$. Кроме того, сила трения создает момент вращения относительно центра масс тела $N = mmgR$. Этот момент вращения будет раскручивать цилиндр против часовой стрелки, замедляя его вращение, с ускорением, определяемым из динамического уравнения вращательного движения (10): $J_C e = mmgR$, откуда для круговой частоты вращения тела получим $w(t) = w_0 - et = w_0 - \frac{mmgR}{J_C}t$. В момент t_0, когда линейная скорость центра масс совпадет с линейной скоростью точек на поверхности твердого тела $\mathrm{v}_C(t_0) = w(t_0)R$, проскальзывание прекращается. Из этого условия получим

$$t_0 = \frac{w_0 R}{mg\left(1 + \frac{mR^2}{J_C}\right)}$$

Подставив эту величину в уравнение для скорости центра масс получим

$$\mathrm{v}_0 = \frac{w_0 R}{\left(1 + \frac{mR^2}{J_C}\right)}$$

Для цилиндра $J_C = \frac{mR^2}{2}$, откуда $t_0 = \frac{w_0 R}{3mg}; \mathrm{v}_0 = \frac{w_0 R}{3}$. Обратите внимание, что v_0 не зависит ни от массы тела, ни от силы трения между телом и поверхностью и определяется только формой тела, то есть его моментом инерции.

Пример VI.4. Два диска с моментами инерции J_1 и J_2, установленные на одной вертикальной оси, вращаются по часовой стрелке с угловыми скоростями соответственно w_1 и w_2, причем, $w_2 > w_1$. Перемещая диски вдоль оси, их приводят в соприкосновение. Спустя некоторое время в результате трения диски вращаются как одно целое. Найти результирующую угловую скорость совместного вращения дисков и изменение кинетической энергии системы.

Решение. Из закона сохранения момента импульса находим угловую скорость совместного вращения дисков:

$$J_1 w_1 + J_2 w_2 = \left(J_1 + J_2\right) w_{12},$$

$$w_{12} = \frac{J_1 w_1 + J_2 w_2}{J_1 + J_2}.$$

Из этого выражения в частности следует, что $w_1 < w_{12} < w_2$.

Начальная кинетическая энергия системы:

$$E_{K1} = \frac{J_1 w_1^2}{2} + \frac{J_2 w_2^2}{2}.$$

Конечная кинетическая энергия системы:

$$E_{K2} = \frac{\left(J_1 + J_2\right) w_{12}^2}{2}.$$

Изменение кинетической энергии системы:

$$E_{K2} - E_{K1} = -\frac{J_1 J_2}{2\left(J_1 + J_2\right)}\left(w_1 - w_2\right)^2.$$

Знак минус в полученном результате говорит об уменьшении кинетической энергии, т. е. часть энергии расходуется на преодоление сил трения в процессе выравнивания угловых скоростей дисков. Обратите внимание, что характер сил трения между дисками никак не влияет на полученный результат, который целиком определяется законом сохранения момента импульса. Подумайте, какие характеристики движения двух дисков зависят от сил трения между ними.

VII. Законы сохранения

Система взаимодействующих между собой тел (частиц) называется замкнутой, если отсутствует взаимодействие с какими-либо другими окружающими ее телами (частицами). Для замкнутой системы из N частиц в процессе ее движения сохраняются, то есть, не зависят от времени:

1) полная механическая энергия системы, которая есть сумма кинетической энергии частиц системы (V.1б) и потенциальной энергия взаимодействия частиц системы между собой; 2) полный импульс системы (V.1а) и 3) полный момент импульса системы (V.1в).

Из второго закона Ньютона следует, что скорость изменения кинетической энергии тела под действием внешней силы есть

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\text{v}^2}{2}\right)=\vec{F}\vec{\text{v}} \qquad \text{(VII.1)}$$

Где величина $\vec{F}\vec{\text{v}}$ есть мощность внешней силы.

Из этого выражения следует, что изменение кинетической энергии тела при его перемещении по определенной траектории из точки 1 в точку 2 под действием внешней силы равно работе внешней силы вдоль этой траектории. Математически это выражается следующим образом:

$$\frac{m\text{v}_2^2}{2}-\frac{m\text{v}_1^2}{2}=W_{12} \qquad \text{(VII.2)}$$

где работа внешней силы

$$W_{12}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\vec{\text{v}}dt\,, \qquad \text{(VII.3а)}$$

либо

$$W_{12}=\int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r} \qquad \text{(VII.3б)}$$

Эти два представления работы совершенно эквивалентны. Использование того или иного представления зависит от удобства вычислений.

Существует определенный класс сил, называемых консервативными, в поле которых работа по перемещению тела из одной точки в другую не зависит от траектории, связывающей эти две точки. Эти силы выражаются через некоторую функцию $U(x, y, z)$, характеризующую поле консервативных сил, следующим образом:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \equiv -\frac{dU}{d\vec{r}} \qquad \text{(VII.4a)}$$

В декартовых координатах выражение (4а) имеет вид

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \qquad \text{(VII.4б)}$$

Подставив (4а) в (3б), получим выражение для работы в поле консервативной силы

$$W_{12} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \qquad \text{(VII.5a)}$$

Из (5а) следует, что работа в поле консервативной силы определяется только значениями функции U в начальной и конечной точках траектории. Отсюда следует также, что работа в поле консервативной силы по замкнутой траектории равна нулю.

Подставив (5а) в (2), получим

$$\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} + U(\vec{r}_2) = \frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} + U(\vec{r}_1) \qquad \text{(VII.5б)}$$

Величина $U(\vec{r})$ называется потенциальной энергией взаимодействия тела с полем консервативной силы или потенциальной энергией тела. Сумма кинетической энергии тела и ее потенциальной энергии называется механической энергией тела. Соотношение (5б) выражает закон сохранения механической энергии тела в поле консервативной силы. Если кроме консервативных сил на тело действуют неконсервативные силы, то изменение механической энергии тела равно работе над телом этих неконсервативных сил:

$$\left(\frac{m\mathrm{v}_2^2}{2} + U(\vec{r}_2)\right) - \left(\frac{m\mathrm{v}_1^2}{2} + U(\vec{r}_1)\right) = W_{12}^{нк} \qquad \text{(VII.6)}$$

где работа неконсервативных сил $W_{12}^{нк}$ определяется уравнениями (3а, б), где $F = F^{нк}$.

Примером консервативных сил являются центральные силы (III.10), для которых функция *U(r)* зависит только от расстояния между телом и данной точкой поля, при этом $f(r) = -\dfrac{dU(r)}{dr}$, где *f(r)* определена в (III.10).

Для гравитационного взаимодействия $U(r) \equiv U_G(r) = -\dfrac{GMm}{r}$, где G-гравитационная постоянная. Для кулоновского взаимодействия $U(r) \equiv U_C(r) = -\dfrac{Qq}{4pe_0 r}$, где ε_0- электрическая постоянная.

Центральные силы обладают еще одним важным свойством: при движении тела в поле центральной силы момент импульса тела относительно центра силы сохраняется, то есть, не меняется и остается равным своему первоначальному значению.

Механическая энергия тела массы m в гравитационном поле сферического тела радиуса R и массы M есть:

$$E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{m\mathbf{v}_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r} \qquad \text{(VII.7)}$$

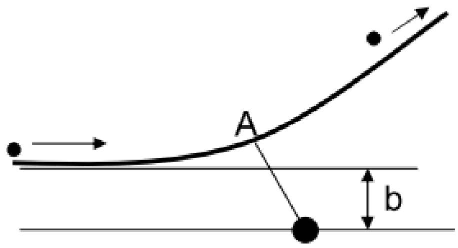
где G-гравитационная постоянная, $L = m\mathrm{v}_j\, r$ - момент импульса тела m относительно гравитационного центра. Гравитационную постоянную в этой формуле можно выразить через ускорение свободного падения g на поверхности тела M: $g = GM/R^2$.

Механическая энергия точечного заряда q в кулоновском поле точечного заряда Q есть:

$$E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + \frac{kqQ}{r} = \frac{m\mathbf{v}_r^2}{2} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{kqQ}{r} \qquad \text{(VII.8)}$$

где $k = 1/4pe_0$, $L = m\mathrm{v}_j\, r$ - момент импульса заряда q относительно центра заряда Q.

ПримерVII.1. α- частица (Z_α=2) с начальной кинетической энергией K_α=5.7 МэВ рассеивается на неподвижном ядре золота (Z_{Au}=79). Прицельный параметр $b=0.5\times10^{-13}$м. На какое минимальное расстояние α- частица приблизится к ядру? Чему равна начальная скорость α- частицы v_0 и ее скорость v_1 в точке минимального сближения?



Решение. α- частица- то ядро атома гелия, состоящее из двух протонов и двух нейтронов. Масса α- частицы, поэтому, есть $m_a = 2m_p + 2m_n \approx 4m_p$,

Поскольку кинетическая энергия α- частицы много меньше ее энергии покоя, то начальную скорость можно вычислять по обычной формуле

$$v_0 = \sqrt{\frac{2K_a}{m_a}} = \sqrt{\frac{2K_a}{4m_p}} = c\sqrt{\frac{K_a}{2m_p c^2}} \qquad \text{(VII.9)}$$

где c- скорость света. Подставив в эту формулу энергию покоя протона $mc^2 \approx 938 \text{МэВ}$, получим $v_0 = 1.65\times10^7$ $м/с$.

В рассматриваемом процессе сохраняется полная механическая энергия α-частицы. Поскольку в начале, когда α- частица находилась далеко от ядра, ее полная механическая энергия равнялась ее кинетической энергии K_α, то в любой точке траектории полная механическая энергия α- частицы будет оставаться равной K_α. В точке A минимального сближения радиальная компонента скорости α- частицы v_r обращается в нуль, поэтому в этой точке закон сохранения полной механической энергии имеет вид

$$K_a = \frac{L^2}{2m_a r_0^2} + \frac{ke^2 Z_a Z_{Au}}{r_0} \qquad \text{(VII.10)}$$

где r_0- расстояние от ядра до точки A, e- заряд протона. Решая уравнение (10) относительно r_0, получим:

$$r_0 = \frac{ke^2 Z_a Z_{Au}}{2K_a} + \sqrt{\frac{k^2 e^4 Z_a^2 Z_{Au}^2}{4K_a^2} + \frac{L^2}{2m_a K_a}} \qquad \text{(VII.10)}$$

Момент импульса α- частицы относительно неподвижной точки, где находится ядро, в этом процессе также сохраняется, поскольку взаимодействие α- частицы и ядра является центральным. В момент начала движения α- частицы момент импульса относительно этой точки был $L = m_a \mathrm{v}_0 b$. С другой стороны, в любой точке траектории момент импульса α- частицы можно записать как $L = m_a \mathrm{v}_j r$, где v_φ- проекция скорости на направление перпендикулярное радиусу- вектору r. Таким образом, закон сохранения момента импульса в этом процессе имеет вид:

$$m_a \mathrm{v}_0 b = m_a \mathrm{v}_j r \qquad \text{(VII.11)}$$

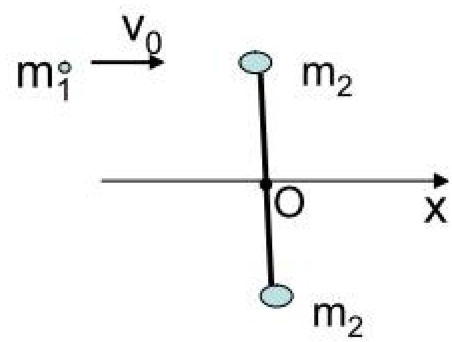
Поэтому, второе слагаемое под корнем в (VII.10) равно b^2:

$$r_0 = \frac{ke^2 Z_a Z_{Au}}{2K_a} + \sqrt{\frac{k^2 e^4 Z_a^2 Z_{Au}^2}{4K_a^2} + b^2} \qquad \text{(VII.12)}$$

При вычислении этого выражения необходимо кинетическую энергию α-частицы перевести из электрон- вольт в джоули: $K_\alpha = (5.7\times10^6$ эВ$)\times(1.6\times10^{-19}$ Дж/эВ$) = 9.12\times10^{-13}$ Дж. Проведя соответствующий расчет по формуле (12), получим $r_0 \approx 8\times10^{-14}$ м.

Скорость в точке А вычисляем по формуле (11), где $r = r_0$: $\mathrm{v}_j = \mathrm{v}_0 b / \mathrm{r}_0$. Подставив сюда полученные выше данные, найдем $\mathrm{v}_\varphi \approx 3.44\times10^{-2}\, c$.

Пример VII.2. Атом гелия налетает на покоящуюся молекулу азота со скоростью v_0 = 100 м/с (m_1 — масса атома гелия, m_2 — масса атома азота). Определить после столкновения: 1) скорость v_1 атома гелия; 2) скорость V молекулы азота, 3) собственный момент импульса L_z молекулы азота относительно оси z, проходящей через ее центр масс, то есть, момент импульса молекулы азота в



Ц- системе; 4) угловую скорость ω вращения молекулы азота. Удар между атомами считать абсолютно упругим. Атомы рассматривать как материальные точки, молекулу как жесткий ротатор. Межъядерное расстояние 2d = 0,1 нм.

Решение. Поскольку система изолирована, то выполняются законы сохранения импульса, полной механической энергии и момента импульса. Закон сохранения импульса:

$$m_1 \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + 2m_2 \vec{V} \qquad \text{(VII.13)}$$

где $\vec{v}_1$ - скорость атома гелия, $\vec{V}$ - скорость центра масс молекулы азота.

Закон сохранения механической энергии:

$$\frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{(2m_2)V^2}{2} + \frac{L^2}{2J} \qquad \text{(VII.14)}$$

Второй член в правой части этой формулы описывает кинетическую движения молекулы как целого, а последний член- энергию вращательного движения относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости рисунка. При этом, L есть момент импульса молекулы относительно центра масс, а J- момент инерции молекулы относительно оси, проходящей через центр масс.

Закон сохранения момента импульса относительно неподвижной точки О- центра масс молекулы до столкновения:

$$m_1[\vec{v}_0 \times \vec{r}] = m_1[\vec{v}_1 \times \vec{r}] + \vec{L} + 2m_2[\vec{R} \times \vec{V}] \qquad \text{(VII.15a)}$$

Где R- радиус вектор, соединяющий точку О и центр масс движущейся молекулы, ***r***- радиус вектор, соединяющий точку О с массой m_1. Поскольку скорость центра масс системы атом гелия + молекула азота сохраняется

$$V_C = \frac{m_1 \vec{v}_0}{m_1 + 2m_2} = \frac{m_1 \vec{v}_1}{m_1 + 2m_2} + \frac{2m_2 \vec{V}}{m_1 + 2m_2}$$

то из последней формулы следует, что, поскольку вектора v_0 и v_1 направлены вдоль оси x, то и вектор скорости центра масс V молекулы будет также направлен по оси x, причем центр масс молекулы будет находиться все время на оси x. Отсюда следует, что последнее слагаемое в правой части (15а) будет равно нулю, поскольку векторы $\vec{R}$ и $\vec{V}$ параллельны друг другу. Кроме того, уравнение (15а) содержит только одну z- компоненту (ось z перпендикулярна плоскости рисунка) $[\vec{\mathrm{v}}_0\times\vec{r}]_z=\mathrm{v}_0\,d$; $[\vec{\mathrm{v}}_1\times\vec{r}]_z=-\mathrm{v}_1\,d$; $\vec{L}=L_z\equiv L$ Таким образом, спроектировав (15а) на ось z, получим следующее уравнение:

$$m_1\mathrm{v}_0\,d=-m_1\mathrm{v}_1\,d+L \tag{VII.15б}$$

Проекция векторного уравнения (13) на ось x будет иметь вид:

$$m_1\mathrm{v}_0=-m_1\mathrm{v}_1+2m_2V \tag{VII.13а}$$

Обратите внимание на знак «–» в правых частях последних двух уравнений. Его появление связано с тем, что проекции соответствующих векторных величин направлены в сторону отрицательных полуосей z и x, соответственно.

В результате мы имеем три скалярных уравнения (13а), (14) и (15б) для определения трех неизвестных v_1, V, L.

Сравнив (15б) и (13а), мы сразу можем найти связь между L и V:

$$L=2m_2Vd \tag{VII.16}$$

Подставляя это значение L в (14) и учитывая, что в данном случае момент инерции $J=2m_2d^2$, получим

$$m_1\mathrm{v}_0^2=m_1\mathrm{v}_1^2+4m_2V^2 \tag{VII.17}$$

Выражая v_1 из (13а) через v_0 и V и подставляя это выражение в (17), получим скорость центра масс молекулы азота V и скорость атома гелия после удара v_1:

$$V=\frac{m_1\mathrm{v}_0}{m_1+m_2} \tag{VII.18}$$

$$\mathrm{v}_1=\frac{(m_2-m_1)\mathrm{v}_0}{m_1+m_2} \tag{VII.19}$$

Для момента импульса получим

$$L = \frac{2m_1 m_2 \mathrm{v}_0 d}{m_1 + m_2} \qquad \text{(VII.20)}$$

Угловую скорость вращения находим из соотношения $L = Jw$, откуда

$$w = \frac{m_1 \mathrm{v}_0}{(m_1 + m_2)d} \qquad \text{(VII.21)}$$

Используя эти формулы, вычислите численные значения соответствующих величин для исходных данных, приведенных в условии.

Обратите внимание на то, что полученное решение- это ровно то, что мы бы получили *непосредственно* после улара, когда второй атом молекулы азота можно считать неподвижным. *Подумайте, изменится ли результат, если массы в молекуле на концах гантели будут разными.*

Пример VII.3. Какой наименьшей кинетической энергией должна обладать частица массы m, чтобы при ее столкновении с неподвижной молекулой массы M передать ей во внутренние степени свободы заданную величину энергии $\Delta E = E_2 - E_1$, где E_1- внутренняя энергия молекулы до столкновения, E_2- внутренняя энергия молекулы после столкновения?

Решение. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

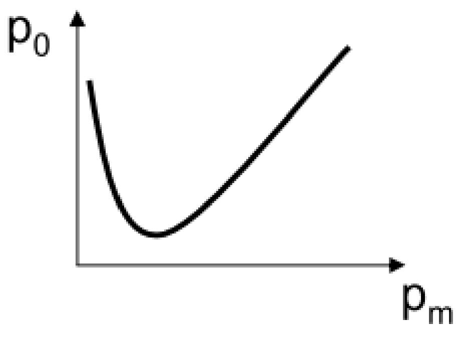
$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_m \qquad \text{(VII.22)}$$

$$\frac{p_0^2}{2m} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_m^2}{2M} + DE \qquad \text{(VII.23)}$$

где $\vec{p}_{0,}\, \vec{p}_1$- импульс частицы до и после столкновения, $\vec{p}_m$- импульс молекулы после столкновения. Выразим $\vec{p}_1$ из (22): $\vec{p}_1 = \vec{p}_0 - \vec{p}_m$, возведем это уравнение в квадрат и результат подставим в (23). При этом получим:

$$p_0 = p_m \frac{1+x}{2} + \frac{mDE}{p_m} \qquad \text{(VII.24)}$$

где $x = m/M$. Таким образом, зависимость $p_0(p_m)$ имеет ярко выраженный минимум.



Беря производную по p_m от обеих частей (24) и приравнивая ее нулю, найдем положение минимума этой зависимости

$p_{m,\min} = \sqrt{\dfrac{2mDE}{1+x}}$. Подставляя эту величину в правую часть (24), получим $p_{0,\min} = \sqrt{2mDE(1+x)}$, откуда минимальная энергия налетающей частицы есть

$$\frac{p_{0,\min}^2}{2m} = DE\frac{M+m}{M}$$

Из этого выражения видно, что минимальная энергия налетающей частицы должна быть больше ΔE, поскольку часть ее энергии переходит в движение молекулы как целого.

VIII. Специальная теория относительности

Постулаты Эйнштейна

1. Во всех инерциальных системах все физические законы одинаковы.
2. Скорость света не зависит от скорости источника и одинакова во всех инерциальных системах.

Кинематика

Пусть x_A, y_A, t_A и – x_B, y_B, t_B пространственно- временные координаты точек A и B в системе K, где эти точки покоятся. Координаты этих же точек в системе K′, которая движется со скоростью V вдоль оси X системы K, обозначим x'_A, y'_A t'_A и – x'_B, y'_B, t'_B. Введем далее пространственные и временные интервалы в обеих системах:

$$\Delta x = x_B - x_A\,; \Delta y = y_B - y_A\,; \Delta t = t_B - t_A\,; \Delta x' = x'_B - x'_A\,; \Delta y' = y'_B - y'_A\,;\ \Delta t' = t'_B - t'_A \qquad \text{(VIII.1)}$$

Тогда имеют место следующие соотношения (преобразования Лоренца)

$$\Delta y' = \Delta y\ ;\ \Delta x' = \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-b^2}}\,; \Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{V\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-b^2}} \qquad \text{(VIII.2)}$$

где β=V/c.

Из этих соотношений следует, что величина $(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2$, называемая *интервалом*, является одинаковой во всех инерциальных системах

$$(\Delta x)^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2 \qquad \text{(VIII.3)}$$

Сложение скоростей.

Пусть в системе К частица движется со скоростью **v** (v_x, v_y). Тогда в системе К′ компоненты скорости преобразуются следующим образом

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \; ; \; v'_y = v_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}} \qquad \text{(VIII.4)}$$

Относительной скоростью двух частиц называется скорость одной частицы относительно другой в системе, в которой одна из частиц покоится. Из преобразований скоростей (4) следует, что относительная скорость не может превысить скорость света.

Пример VIII.1. Две частицы движутся по двум взаимно перпендикулярным направлениям. Частица 1 движется вдоль положительной оси x со скоростью v_1, а частица 2 движется вдоль положительной оси y со скоростью v_2. Найти относительную скорость этих частиц.

Решение. Обозначим компоненты векторов скорости в системе К $\mathbf{v_1}$=(v_{1x}, 0), $\mathbf{v_2}$=(0, v_{2y},). Перейдем в систему отсчета К′, скорость которой **V**=$\mathbf{v}_1$. В этой системе скорость первой частицы равна нулю $\mathbf{v}'_1 = 0$. Из формул сложения скоростей (4) следует, что компоненты скорости второй частицы в системе К′ будут следующими:

$$v'_{2x} = -V = -v_1; \; v'_{2y} = v_2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \qquad \text{(VIII.7)}$$

Таким образом, скорость второй частицы по отношению к скорости первой (относительная скорость) есть:

$$v_2' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}} \qquad \text{(VIII.8)}$$

Длиной отрезка l называется расстояние (пространственный интервал) между точками A и B,($x_B - x_A$) определенное таким образом, что координаты точек x_A и x_B измеряются в *один и тот же момент времени*. Иными словами l=Δx при Δt=0. Длина отрезка в системе, в которой он покоится, называется собственной длиной l_0. Из преобразований Лоренца следует, что в любой другой инерциальной системе, относительно которой этот отрезок движется со скоростью V, его длина l будет меньше (лоренцевское сокращение длины)

$$l = l_0\sqrt{1 - b^2} \qquad \text{(VIII.5)}$$

Некоторое событие происшедшее с интервалом времени Δt *в одной и той же точке* (Δx=0) в системе, в которой эта точка покоится, называется собственным временем τ_0. В любой другой инерциальной системе, относительно которой эта точка движется со скоростью V, этот интервал (обозначим его τ) будет больше (лоренцевское замедление времени)

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - b^2}} \qquad \text{(VIII.6)}$$

Динамика

Полная энергия тела массы m, движущегося со скоростью **v**:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{(VIII.9)}$$

Кинетическая энергия тела массы m, движущегося со скоростью **v**:

$$K = E - mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2 \qquad \text{(VIII.10)}$$

Импульс тела массы m, движущегося со скоростью **v**:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{(VIII.11)}$$

Например,

$$p_x = \frac{m\mathrm{v}_x}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2+\mathrm{v}_z^2)/c^2}} \qquad \text{(VIII.12)}$$

и аналогично для других компонент.

Следствием этих формул являются следующие соотношения:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \qquad \text{(VIII.13)}$$

$$pc = \sqrt{K\left(K + 2mc^2\right)} \qquad \text{(VIII.14)}$$

$$\vec{\mathrm{v}} = \frac{\vec{p}c^2}{E} \qquad \text{(VIII.15)}$$

Из этого соотношения следует, что для частиц, скорость которых равна скорости света (например, фотонов) связь между полной энергией и импульсом есть

$$p = \frac{E}{c} \qquad \text{(VIII.16)}$$

Преобразования E и p:

$$p'_x = \frac{p_x - \dfrac{EV}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \;\; ; \;\; p'_y = p_y \;\; ; \;\; E' = \frac{E - p_xV}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}} \qquad \text{(VIII.17)}$$

Из этих формул следует, что величина $E^2 - p^2c^2$ является инвариантом, то есть

$$E^2 - p^2c^2 = E'^2 - p'^2c^2 \qquad \text{(VIII.18)}$$

Системы релятивистских частиц

Пусть имеется n частиц с энергиями E_1, E_2, E_3….. и импульсами p_1, p_2, p_3……. Тогда полная энергия и полный импульс определяются как

$$E_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} E_i \;\; ; \;\; p_\Sigma = \sum_{i=1}^{n} p_i \qquad \text{(VIII.19)}$$

Между полной энергией системы частиц и ее импульсом существует соотношение

$$\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right)^2 c^2 + M^2 c^4 \qquad \text{(VIII.20)}$$

Это соотношение является определением массы системы релятивистских частиц. Таким образом, в отличие от энергии и импульса масса системы частиц не является аддитивной величиной, то есть, $M \neq \sum_n m_n$.

Пример VIII.2. Найти массу системы двух фотонов с одинаковой энергией в двух случаях: (а) фотоны летят в одном направлении; б) фотоны летят в противоположных направлениях.

Решение. (а) Пусть ε- энергия каждого фотона. Поскольку масса покоя фотона равна нулю, то импульс фотона p=ε/c. Полная энергия двух фотонов E=2ε. Если фотоны летят в одном направлении, то их полный импульс P=2p=2ε/c. Подставляя эти величины в (20) получим M=0. Таким образом, в этом случае масса системы двух фотонов равна нулю. (б) В этом случае энергия системы двух фотонов по-прежнему E=2ε, однако их полный импульс P=0. Из формулы (20) при этом получим $M=2\varepsilon/c^2$. Этот пример очень четко показывает, что масса системы релятивистских частиц в общем случае не является аддитивной величиной: хотя масса каждого фотона по отдельности равна нулю, но масса двух фотонов, летящих навстречу друг другу с одинаковой энергией не равна нулю.

Скорость центра масс релятивистских частиц

$$\vec{V}_c = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right) c^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)} \qquad \text{(VIII.21)}$$

В системе центра масс полный импульс системы частиц равен нулю. При этом из (18) следует, что связь между энергией и импульсом в лабораторной системе и этими же величинами в инерциальной системе центра масс определяется соотношением:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} E_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i\right)^2 c^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} E_{c,i}\right)^2 \qquad \text{(VIII.22)}$$

где $E_{c,i}$ - полная энергия каждой частицы в системе центра масс.

Уравнение движения для релятивистских частиц выглядит также как и для классических

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{(VIII.23)}$$

Столкновения и распад релятивистских частиц

Здесь, как и в классической механике, выполняется закон сохранения импульса, а также закон сохранения полной энергии.

Пример VIII.3. Частица с массой m и импульсом $p=mc$ сталкивается с такой же неподвижной частицей. При этом образуется составная частица. Найти: (а) скорость налетающей частицы; (б) массу M составной частицы и ее скорость V; (в) суммарную кинетическую энергию K частиц до столкновения в системе отсчета, связанной с центром инерции системы частиц

Решение.

(а) Приравняв выражение для релятивистского импульса (11) величине mc, получим скорость налетающей частицы $\mathrm{v} = c/\sqrt{2}$.

(б) Из закона сохранения полной энергии следует

$$\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} + mc^2 = \sqrt{P^2c^2 + M^2c^4}\ , \qquad \text{(VIII.24)}$$

где P- импульс составной частицы.

Закон сохранения импульса имеет вид:

$$p = P = mc$$

Следовательно, (24) можно переписать следующим образом

$$mc^2\left(\sqrt{2}+1\right)=\sqrt{m^2c^4+M^2c^4}\ ,$$

Из этого уравнения определяем массу М

$$M=m\sqrt{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

Скорость составной частицы определяется на основе соотношения (15):

$$V=\frac{Pc^2}{\sqrt{P^2c^2+M^2c^4}}=\frac{pc^2}{\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}+mc^2}=\frac{c}{\sqrt{2}+1}$$

(в) **1-й способ**. Вначале с помощью соотношения (21) вычисляем скорость центра масс

$$V_C=\frac{(p_1+p_2)c^2}{E_1+E_2}=\frac{p_1c^2}{mc^2+\sqrt{p_1^2c^2+m^2c^4}}=\frac{mc^3}{mc^2+\sqrt{m^2c^4+m^2c^4}}=\frac{c}{1+\sqrt{2}}$$

Обратите внимание, что эта скорость совпадает со скоростью составной частицы, найденной в предыдущем пункте. *Объясните почему. Является ли это совпадение случайным?*

По формулам релятивистского сложения скоростей (4) вычисляем скорость каждой из частиц в системе центра масс. Скорость первой, налетающей, частицы

$$\mathrm{v}_1'=\frac{\mathrm{v}_1-V_C}{1-\frac{\mathrm{v}_1V_C}{c^2}}$$

Подставляя сюда $\mathrm{v}_1=c/\sqrt{2}$ и $V_C=\dfrac{c}{1+\sqrt{2}}$, получим $\mathrm{v}_1'=\dfrac{c}{1+\sqrt{2}}$

Поскольку скорость второй частицы до столкновения $\mathrm{v}_2=0$, то

$$\mathrm{v}_2'=-V_C=-\frac{c}{1+\sqrt{2}}\ .$$

Таким образом, в системе центра масс скорости обеих частиц одинаковы и противоположны по знаку. Это следует из того, что в системе центра масс суммарный импульс двух частиц должен быть равен нулю, а так как у них массы одинаковы, то и их скорости должны быть одинаковы и противоположны по знаку. Теперь, зная скорости частиц в *Ц*- системе, мы можем вычислить их суммарную кинетическую энергию. С помощью формулы (10), получим $K_1 = \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - 1 \right) mc^2$.Умножив этот результат на 2, получим суммарную кинетическую энергию $K = mc^2 \left(\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)} - 2 \right)$.

(в) **2-й способ**. Эту же задачу можно решить более изящным способом с помощью соотношения (22), которое в нашем случае можно записать следующим образом

$$\left(mc^2 \left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2 - m^2c^4 = \left(K + 2mc^2\right)^2$$

откуда $K = mc^2 \left(\sqrt{2\left(1+\sqrt{2}\right)} - 2 \right)$, то есть мы приходим к прежнему результату, полученному в предыдущем пункте.

Пример VIII.4. Неподвижная частица с массой M распадается на две частицы с массами m_1 и m_2. Найти энергии E_1 и E_2 распавшихся частиц.

Решение. Запишем законы сохранения полной энергии и импульса

$$Mc^2 = E_1 + E_2 \qquad \text{(VIII.25)}$$

$$0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \qquad \text{(VIII.26)}$$

Обратите внимание, что поскольку импульсы распавшихся частиц не равны нулю, то из (25) следует, что сумма масс распавшихся частиц всегда меньше массы исходной частицы.

Из закона сохранения импульса (26) следует, что $|p_1| = |p_2|$ или

$$E_1^2 - m_1^2c^4 = E_2^2 - m_2^2c^4$$

Это уравнение перепишем следующим образом

$$E_1^2 - E_2^2 = m_1^2c^4 - m_2^2c^4$$

или

$$(E_1 - E_2)(E_1 + E_2) = m_1^2c^4 - m_2^2c^4$$

С помощью уравнения (25) это уравнение можно записать следующим образом

$$(E_1 - E_2) = \frac{m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{Mc^2} \qquad \text{(VIII.27)}$$

Решая уравнения (25) и (27) совместно, найдем энергии распавшихся частиц

$$E_1 = \frac{Mc^2}{2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2$$

$$E_2 = \frac{Mc^2}{2} - \frac{m_1^2 - m_2^2}{M} c^2$$

IX. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях

Поведение заряженной частицы, имеющей заряд q, в электрическом поле **E** и магнитном поле **B** определяется с*илой Лоренца*

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\mathrm{v}}\vec{B}], \qquad \text{(IX.1)}$$

Уравнение движения заряженной частицы определяется вторым законом Ньютона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \text{(IX.2)}$$

где F- есть сила Лоренца (1). Для нерелятивистской частицы (v<<c) $p = m\mathrm{v}$, а для релятивисткой $\vec{p} = m\vec{\mathrm{v}}/\sqrt{1 - \mathrm{v}^2/c^2}$

Для нерелятивистской частицы уравнение (2) имеет вид:

$$m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} = q\vec{E} + q\left[\vec{\mathrm{v}}\vec{B}\right] \qquad \text{(IX.3)}$$

Умножив обе части этого уравнения скалярно на v, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathrm{v}^2}{2}\right) = q\vec{E}\vec{\mathrm{v}} \qquad \text{(IX.3a)}$$

Если электрическое поле является потенциальным $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, то

$$\vec{E}\vec{\mathrm{v}} = -\vec{\nabla}\varphi\,\vec{\mathrm{v}} = -\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dt} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}$$

Подставив этот результат в (3а), получим, что при движении частицы в электромагнитном поле сохраняется величина

$$\frac{m\mathrm{v}^2}{2} + q\varphi \qquad \text{(IX.3б)}$$

где φ- потенциал электрического поля. Величина (3б) есть не что иное, как механическая энергия частицы в электрическом поле.

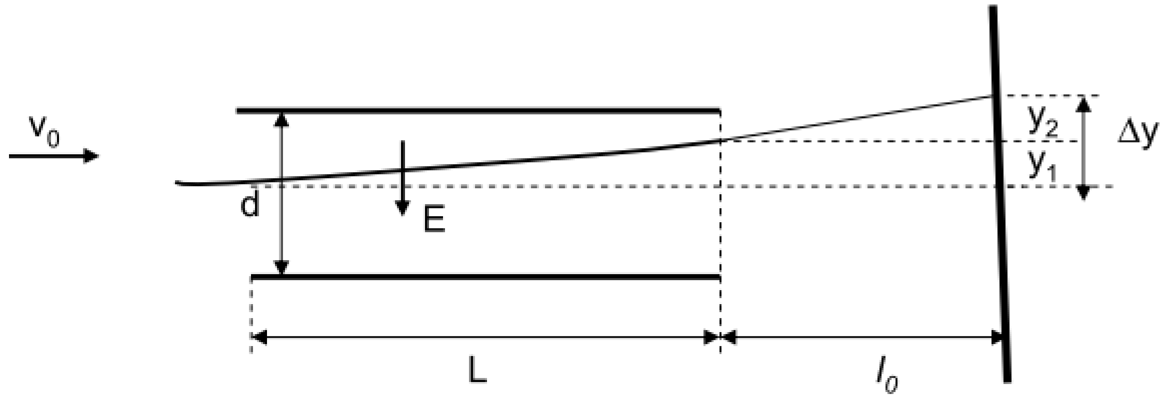
Движение заряженной нерелятивистской частицы в постоянном однородном электрическом поле

Уравнение движения

$$m\vec{a} = q\vec{E} \qquad \text{(IX.4)}$$

Откуда следует, что частица движется в этом поле с постоянным ускорением $a = qE/m$, а скорость и координата зависят от времени $\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 + \frac{qE}{m}t$, $x = x_0 + \mathrm{v}_0 t + \frac{qE}{2m}t^2$. Обратите внимание, что направление ускорения, определяется не только направлением поля, но и знаком заряда: ускорение положительно заряженной частицы направлено вдоль силовых линий поля, тогда как ускорение отрицательно заряженной частицы направлено против силовых линий поля.

Пример IX.1. Электрон со скоростью v_0=0.9×10^6 м/с влетает в пространство



между пластинами плоского конденсатора. Скорость v_0 направлена параллельно пластинам. Между пластинами действует электрическое поле E=10 мкВ/см, направленное вниз (см. рис.). Расстояние между пластинами d=1 см. длина пластин L=5 см. На расстоянии l_0=2 см от правого края конденсатора расположен экран. Найти смещение Δy электрона на экране от осевой линии. При какой минимальной скорости электрон сможет еще вылететь из пластин? Действием силы тяжести пренебречь.

Решение. На электрон между пластинами действует единственная сила со стороны электрического поля, направленная вверх. Поэтому компонента импульса электрона, а, следовательно, и его скорость вдоль оси x будут сохраняться, а ускорение по оси y находится из уравнения движения $ma_y = -q\dot{E}$, откуда для ускорения вверх получим $a_y = \dfrac{qE}{m}$. Время движения между пластинами, очевидно, есть $t_1 = \dfrac{L}{v_0}$. Таким образом, скорость электрона по оси y на выходе из пластин есть $v_y(t_1) = a_y t_1 = \dfrac{qEL}{mv_0}$, а его смещение по оси y равно $y_1 = \dfrac{a_y t_1^2}{2} = \dfrac{qEL^2}{2mv_0^2}$. В промежутке между правым краем пластин и экраном на электрон никакие силы не действуют, и в этой области компоненты скорости электрона будут v_0, $v_y(t_1)$. Время движения электрона от выхода из пластин и до экрана есть $t_2 = \dfrac{l_0}{v_0}$. За это время смешение электрона относительно точки выхода из пластин будет $y_2 = v_y(t_1)t_2 = a_y t_1 t_2 = \dfrac{qELl_0}{mv_0^2}$. Таким образом, полное смещение электрона на экране будет

$$\Delta y = y_1 + y_2 = \frac{qEL^2}{2mv_0^2} + \frac{qELl_0}{mv_0^2} = \frac{qEL}{mv_0^2}\left(\frac{L}{2} + l_0\right)$$

Подставляя в эту формулу исходные данные, получим

$$\Delta y = \frac{(1.6\times10^{-19}\,Кл)\times(1\times10^{-3}\,В/м)\times(5\times10^{-2}\,м)}{(9\times10^{-31}\,кг)\times(0.9\times10^{6}\,м/с)^2}\times(4.5\times10^{-2}\,м)$$
$$= 4.9\times10^{-7}\,м = 490\,нм$$

Чтобы электрон смог вылететь из пластин, его смещение y_1 должно быть меньше d/2 (если он влетает по осевой линии). Таким образом, наименьшая скорость находится из равенства y_1=d/2, откуда

$$\mathbf{v}_0 = \sqrt{\frac{qEL^2}{md}} = \sqrt{\frac{(1.6\times10^{-19}\,Кл)\times(1\times10^{-3}\,В/м)\times(5\times10^{-2}\,м)^2}{(9\times10^{-31}\,кг)\times(1\times10^{-2}\,м)}} = 6.7\times10^{3}\,м/с$$

Заряженная нерелятивистская частица в постоянном однородном магнитном поле

Пример IX.2. Заряженная частица, с зарядом q и массой m влетает в однородное постоянное магнитное поле B с начальной скоростью v_0. Найти траекторию движения частицы.

Решение. Уравнение движения частицы имеет вид

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\left[\vec{v}\vec{B}\right] \qquad \text{(IX.5)}$$

Пусть магнитное поле B направлено по оси z. Разложим вектор скорости на компоненту v_z, направленную вдоль поля B, и на компоненту $\mathbf{v}_\perp$ лежащую в плоскости x, y, перпендикулярной к оси z: $v_z=v_0\cos\alpha$, $v_\perp=v_0\cos\alpha$, где α- угол между вектором начальной скорости частицы и направлением поля,

$$m\frac{d\,v_z}{dt}=0 \tag{IX.6}$$

$$m\frac{d\,v_\perp}{dt}=q[v_\perp B] \tag{IX.7}$$

Из (6) следует, что составляющая скорости частицы вдоль поля v_z не меняется, а из (7) следует, что сила, действующая на частицу в плоскости x, y, всегда перпендикулярна направлению вектора скорости $\mathbf{v}_\perp$. Единственная траектория, которая удовлетворяет этому условию, является окружность. Это следует из того, что сила Лоренца, действующая на заряженную частицу, все время перпендикулярна ее скорости и поэтому может изменять только направление скорости, но не ее величину.

Уравнение Ньютона для движения частицы по окружности есть

$$\frac{m v_\perp^2}{R}=q v_\perp B \tag{IX.8}$$

откуда

$$R=\frac{m v_\perp}{qB}=\frac{m v_0 \sin a}{qB} \tag{IX.9}$$

Период обращения частицы по окружности, очевидно, есть

$$T=\frac{2p\,m}{qB}, \tag{IX.10}$$

а частота

$$w=\frac{2p}{T}=\frac{qB}{m}. \tag{IX.11}$$

Обратите внимание, что последние две величины не зависят от скорости частицы. Таким образом, траектория заряженной частицы, влетевшей с начальной скоростью v_0 под углом α, к направлению однородного магнитного поля представляет собой винтовую линию с шагом h, равным

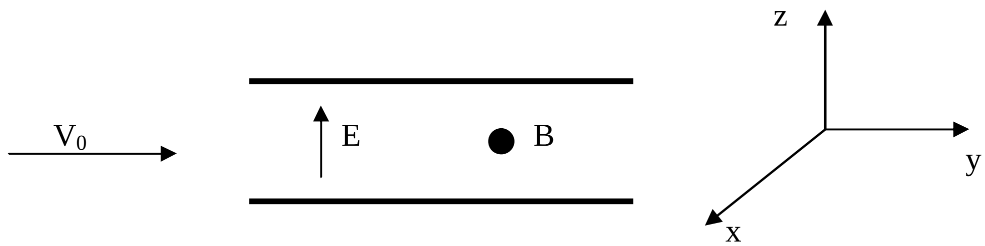
$$h = T\,v_0 \cos a = \frac{2p\,m}{qB} v_0 \cos a \qquad \text{(IX.12)}$$

и радиусом (9).

Если же частица влетает с начальной скоростью v_0 в магнитное поле *перпендикулярно* его направлению, то ее траектория представляет собой окружность с радиусом $R = \frac{m v_0}{qB}$. Обратите внимание: из (4) следует, что при движении в магнитном поле кинетическая энергия частицы не меняется и остается равной начальной кинетической энергии $m v_0^2/2$.

Движение нерелятивистской заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях

Пример IX.3. Заряженная частица- протон влетает с начальной скоростью v_0 вдоль оси y плоского конденсатора, между пластинами которого имеется однородное электрическое поле E, направленное по оси z, и однородное магнитное поле. направленное по оси x. Какому условию должны удовлетворять электрическое и магнитное поле, чтобы частица не отклонилась от прямолинейной траектории?



Решение. С учетом выбранных направлений полей уравнение движение (3) можно расписать по компонентам

$$m\frac{d\,v_z}{dt} = qE_z - q\,v_y\,B_x \qquad \text{(IX.13а)}$$

$$m\frac{d\,v_x}{dt} = 0 \qquad \text{(IX.13б)}$$

$$m\frac{d\,v_y}{dt} = q\,v_z\,B_x \qquad \text{(IX.13в)}$$

Эта система уравнений имеет решение $v_y = const; v_z = 0; v_x = 0$. Тогда уравнения (13б, в) выполняются автоматически, а из уравнения (13а) получаем

$$v_y = \frac{E_z}{B_x} \qquad \text{(IX.14)}$$

Таким образом, траектория частицы по оси y остается прямолинейной и ее скорость вдоль этой оси остается неизменной, если она удовлетворяет соотношению (14).

Этот эффект применяется в приборе, который называется селектором скоростей. Если вдоль оси движутся частицы с разными скоростями, то, меняя напряжение на конденсаторе (то есть, меняя электрическое поле E), можно на выходе из конденсатора выделить частицы с требуемой скоростью. Частицы, у которых скорость не равна E/B, будут отклоняться от прямолинейной траектории и не попадут в детектор, установленный на оси y на выходе из конденсатора.

Движение заряженной релятивистской частицы в постоянном и однородном электрическом поле

Уравнение, которому подчиняется движение заряженной частицы в электрическом поле, имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \qquad \text{(IX.15)}$$

Если поле E не зависит от времени, то решение уравнения (15) есть

$$\vec{p} = q\vec{E}t + \vec{p}_0 \qquad \text{(IX.16)}$$

где p_0- импульс частицы в начальный момент времени.

Уравнения (15) и (16) являются точными, то есть, применимы как для нерелятивистских, так и для релятивистских частиц. В случае нерелятивистской частицы $\vec{p} = m\vec{v}$ и из (16) следует, что скорость растет пропорционально времени. Однако, для релятивистской частицы ситуация более сложная, поскольку согласно (VIII.11) импульс p нелинейно зависит от скорости v.

Рассмотрим два случая.

1. *Электрическое поле направлено вдоль первоначального движения частицы.*

Направим электрическое поле вдоль оси x. Тогда векторное уравнение (16) будет иметь только одну компоненту:

$$\frac{m\mathrm{v}_x}{\sqrt{1-\mathrm{v}_x^2/c^2}} = qEt + p_0 \qquad \text{(IX.17)}$$

Решая (17) относительно v_x, получим

$$\mathrm{v}_x = c\frac{\dfrac{qEt+p_0}{mc}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{qEt+p_0}{mc}\right)^2}} \qquad \text{(IX.18)}$$

Из этого выражения следует, что при безграничном увеличении t скорость стремится к своему предельному значению- скорости света.

Более простой путь получения решения (18) состоит в использовании выражения (VIII.15), учитывая то, что в рассматриваемом случае полная энергия частицы

$$E = \sqrt{(q\mathrm{E}t + p_0)^2c^2 + m^2c^4} \qquad \text{(IX.19)}$$

2. *Электрическое поле направлено перпендикулярно первоначальному движению частицы.*

Пусть электрическое поле направлено по оси y и до того, как влететь в электрическое поле, частица имеет по оси x скорость v_0 и соответствующий импульс $p_x(0) = \dfrac{m\mathrm{v}_0}{\sqrt{1-\mathrm{v}_0^2/c^2}}$. Тогда в области действия поля компонента p_x должна сохраняться, так как сила вдоль оси x не действует и, таким образом, векторное уравнение (16) в компонентах имеет вид $p_x = p_x(0)$; $p_y = qEt$, где

$$p_x = p_x(0) = \frac{m\mathrm{v}_x}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2)/c^2}} \; ; \; p_y = qEt = \frac{m\mathrm{v}_y}{\sqrt{1-(\mathrm{v}_x^2+\mathrm{v}_y^2)/c^2}} \qquad \text{(IX.20)}$$

Из этих уравнений в принципе можно выразить v_x и v_y через $p_x(0)$ и t, однако, более простой путь состоит в использовании соотношений (VIII.15) и (19), которые для нашего случая дадут следующий результат:

$$\mathrm{v}_x = \frac{p_x(0)c^2}{\sqrt{\left([p_x(0)]^2 + (qEt)^2\right)c^2 + m^2c^4}} \; ; \; \mathrm{v}_y = \frac{qEtc^2}{\sqrt{\left([p_x(0)]^2 + (qEt)^2\right)c^2 + m^2c^4}}$$

(IX.21)

Из этих выражений следует, что при движении в области поля скорость частицы по оси x уменьшается, при этом компонента импульса вдоль оси x остается равной $p_x(0)$, тогда как по оси y импульс растет с ростом *t*, однако при этом скорость по оси y стремится к своему предельному значению- скорости света.

Движение заряженной релятивистской частицы в постоянном и однородном магнитном поле

Уравнение, которому подчиняется движение заряженной частицы в магнитном поле, имеет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q[\vec{\mathrm{v}}\vec{B}] \qquad \text{(IX.22)}$$

Уравнение (22) является точным, то есть, применимым как для нерелятивистских, так и для релятивистских частиц. Умножив обе части этого уравнения скалярно на вектор p, получим

$$\vec{p}\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{dt} = 0$$

Отсюда следует, что при движении в магнитном поле сохраняется абсолютное значение импульса частицы, а, следовательно, и ее полная энергия *E*. Тогда из соотношения $\vec{p} = \frac{E\vec{\mathrm{v}}}{c^2}$ получим $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{E}{c^2}\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}$, откуда следует

$$\frac{d\vec{\text{v}}}{dt}=\frac{qc^2}{E}[\vec{\text{v}}\vec{B}] \qquad \text{(IX.23)}$$

Это уравнение совпадает с классическим уравнением, если в нем заменить массу частицы m на величину E/c^2. Поэтому можно сразу записать выражения для частоты движения по окружности и радиуса

$$\omega=\frac{qB}{m}\sqrt{1-\text{v}^2/c^2}\ ; \qquad \text{(IX.24)}$$

$$R=\frac{m\text{v}}{qB\sqrt{1-\text{v}^2/c^2}} \qquad \text{(IX.25)}$$

Таким образом, для релятивистской частицы частота зависит от скорости (с ростом скорости частота уменьшается)

Из (24) можно записать выражения для периода обращения релятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле

$$T=\frac{2\pi m}{qB\sqrt{1-\text{v}^2/c^2}} \qquad \text{(IX.26)}$$

Движение заряженных частиц в неоднородном электрическом и магнитном полях.

Нахождение траектории заряженной частицы в произвольных неоднородных электрическом и магнитных полях в общем случае не решается аналитическими методами. Однако, ряд сравнительно несложных задач можно решить аналитически в замкнутой форме. Здесь мы разберем два примера, которые удобно решать в цилиндрических координатах (r,φ,z). В этом случае векторное уравнение (12а) распишется по компонентам следующим образом:

$$m\frac{dV_r}{dt}-m\frac{V_\varphi^2}{r}=qE_r+q\left(V_\varphi B_z-V_zB_\varphi\right) \qquad \text{(IX.27а)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mrV_\varphi\right)=qrE_\varphi+qr\left(V_zB_r-V_rB_z\right) \qquad \text{(IX.27б)}$$

$$m\frac{dV_z}{dt}=qE_z+q\left(V_rB_\varphi-V_\varphi B_r\right) \qquad \text{(IX.27в)}$$

где $V_r = \dfrac{dr}{dt}; V_j = r\dfrac{dj}{dt}; V_z = \dfrac{dz}{dt}$.

Пример IX.4. С поверхности цилиндрического провода радиуса *a*, по которому течет постоянный ток I, вылетает электрон с начальной скоростью v_0, перпендикулярной к поверхности провода. На какое максимальное расстояние удалится электрон от оси провода прежде, чем повернуть обратно под действием магнитного поля тока?

Решение. Направим ось z вдоль оси провода. Текущий по проводу ток создает вокруг провода магнитное поле, силовые линии которого представляют собой окружности с центром на оси провода. Таким образом, в цилиндрических координатах магнитное поле имеет только одну компоненту $B_j(r) = B_0\dfrac{a}{r}$, где $B_0 = \dfrac{m_0 I}{2p a}$, μ_0- магнитная постоянная, *r*- расстояние от оси провода. Для рассматриваемого примера уравнения (27) примут следующий вид:

$$m\frac{dV_r}{dt} - m\frac{V_j^2}{r} = eV_z B_j(r) \qquad \text{(IX.28а)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(mrV_j\right) = 0 \qquad \text{(IX.28б)}$$

$$m\frac{dV_z}{dt} == -eV_r B_j(r) \qquad \text{(IX.28в)}$$

где мы уже учли, что заряд электрона имеет отрицательный знак.

Поскольку в начальный момент времени, $V_\varphi=0$, то из (28б) следует, что и в любой другой момент времени $V_\varphi=0$. Таким образом, у нас остаются два уравнения (28а) и (28в)

$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{eB_0 a}{mr}V_z \qquad \text{(IX.29а)}$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{eB_0 a}{mr}V_r \qquad \text{(IX.29б)}$$

Уравнение (29б) можно преобразовать к виду

$$\frac{dV_z}{dt} = -\frac{eB_0 a}{mr} V_r = -\frac{eB_0 a}{mr}\frac{dr}{dt} = -\frac{eB_0 a}{m}\frac{d\ln r}{dt} \qquad \text{(IX.29в)}$$

Из этого уравнения получаем

$$V_z = -\frac{eB_0 a}{m}\ln\frac{r}{a} \qquad \text{(IX.30)}$$

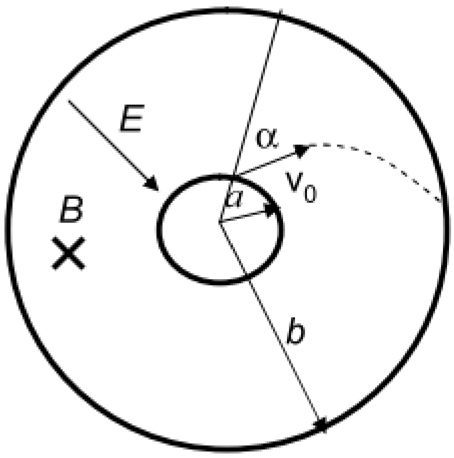
где постоянная интегрирования выбрана так, что при r=0 z- компонента скорости была равна нулю. В магнитном поле кинетическая энергия сохраняется $\mathrm{v}_0^2 = \mathrm{v}_z^2 + \mathrm{v}_r^2$, откуда

$$\mathrm{v}_r = \sqrt{\mathrm{v}_0^2 - \mathrm{v}_z^2} = \sqrt{\mathrm{v}_0^2 - \left(\frac{eB_0 a}{m}\ln\frac{r}{a}\right)^2} \qquad \text{(IX.31)}$$

Условие поворота частицы v_r=0. Из (31) при этом получим максимальное расстояние, на которое электрон отойдет от провода:

$$r_{\max} = a\exp\left(\frac{\mathrm{v}_0 m}{eB_0 a}\right) \qquad \text{(IX.32)}$$

Пример IX.5. Магнетрон- это прибор, состоящий из нити накала радиуса *a* и коаксиального цилиндрического анода радиуса *b*, которые находятся в однородном магнитном поле, параллельном нити. Между нитью и анодом приложена ускоряющая разность потенциалов $U = j_b - j_a$, где φ_a, φ_b- потенциалы катода и анода, соответственно. Найти минимальную величину магнитного поля, при котором электроны, вылетающие с поверхности нити, не будут достигать анода. Считать, что электроны вылетают с поверхности нити с начальной скоростью v_0 под углом α к радиусу.



Решение. На прилагаемом рисунке магнитное поле В направлено от нас перпендикулярно плоскости рисунка, а электрическое поле Е направлено от анода к катоду по радиусу. Электрон, вылетающий с поверхности катода под действием магнитного поля, будет отклоняться так, как показано пунктирной линией на рисунке. По мере увеличения магнитного поля радиус кривизны траектории будет уменьшаться, и при некотором значении этого поля B_{min} электроны перестанут достигать анода. Таким образом, в рассматриваемой задаче компоненты векторов E и B следующие: $\vec{E} = (E_r, 0, 0)$; $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. Уравнение (27б) запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\left(mrV_j\right) = erV_r B_0 \qquad \text{(IX.33)}$$

Учитывая, что $rV_r = r\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(r^2\right)$, уравнение (33) примет следующий вид

$$\frac{d}{dt}\left(mrV_j\right) = \frac{eB_0}{2}\frac{d\left(r^2\right)}{dt} \qquad \text{(IX.33a)}$$

Интегрируя это выражение в пределах от a до b, получим

$$bV_j(b) - aV_j(a) = \frac{eB_0}{2m}\left(b^2 - a^2\right) \qquad \text{(IX.34)}$$

Закон сохранения механической энергии запишем в виде

$$\frac{m\mathrm{v}_0^2}{2} - ej_a = \frac{mV_r^2(b)}{2} + \frac{mV_j^2(b)}{2} - ej_b \qquad \text{(IX.35)}$$

Подставив в (35) $\mathrm{v}_\varphi(b)$ из (34), получим для $\mathrm{v}_r(b)$:

$$V_r^2(b) = \mathrm{v}_0^2 - \left[\frac{a}{b}V_j^2(a) + \frac{eB_0}{2mb}\left(b^2 - a^2\right)\right]^2 + \frac{2eU}{m} \qquad \text{(IX.36)}$$

При некотором значении магнитного поля $B_0 = B_{min}$ радиальная компонента скорости v_r обращается в нуль, что означает, что с этого момента электроны перестают достигать анода. Приравнивая в (36) правую часть к нулю, получим

$$B_{\min} = \frac{2mb}{e\left(b^2 - a^2\right)}\left[\sqrt{\mathrm{v}_0^2 + \frac{2eU}{m}} - \frac{a}{b}V_j(a)\right] \qquad \text{(IX.37)}$$

где $V_\varphi(a)$ определяется начальными условиями: $V_\varphi(a) = \mathrm{v}_0 \sin a$. Это выражение значительно упрощается, если $b>>a$ и начальная скорость v_0 много меньше скорости $\sqrt{2eU/m}$, которую электрон приобретает в электрическом поле. В этом случае из (37) получим:

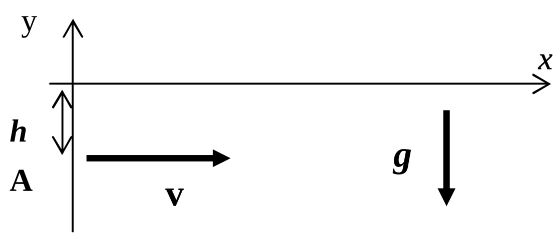
$$B_{\min} = \frac{2m}{eb}\sqrt{\frac{2eU}{m}} \tag{IX.38}$$

Из этого выражения следует, что электроны перестанут достигать анода, когда магнитное поле станет таким, что радиус кривизны траектории станет равным $b/2$. *Получите выражение (38) без использования формулы (33).*

ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ.

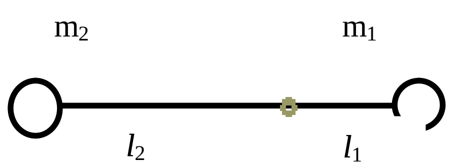
Вариант 1

1. Колесо, вращаясь равноускоренно за пятую секунду от начала движения повернулось на угол α=20°. На какой угол оно повернется за восьмую секунду?



2. Материальная точка начинает двигаться из начального положения *A(0,h)* Вектор начальной скорости направлен вдоль оси *x*. Ускорение g направлено вдоль оси *y*. Написать уравнение траектории движения точки.

3. Катер массой *m* движется по воде с постоянной скоростью v_0. В некоторый момент времени *t = 0* выключается двигатель. Сила сопротивления воды движению катера при относительно невысоких скоростях $\vec{F} = -k\vec{\mathrm{v}}$. Найти зависимость пути, пройденного катером с выключенным двигателем, от времени.



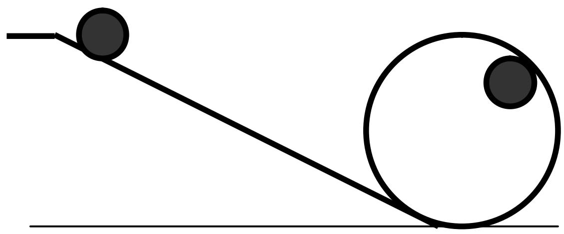
4. Вокруг горизонтальной оси *O* может свободно вращаться легкий стержень, на

концах которого укреплены грузы массами m_1 и m_2 ($m_2>m_1$) Расстояния от грузов до оси вращения l_1, l_2. В начальный момент времени стержень покоится в горизонтальном положении. Какую скорость будет иметь груз m_2 в нижней точке при свободном движении системы?

5. Частица *1* сталкивается с частицей *2*. Удар абсолютно неупругий. Масса частицы *2* в два раза больше массы частицы *1*. Скорости перед столкновением $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$; $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 5\vec{j}\,(м/с)$. Найти: а) скорость составной частицы; б) часть энергии, перешедшую в тепло.

6. Однородный шар массы $m = 5$ *кг* скатывается без скольжения с наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. Найти кинетическую энергию шара через две секунды после начала движения.

7. Шар, радиусом r , скатывается с наклонной плоскости и описывает «мертвую петлю» радиусом R. Пренебрегая трением качения найти начальную высоту центра шара, при скатывании с которой он не оторвется в верхней точке траектории от поверхности петли.



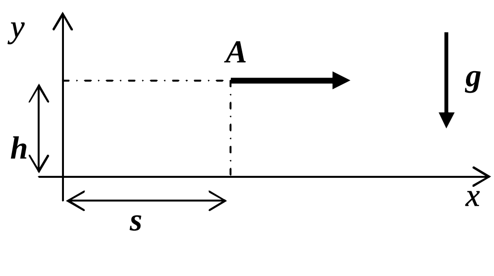
8. Найти период обращения спутника, движущегося вокруг Луны вблизи ее поверхности, если среднее значение плотности тела Луны $\rho=3.3$ *г/см*^{3}.

9. Две частицы, движущиеся в лабораторной системе отсчета (*К* - системе) по одной прямой с одинаковой скоростью v= *0,9с*, попадают в неподвижную мишень с промежутком времени Δt = *100 нс*. Найти собственное расстояние между частицами (в системе - *К′*).

10. Частица с массой m, движущаяся со скоростью v = *0,8с* , испытывает неупругое столкновение с такой же покоящейся частицей. Найти скорость составной частицы и ее массу.

Вариант 2.

1. Тело массы m начинает двигаться из начального положения *A(s,h)*. Вектор

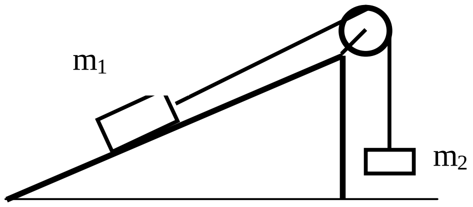


начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен вдоль оси *x*. Ускорение $\vec{g}$ направлено вдоль оси *y*. Написать уравнение траектории движения точки. На каком расстоянии от начала тело упадет на землю?

2. Материальная точка вращается вокруг неподвижной оси так, что ее угловая скорость зависит от угла поворота по закону $\omega=\omega_0-k\varphi$, где ω_0, *k*-положительные постоянные. В начальный момент времени $t = 0,\ j\ = 0$. Определить угол поворота точки и угловую скорость точки как функцию времени.

3. Длина взлетной полосы самолета $L = 0,5$ *км*, скорость самолета при взлете v=200 км/час. Какую нагрузку испытывает пассажир (отношение силы реакции опоры кресла к силе тяжести) при взлете, если разгон самолета происходит равноускоренно?

4. Угол наклонной плоскости к горизонтали $\alpha=30°$. Отношение масс тел $\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{2}{3}$. Коэффициент трения между телом *1* и наклонной плоскостью $m = 0,1$. Система приходит в движение из состояния покоя. Найти ускорение движения и силу натяжения нити, если m_1=1 кг. Массой блока пренебречь. Поднимается или опускается тело m_2? При каком значении коэффициента трения μ тела будут неподвижны,



5. Замкнутая система состоит из двух частиц массами m_1 и m_2, движущихся под прямым углом друг к другу со скоростями v_1, v_2. Найти в системе центра инерции импульс каждой частицы и общую кинетическую энергию системы.

6. Найти момент инерции тонкого однородного стержня массы *m* длины *l* относительно оси, проходящей через его центр под углом *a* к стержню.

7. С какой наименьшей высоты *H* должен съехать велосипедист, чтобы по инерции проехать дорожку в виде «мертвой петли» радиусом $R = 3$ *м* и не оторваться от дорожки в верхней точке петли. Масса велосипедиста вместе с

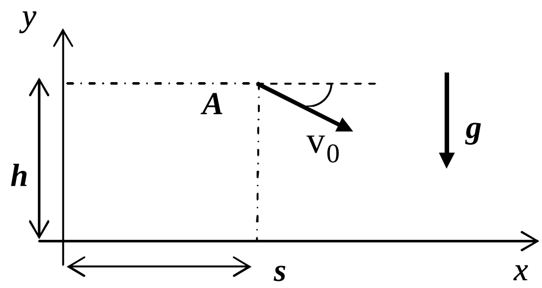
велосипедом *75 кг*, причем на массу колес приходится *3 кг*. Колеса считать обручами, трением пренебречь.

8. Искусственный спутник выведен на круговую орбиту со скоростью v=10 км/с над полюсом Земли. На каком расстоянии от земной поверхности вращается спутник?

9. Найти собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета (*К* -системе) его скорость v=c/2, длина $l = 1$ *м* и угол между ним и направлением движения α=30°.

10. Нейтрон с кинетической энергией $T=2mc^2$ (m - масса нейтрона) налетает на покоящийся нейтрон. Найти в системе центра инерции общую кинетическую энергию нейтронов до столкновения.

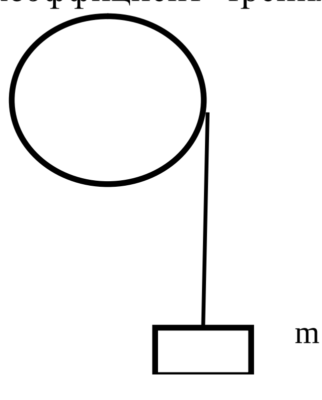
Вариант 3.



1. Тело начинает двигаться из начального положения $A(s,h)$. Вектор начальной скорости $\vec{v}_0$ направлен под углом a к оси x. Ускорение $\vec{g}$ направлено вдоль оси y. Написать уравнение траектории движения точки. На каком расстоянии от начала координат тело упадет на землю?

2. Камень брошен со скоростью v_0=10 м/с под углом α=60° к горизонту. Через какое время вектор скорости камня будет составлять угол α=30° к горизонту?

3. Поезд, подъезжая к станции со скоростью v=72 км/ч, начинает равномерно тормозить. Определить наименьшее время торможения поезда до полной остановки, безопасное для пассажиров. Коэффициент трения пассажира о полку в вагоне $m = 0,2$.



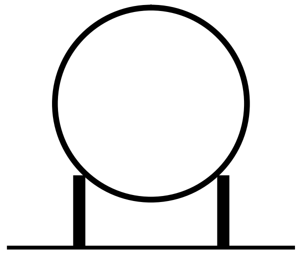
4. На закрепленный блок намотана нить, к концу которой подвешен груз m=300 г. Из-за трения

на оси блока минимальная масса груза, при которой он начинает опускаться, равна m_0=100 г. Определить ускорение, с которым опускается груз, силу натяжения нити, а также зависимость от времени момента импульса системы блок+груз относительно оси блока. Масса блока M=1 кг, радиус блока R=10 см.

5. Небольшой шарик массы $m = 50$ *г* прикреплен к концу резинового шнура жесткостью k=53 Н/м. Шарик отводят в сторону так, что шнур составляет прямой угол с вертикалью, и отпускают. В начальном положении шнур не деформирован. Когда шарик проходит нижнюю точку длина шнура $l = 1.5$ *м* , скорость шарика v=3 м/с. Найти в этой точке траектории силу натяжения шнура. **ОФ 1.177.**

6. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиуса R и массы m относительно оси, совпадающей с диаметром кольца.

7. Шар катится по двум параллельным направляющим линейкам, расстояние между которыми d. При каком радиусе шара энергия его поступательного движения равна энергии вращательного движения



7. Космический корабль выведен на круговую орбиту вблизи поверхности Земли. Какую дополнительную скорость в направлении его движения необходимо кратковременно сообщить кораблю, чтобы он смог преодолеть земное тяготение? **ОФ 1.269.**

8. Стержень пролетает с постоянной скоростью v=0.8c мимо метки, неподвижной в лабораторной системе отсчета (K - системе). Время движения мимо метки $Dt = 10$ *нс*. Найти собственную длину стержня.

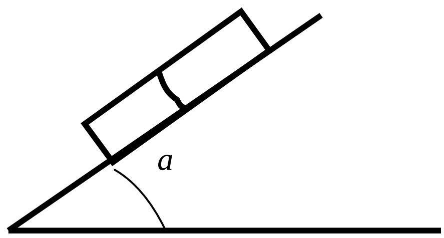
10. Две релятивистские частицы с массой m движутся навстречу друг другу с одинаковой скоростью. Удар неупругий, масса образовавшейся частицы M. Найти скорость образовавшейся частицы и скорость частиц до столкновения

Вариант 4

1. Тело брошено с начальной скоростью v_0=20 м/с под углом α=60° к горизонту. Определить максимальную высоту траектории движения тела и радиус кривизны траектории в этой точке.

2. Точка движется по окружности со скоростью v = 0.5t (t – время движения). Найти полное ускорение точки в момент, когда она пройдет 0.1 длины окружности после начала движения. Показать на рисунке векторы скорости, тангенциального, нормального и полного ускорений.

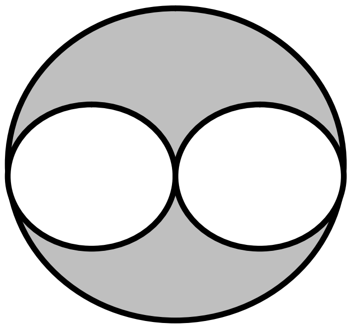
3. Два бруска с одинаковой массой m = *0.2 кг* находятся на наклонной плоскости с углом наклона α=45°. Коэффициент трения верхнего бруска о плоскость μ_1=0.01, нижнего μ_2=1.Определить силу взаимодействия брусков при их совместном соскальзывании.



4. Небольшое тело массы m, подвешенное на нити, отклоняют в сторону так, что нить образует прямой угол с вертикалью, и затем отпускают. Найти величину полного ускорения тела и силу натяжения нити как функцию от угла отклонения j от вертикали.

5. Система состоит из двух последовательно соединенных пружин с жесткостью k_1, k_2. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть систему пружин на величину Dl?

6. Однородный диск радиусом R имеет два симметричных выреза радиусом $\frac{R}{2}$. Масса диска с вырезами m. Найти момент инерции диска относительно осей, проходящих через точку O (центр диска) и C (на ободе диска).



7. Два горизонтально расположенных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси J_1, J_2, угловые скорости вращения соответственно ω_1,

ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска через некоторое время стали вращаться, вследствие трения, как одно целое. Найти установившуюся скорость вращения дисков и работу сил трения.

8. Телу, находящемуся на полюсе Земли, сообщили скорость v_0=10 км/с, направленную вертикально вверх. Зная радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, найти высоту, на которую поднимется тело.

9. В системе отсчета, связанной с Землей, m - мезон, движущийся со скоростью v = 0,99c, пролетает расстояние от точки рождения до точки распада l = *3 км*. Найти собственное время жизни мезона.

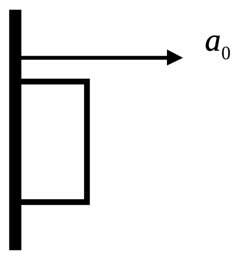
10. Нейтрон с кинетической энергией $T=mc^2$ (m - масса нейтрона) налетает на покоящийся нейтрон. Найти кинетическую энергию их относительного движения, импульс каждой частицы в Ц-системе и скорость этой системы. **(КВФ 9.3)**

Вариант 5

1. Камень брошен с вышки горизонтально с начальной скоростью v_0=15м/с. Определить нормальное и тангенциальное ускорение камня в конце второй секунды движения. Найти радиус кривизны траектории в этой точке.

2. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta=\alpha t$, где $\alpha=2\times10^{-2}$ рад/с^2. Через сколько времени после начала вращения вектор полного ускорения произвольной точки тела будет составлять угол $\varphi=60°$ с ее вектором скорости? Показать на рисунке направления векторов скорости, нормального, тангенциального и полного ускорений. **ОФ 1.48**.

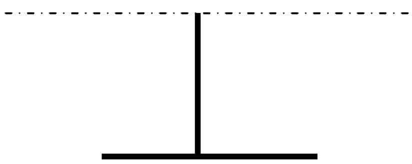
3. Вертикальная стенка движется вдоль оси x с ускорением a_0. В контакте со стенкой находится брусок. Коэффициент трения между ними m = *0,4* . Определить ускорение бруска $\vec{a}$ при 1) a_0=*30 м/с^2*; 2) a_0=*10 м/с^2*.



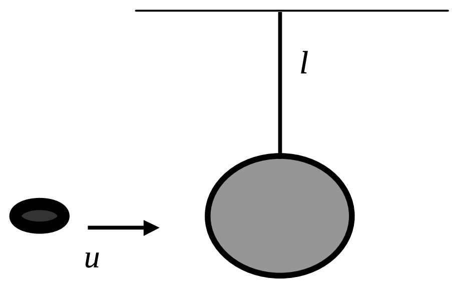
4. Доска массы m_1 свободно скользит по поверхности льда реки со скоростью v_1. На доску с берега прыгает человек массы m_2. Скорость человека v_2 перпендикулярна вектору скорости доски. Найти скорость доски с человеком. Трением пренебречь.

5. Тело свободно падает с некоторой высоты. В момент, когда его скорость была равна v_0=4 м/с оно разрывается на 3 одинаковых осколка. Два осколка начали двигаться в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью v=5 м/с каждый. Найти скорость третьего осколка сразу после разрыва.

6. Механическая система состоит из двух тонких однородных стержней массы m и длины L каждый. Найти момент инерции системы относительно оси, проходящей через конец одного стержня и параллельной другому стержню.



7. Маятник в виде шара, жестко скрепленного со стержнем массы m_1=2 кг и длиной l = $4R$ (R – радиус шара) может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. Масса шара m_2=6 кг радиус R = *10 см*. В шаре застревает пуля, летевшая со скоростью v=800 м/с. Масса пули m_3=10 г. На какой угол отклонится маятник в результате удара?



8. Вычислить радиус круговой орбиты стационарного спутника Земли, который остается неподвижным относительно ее поверхности (геостационарная орбита). Какова линейная скорость вращения спутника?

9. В плоскости xy K – системы отсчета движется частица, проекции скорости которой равны v_x, v_y. Найти скорость v' этой частицы в системе отсчета K', которая перемещается относительно системы K вдоль оси x в положительном направлении со скоростью $v_0=v_x/2$.

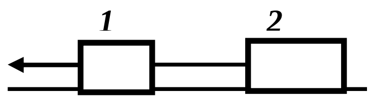
10. Релятивистская частица с массой m начинает двигаться из точки $x = 0$ вдоль оси x под действием постоянной силы $F=mc^2/b$ (b – $const$). Найти зависимость скорости и координаты частицы от времени $x(t)$.

Вариант 6

1. Материальная точка прошла половину пути со скоростью v_0. На второй половине пути она половину времени двигалась со скоростью v_1, а последний участок пути прошла со скоростью v_2. Найти среднюю скорость движения точки.

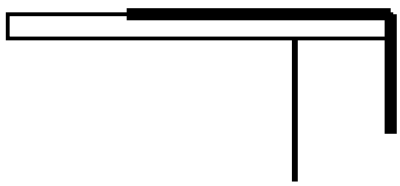
2. Под каким углом к горизонту нужно бросить шарик, чтобы радиус кривизны его траектории в начальной точке был в 8 раз больше, чем в вершине траектории?

3. Два тела массами m_1, m_2, связанные легкой и нерастяжимой нитью, лежат на горизонтальной плоскости. Коэффициенты трения равны μ_1, μ_2 соответственно. Найти ускорение движения системы и силу натяжения нити, если к телу 1 приложена сила F, направленная вдоль поверхности. Изменится ли результат, если сила F приложена к телу 2 таким же образом?

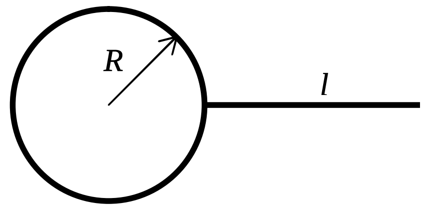


4. Из духового ружья стреляют в спичечную коробку, лежащую на расстоянии l = 30 *см* от края стола. Пуля массы m = 1 *г*, летевшая горизонтально со скоростью v=150 м/с, пробивает коробку и вылетает из нее со скоростью v/2. Масса коробки 50 *г*. При каком коэффициенте трения между коробкой и столом коробка упадет со стола?

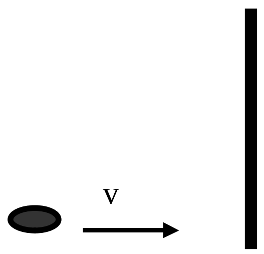
5. Канат длиной l находится на гладкой горизонтальной плоскости так, что часть его длины h свободно свешивается. В некоторый момент конец каната A отпускают. С какой скоростью он соскользнет с плоскости? Трением пренебречь.



6. Система состоит из тонкого кольца массы m, радиуса R и стержня массы m, длины l, прикрепленного к кольцу. Найти моменты инерции системы относительно оси, проходящей через свободный конец стержня и относительно оси, проходящей через центр кольца. Обе оси перпендикулярны плоскости кольца.



7. Однородный свинцовый стержень массы m_1=1 кг и длиной l = *40 см* может вращаться около горизонтальной оси, проходящей через центр масс стержня. В конец стержня попадает пуля массы m_2=1 г, летевшая горизонтально со скоростью v=200 *м/с* и застревает в нем. Найти угловую скорость вращения стержня. Как изменится при ударе механическая энергия всей системы?



8. На какой высоте над полюсом Земли ускорение свободного падения $g=0.99g_0$? (g_0- ускорение свободного падения на поверхности Земли).

9. Система *K*¢ движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}_0$ относительно системы *K*. Частица движется в системе *K* со скоростью **v** и ускорением *a* по прямой по направлению вектора $\mathbf{v}_0$. Найти ускорение частицы в системе *K*¢.

10. Релятивистская частица массы m с кинетической энергией *T* налетает на покоящуюся частицу такой же массы. Удар абсолютно неупругий. Найти массу и скорость составной частицы.

Вариант 7

1. Два камня брошены одновременно из одной точки: один – вертикально вверх, другой под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Начальная скорость каждого камня *25 м/с*. Найти расстояние между камнями через 2 секунды после начала движения.

2. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка *2.7 м* , начала двигаться равноускоренно вверх с ускорением a=1.2 м/с^2. Через 2 секунды

после начала движения с потолка лифта стал падать болт. Найти время падения болта на дно кабины.

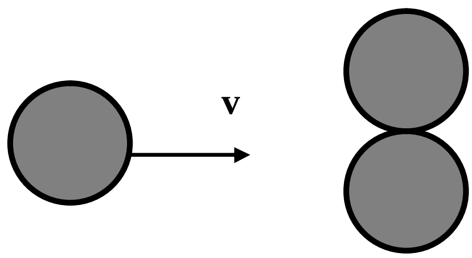
3. За какое время тело спустится с вершины наклонной плоскости высотой *2 м* и углом наклона 45°, если предельный угол, при котором тело находится на плоскости в покое, равен 30°?

4. Частица двигается по некоторой траектории в плоскости *xy* из точки *1* с радиусом – вектором $\vec{r}_1 = \vec{i} + 2\vec{j}$ $(м)$ в точку *2* с $\vec{r}_2 = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ $(м)$ под действием силы $\vec{F} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ $(Н)$. Найти работу силы.

5. Самолет делает «мертвую петлю» радиуса R = *500 м* с постоянной скоростью v=*360 км/час*. Масса летчика *70 кг*. Найти вес летчика в нижней, верхней и средней точках петли. **ОФ 1.91.**

6. Плотность диска радиусом R и толщиной d изменяется с расстоянием от оси *OO*, проходящей через центр диска перпендикулярно плоскости диска, от значения ρ_1 до $\rho_2=2\rho_1$. Найти момент инерции диска: (а) относительно оси *OO*; (б) относительно оси *O¢O¢*, проходящей через край диска параллельно оси *OO*.

7. На гладкой поверхности лежат, касаясь друг друга, два одинаковых шара радиусом R каждый. На них налетает такой же шар со скоростью v. Соударение всех трех шаров происходит одновременно, удар абсолютно упругий. Найти скорости шаров после удара. **ОФ 1.213.**



8. Период обращения Юпитера вокруг Солнца равен 12 лет. Считая орбиту Юпитера круговой, найти радиус орбиты Юпитера, а также скорость движения Юпитера по орбите.

9. Покоящееся тело массы М имеет форму куба со стороной *a*. Найти скорость системы отсчета относительно данного тела, в которой плотность тела на 25% больше плотности этого же тела в состоянии покоя.

10. Релятивистская частица массы m движется вдоль оси x лабораторной системы отсчета по закону $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, где c – скорость света, t – время, b = $const$. Определить силу, действующую на частицу в этой системе отсчета.

Вариант 8

1. Ракета, запущенная вертикально вверх, поднимается с постоянным ускорением 20 м/с^2 в течение 1.0 мин. За это время ее топливо полностью выгорает и далее ракета двигается как свободно летящее тело. (а) На какую максимальную высоту поднимется ракета? (б) Через какое время после запуска ракета упадет на землю? (зависимостью g от высоты пренебречь).

2. Артиллерийское орудие и цель находятся на расстоянии *5.1 км* друг от друга. Через какое время снаряд с начальной скоростью v=240 м/с достигнет цели? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. На покоящуюся частицу массы m в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, изменяющаяся со временем по закону $F = at(t - t)$, где a – $const$, t - время действия данной силы. Найти импульс частицы по окончании действия силы и путь, пройденный частицей за время $t = t$.

4. В момент времени $t = 0$ частица массы m начинает двигаться под действием силы $F = A\cos wt$ $(A, w - const)$. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки? Какой путь она при этом пройдет? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?

5. Цепочка массы $m = 0.8$ *кг* и длины $l = 1.5$ *м* лежит на поверхности стола так, что ее конец свешивается со стола. Цепочка начинает соскальзывать, когда ее свешивающаяся часть равна $l/3$. Какую работу совершат силы трения, действующие на цепочку, при ее полном соскальзывании на пол?

6. Тело сложной формы насажено на горизонтальную ось радиусом r, проходящую через центр масс тела. На ось намотана нить, к концу которой подвешен груз массы m. Груз начинает двигаться под действием силы

тяжести и за время $t = t$ опускается на расстояние h. Найти момент инерции тела.

7. Однородный тонкий стержень массы m и длины l свободно вращается на гладкой горизонтальной поверхности с угловой скоростью w. Один конец стержня внезапно закрепляется и дальнейшее вращение происходит относительно оси, проходящей через этот конец. Определить изменение угловой скорости вращения Dw и кинетической энергии стержня DE.

8. Система двух спутников Земли соединенных тонким тросом длины $l = 200$ *м* движется по круговой орбите вокруг Земли. Масса каждого спутника $m = 1000$ *кг*, высота орбиты $h = 0.2R$ (R – радиус Земли). Найти силу натяжения троса в момент, когда трос направлен по радиусу Земли.. Массой троса пренебречь. **ОФ 1.262.**

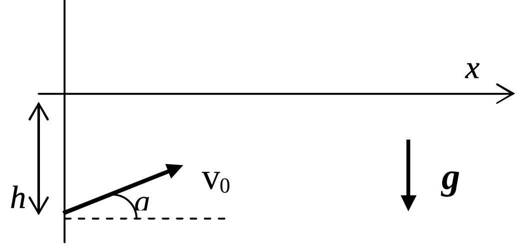
9. Две частицы движутся в лабораторной системе отсчета под прямым углом друг к другу. Одна со скоростью v_x=v_1 другая со скоростью v_y=v_2. Найти скорость одной частицы относительно другой.

10. Неподвижный атом массы m поглощает фотон с энергией e. Найти массу атома после поглощения фотона и его скорость.

Вариант 9

1. С какой высоты h упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время Dt *=0.2 с*?

2. Написать кинематические уравнения движения материальной точки $v_x(t)$, $v_y(t)$, $x = f_1(t)$; $y = f_2(t)$ и уравнение траектории $y = j(x)$. Нарисовать графики указанных выше зависимостей

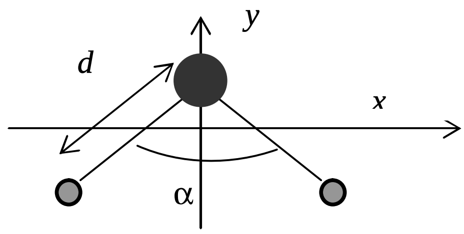


3. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязаны грузы m_1=2 кг и m_2=4 кг. Каково будет

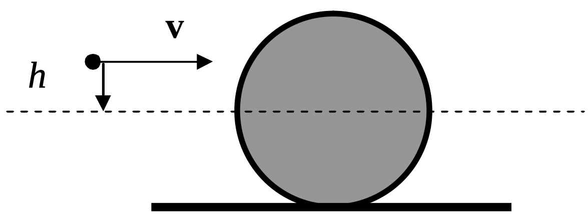
показания весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

4. Небольшое тело начинает скользить с вершины полусферы радиуса R . На какой высоте тело оторвется от поверхности полусферы? Трением пренебречь.

5. Определить момент инерции молекулы SO_2 относительно осей координат, проходящих через центр масс молекулы. Межъядерное расстояние d=0.145 нм, валентный угол α=120°. Ось z перпендикулярна плоскости рисунка.



6. В цилиндр массы M и радиуса R , покоящийся на горизонтальной поверхности, попадает пуля массы m , летевшая горизонтально на высоте h от оси цилиндра со скоростью v. Удар абсолютно неупругий. Найти установившуюся (без проскальзывания) скорость движения цилиндра.



7. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси, проходящей чрез центр диска. На краю платформы стоит человек массы m_1=60 кг. На какой угол повернется платформа если человек пойдет вдоль ее края и, обойдя ее, вернется в исходную точку? Масса платформы m_2=240 кг. Момент инерции человека определить как для материальной точки.

8. Два стержня, каждый из которых имеет собственную длину l_0 (в своей системе покоя), движутся навстречу друг другу с равными скоростями u относительно лабораторной системы K. Определить длину каждого стержня в системе отсчета $K¢$, связанной с другим стержнем.

9. На космическом корабле находятся часы, на старте синхронизованные с земными. Скорость корабля v = *8 км/с*. На сколько отстанут часы на корабле по измерениям земного наблюдателя за один год?

10. Определить скорость электрона, ускоренного из состояния покоя электрическим полем с разностью потенциалов $D j = 500$ *кВ*.

Вариант 10

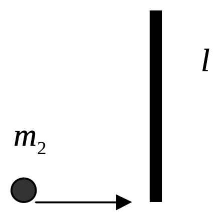
1. Тело брошено под углом a к горизонту. Найти этот угол, если дальность полета тела по горизонту в 4 раза больше максимальной высоты траектории.

2. Человек, стоящий на некоторой высоте над уровнем земли, бросает один мяч вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Затем он бросает такой же мяч с такой же скоростью v_0, но направленной вниз. Какой из мячей будет обладать большей скоростью в момент удара о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

3. На поверхности озера плавает лодка массы $M=200$ *кг* , длины $L=3$ *м*. На какое расстояние относительно берега переместится лодка, если человек массой m=60 кг перейдет с носа лодки на ее корму? Сопротивлением движения лодки в воде пренебречь.

4. Частица массы m , двигающаяся со скоростью u_0 сталкивается с покоящейся частицей массы M $(M > m)$ и после неупругого удара отклоняется от первоначального направления на угол a. Скорость первой частицы после удара v. Найти скорость движения и направление движения второй частицы.

5. Однородный стержень длины l и массы m_1 подвешен на горизонтальной оси, проходящей через конец стержня. В нижний конец стержня попадает пластилиновый шарик массы m_2, летевший горизонтально. Какова должна быть скорость шарика, чтобы стержень мог совершить полный оборот вокруг своей оси. Удар абсолютно неупругий.



6. Груз, привязанный к легкому нерастяжимому шнуру вращается в вертикальной плоскости с постоянной скоростью. Как зависит сила натяжения шнура от угла между шнуром и вертикалью? На сколько минимальная сила натяжения шнура меньше максимальной силы натяжения? Масса груза $m = 0.1$ *кг*.

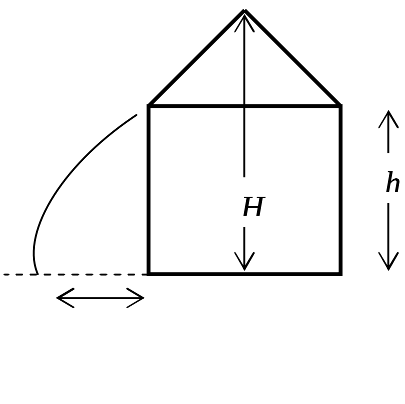
7. Определить момент инерции плоского кольца массой m относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости. Внешний радиус кольца R, внутренний радиус r.

8. Предположим, что маятниковые часы перенесены с Земли на Марс. На сколько секунд (минут) изменится суточный ход часов? Масса Марса в 10 раз меньше массы Земли, а диаметр Марса вдвое меньше диаметра Земли. *Указание:* применить формулу периода колебаний математического маятника $T = 2p\sqrt{l / g}$, где l- расстояние от точки подвеса до груза, g-ускорение свободного падения.

9. В системе *К* происходит событие *А*, через время *Dt* в другой точке этой же системы происходит событие *В*. На каком расстоянии в системе *К* должны происходить эти события, чтобы в системе *К¢* они были одновременны? Система *К¢* движется со скоростью u_0 относительно системы *К*.

10. Покоящаяся частица с массой m распадается на две частицы с массами покоя m_1 и m_2. Найти кинетические энергии продуктов распада. Решить задачу на примере α-распада урана U^{238}: $U^{238} \to Th^{234} + He^4$. Найти кинетическую энергию a- частицы и дочернего ядра. Энергии покоя соответствующих ядер: $m(U^{238}) = 221.74289$ *Гэв*, $m(Th^{234}) = 218.01022$ *Гэв* $m(He^4) = 3.72839$ *Гэв*.

Вариант 11



1. Материальная точка движется по окружности из состояния покоя. Радиус

окружности $R = 40$ *см*. Движение равноускоренное с ускорением a_τ=0.173 м/с^2. Определить угол между векторами полного ускорения и скорости точки к концу второй секунды движения.

2. Весной куски снега и льда соскальзывают с поверхности крыши здания и падают на землю. Определить безопасное расстояние S от стены здания. Высота крыши $H = 15$ *м*, высота стены здания $h = 10$ *м,* угол наклона крыши α=45°. Трением пренебречь

3. Небольшому телу, находящемуся у основания наклонной плоскости, сообщена скорость v_0=5 м/с , направленная вдоль плоскости. Определить полное время движения тела по наклонной плоскости до исходной точки, если угол наклона плоскости α=30°. коэффициент трения скольжения $m = 0.1$.

4. Однородный стержень длиной $l = 1$ *м* может вращаться относительно горизонтальной оси, проходящей через один из концов стержня. Какую скорость нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы он совершил полный оборот относительно оси вращения? Определить минимальную скорость, которую нужно сообщить материальной точке на легкой нерастяжимой нити длиной l, для того чтобы точка также совершила полный оборот относительно оси.

5. У основания наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α=30°. находится шар. На какую высоту закатится шар вдоль плоскости, если ему сообщить скорость v_0=5 м/с? Какое время он будет двигаться до верхней точки траектории?

6. Два одинаковых цилиндра одновременно начали движение. Один цилиндр падает свободно, второй падает, раскручивая предварительно намотанную тонкую ленту. Свободный конец ленты закреплен. Определить момент времени, когда расстояние между цилиндрами составит $l = 1$ *м.*

7. На каком расстоянии от конца стержня длины l нужно нанести удар по неподвижному

препятствию, чтобы рука, держащая стержень за свободный конец, не чувствовала «отдачи» при ударе?

8. Как изменится сила тяжести на поверхности планеты при увеличении ее радиуса в пять раз, если ее плотность остается неизменной?

9. Какая относительная ошибка будет допущена, если вместо релятивистского определения кинетической энергии, пользоваться классическим? Скорость частицы $v = 0.7c$?

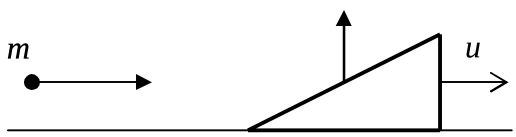
10. Релятивистская частица с энергией e и массой m_1 налетает на покоящуюся частицу массы m_2. Найти скорость центра инерции системы частиц v_c при таком столкновении, а также общую кинетическую энергию этих частиц до столкновения в системе центра инерции

Вариант 12

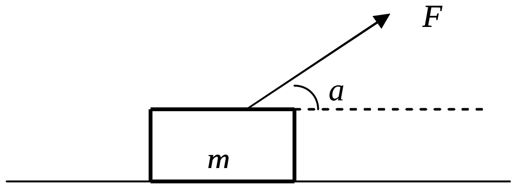
1. На какое максимальное расстояние может быть брошен мяч в спортивном зале высотой $H = 8$ *м*, если он имеет начальную скорость v_0=20 м/с? Под каким углом к горизонту должен быть брошен мяч? (Траектория мяча не касается потолка).

2. Тело начинает в момент времени t=0 движение по прямой согласно закону $x(t)=At+Bt^4$, где A=16 м/с, B=–0.5 м/с^3. Найдите зависимости скорости, ускорения и пути от времени и изобразите их на графиках. Какое расстояние (путь) пройдет тело за 4 с? Чему в этот момент будет равно положение тела на оси x?

3. В клин массы *M*, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, попадает горизонтально летевшая пуля массы m ($m \ll M$) и после абсолютно упругого удара отскакивает вертикально вверх. На какую высоту поднимется пуля после удара, если скорость движения клина после удара v ?



4. Брусок массой m движется с постоянной скоростью вдоль горизонтальной поверхности под действием силы F. Коэффициент трения m. Найти угол a , при котором сила натяжения нити будет минимальной. Чему равно значение этой силы? **ОФ 1.73.**



5. Определить момент инерции прямоугольной пластины массой m , длиной a, шириной b относительно оси, проходящей через центр пластины перпендикулярно ее плоскости.

6. Высота наклонной плоскости $h = 20$ *см*, длина $l = 2$ *м*. За какое время скатятся с вершины плоскости обруч и диск ?

7. На каком расстоянии от поверхности Земли ускорение свободного падения g=2 м/с^2?

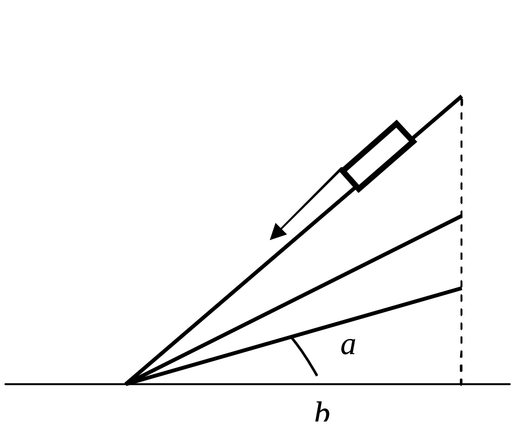
8. Космическая ракета стартует с поверхности Земли и движется к Марсу. Средняя скорость движения ракеты v = *12 км/с*. Расстояние, которое должна пролететь ракета, двигаясь по эллиптической орбите, равно радиусу орбиты Земли вокруг Солнца. На сколько отстанут часы космонавта с точки зрения земного наблюдателя к моменту возвращения ракеты на Землю?

9. Какую разность потенциалов должен пройти электрон в электростатическом поле, чтобы достигнуть скорости v= $0.9c$?

10. При неупругом столкновении частицы, обладающей импульсом $p = mc$ (m- масса частицы), и такой же покоящейся частицы, образуется составная частица. Найти массу составной частицы.

Вариант 13

1. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы высота траектории была равна дальности полета тела?



2. Несколько наклонных плоскостей имеют общее основание b. При каком угле наклона плоскости к горизонту a время соскальзывания тела будет наименьшим ? Трение отсутствует.

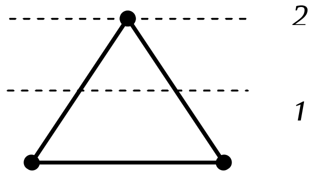
3. Уклон шоссе $h/l=0.05$. Спускаясь под уклон при выключенном двигателе, автомобиль движется равномерно со скоростью *54 км/час*. Какова должна быть мощность двигателя, чтобы автомобиль мог подниматься по этому же уклону с той же скоростью? Масса автомобиля *1.5* т.

4. У ракеты, стартовавшей вертикально вверх с ускорением $a = 4g$, отделилась первая ступень и упала на землю через время $t = 40$ *с* после старта. На какой высоте произошло отделение? Сопротивлением воздуха пренебречь.

5. На однородный цилиндрический вал массы m и диаметра D намотан легкий шнур, к концу которого привязан груз массы m_0. В начальном состоянии система покоится. С каким ускорением будет опускаться груз, если на оси вращения действует сила трения, создающая момент M_{TP}?

6. На покоящийся шар массы m_1 налетает шар массой m_2 со скоростью v_0. Удар центральный и абсолютно упругий. Определить при каком соотношении масс шаров налетающий шар может передать покоящемуся наибольшую энергию.

7. Система состоит из трех материальных точек массой m, расположенных в вершинах равностороннего треугольника. Во сколько раз момент инерции системы относительно оси *2* больше момента инерции относительно оси *1*, проходящей через центр масс системы? Оси расположены в плоскости треугольника.



8. Спутник движется в экваториальной плоскости Земли с востока на запад по круговой орбите радиуса $r = 10000$ *км*. Найти относительно поверхности Земли скорость и ускорение спутника.

9. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу m образовавшейся частицы.

10. Определить импульс частицы, если ее кинетическая энергия равна двойной энергии покоя.

Вариант 14

1. Камень брошен со скоростью v0=10 м/с под углом $a = 30^0$ к горизонту. Найти нормальное и касательное ускорения камня через $Dt = 1.2$ *с* после начала движения. Найти радиус кривизны траектории в этой точке. Найти максимальную высоту траектории и дальность полета камня.

2. Веревка длины *l* лежит на столе так, что часть ее свешивается со стола, и начинает скользить тогда, когда длина свешивающейся части равна *l/4*. Найти коэффициент трения и максимальную скорость движения конца веревки относительно поверхности стола.

3. Чтобы медленно с постоянной скоростью втащить тело массы *m* вверх по наклонной плоскости необходима сила F_1, направленная вдоль плоскости. Чтобы также медленно опустить тело к основанию плоскости необходима сила F_2. Найти коэффициент трения.

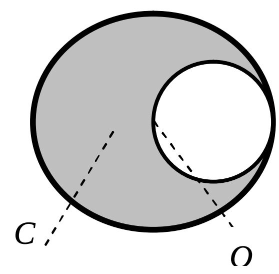
4. Груз положили на пружину, при этом пружина сжалась на $Dx = 4$ *см*. Каким будет наибольшее сжатие пружины, если груз падает на нее с высоты $h = 75$ *см* ?

5. Имеется кольцо из тонкой проволоки радиусом *R* и массой *m*. Найти максимальную силу гравитационного взаимодействия кольца и материальной точки массой m_0, находящейся на оси кольца, проходящей перпендикулярно плоскости кольца через его центр. На каком расстоянии от центра кольца сила имеет максимальное значение?

6. Система противоракетной обороны определила координаты ракеты x_1, y_1 и x_2, y_2 для двух последовательных моментов времени t_1 и t_2. Считая, что сразу после запуска ракета движется как свободное тело и, пренебрегая

сопротивлением воздуха, определить расстояние от точки запуска ракеты до места ее падения.

7. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез радиусом $0.5R$. Масса оставшейся части диска m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, проходящей через геометрический центр диска (точку O) перпендикулярно плоскости диска и относительно оси, проходящей через центр масс диска (точку C).



8. Длина стержня измеряется с точностью $Dl = \pm 0.1$ *мкм*. При какой относительной скорости двух инерциальных систем отсчета можно обнаружить релятивистское сокращение длины стержня, собственная длина которого l_0= 50 см?

9. Две релятивистские частицы движутся в лабораторной системе отсчета со скоростями v_1=0.7c и v_2=0.9c вдоль одной прямой. Найти их относительную скорость если частицы движутся: *а*) в одном направлении; *б)* в противоположных направлениях.

10. При неупругом столкновении релятивистской частицы, обладающей импульсом $p = mc$ и такой же покоящейся частицы, образуется составная частица. Определить кинетическую энергию системы частиц до столкновения и после столкновения.

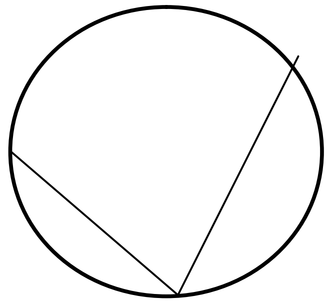
Вариант 15

1. Из одной точки одновременно брошены два тела с одинаковой начальной скоростью v_0=15 м/с под углами α_1=45° и α_2=60° к горизонту. Определить скорости тел, нормальное и касательное ускорение, а также расстояние между телами через *2 сек*. После начала движения.

2. Частица движется вдоль координаты x, при этом зависимость скорости частицы от координаты определяется функцией $v(x) = v_0 - bx$. Найти зависимость $x(t)$, $v(t)$.

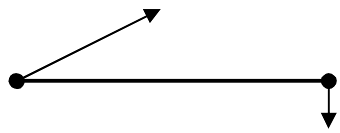
3. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг проходящей через его центр вертикальной оси с частотой ν = *6 об/мин*. На каком расстоянии от оси вращения может удержаться на диске небольшое тело, если коэффициент трения $m = 0.3$?

4. Мячик брошен вверх с начальной скоростью *10 м/с*. Во время движения мячика на него действует сила сопротивления воздуха равная $0.1mg$. Найти максимальную высоту траектории и время движения до момента падения мячика на землю.

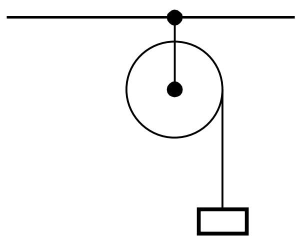


5. Имеются две наклонные плоскости, совпадающие с хордами одной и той же окружности радиуса R. С каждой из них соскальзывает без начальной скорости и без трения небольшое тело. Для какой из плоскостей время соскальзывания больше?

6. На рисунке изображены две частицы одинаковой массы, соединенные жестким стержнем. Могут ли быть скорости частиц такими, как на рисунке? Вектора скоростей и частицы лежат в одной плоскости.



7. Блок радиуса R может вращаться вокруг своей оси с трением, характеризуемым моментом M_{TP}. На блок намотана легкая нить, к концу которой подвешен груз массы m. Найти момент импульса всей системы $L(t)$ относительно оси блока через время t после начала движения.



8. Имеется полубесконечный тонкий стержень с линейной плотностью (массой на единицу длины) равной l. На продолжении оси стержня на

расстоянии a от его конца находится частица массы m. Найти силу гравитационного взаимодействия стержня и частицы.

9. В системе K', относительно которой покоится стержень, его длина *1 м* и он образует угол α'=45° с осью x'. Определить длину стержня в системе K и угол a с осью x. Относительная скорость систем отсчета v = *0.5с*.

10. С какой скоростью движется релятивистская частица, если ее кинетическая энергия равна удвоенной энергии покоя?

Вариант 16

1. Частица движется со скоростью $\vec{u} = at(2 \cdot \vec{i} + 3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k})$, где a=1 м/с^2. Найти модуль скорости и ускорения частицы в момент времени t = *1с*. Найти путь, пройденный частицей за промежуток времени t_1=*2с*, t_2=*3с*.

2. Лодка пересекает реку с постоянной скоростью (относительно воды) перпендикулярной берегу v=*3 м/с*. Ширина реки b = *63 м*. Скорость течения изменяется по закону $u = u_0 - 4\frac{u_0}{b^2}\left(x - \frac{b}{2}\right)^2$, где x – расстояние от берега; u_0=5 м/с Найти расстояние, на которое река снесет лодку во время переправы.

3. Космический корабль, имеющий лобовое сечение S=50 м^2 и скорость v=*10 км/с*, попадает в облако микрометеоритов, плотность которых составляет 10 частиц в кубическом метре. Масса каждого микрометеорита m = *0.02 г*. На сколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля не изменилась? Удар микрометеорита об обшивку корабля абсолютно неупругий.

4. Какой путь пройдет тело, имеющее начальную скорость v_0, при подъеме по наклонной плоскости с углом наклона a, если известно, что на горизонтальном участке пути с тем же трением, тело, имеющее такую же начальную скорость, проходит путь l?

5. Горизонтально летящая пуля массы m попадает в свинцовый шар, лежащий на горизонтальной плоскости. Начальная скорость пули v_1, скорость пули после вылета из шара v_2, масса шара M. Какая часть энергии пули перейдет в тепло? Трением шара с плоскостью пренебречь. Траектория пули проходит через центр шара.

6. На вертикальной оси укреплена горизонтальная штанга, по которой могут свободно перемещаться два груза массами m_1 и m_2, связанные нитью длины l. Система приводится во вращение с угловой скоростью w. На каком расстоянии от оси вращения системы будет находиться каждый из грузов? Чему при этом равно натяжение нити?

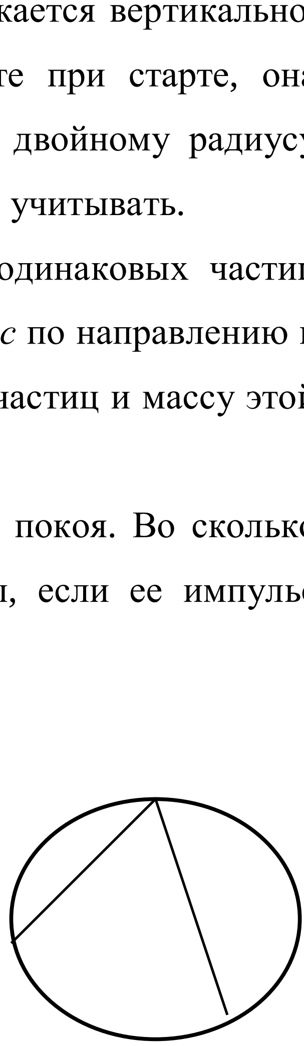
7. С наклонной плоскости одновременно начинают скатываться без проскальзывания обруч и скользить брусок. При каком коэффициенте трения между бруском и плоскостью оба тела двигаются, не обгоняя друг друга? Угол наклона плоскости a.

8. Ракета установлена на поверхности Земли и запускается вертикально. При какой минимальной скорости, сообщенной ракете при старте, она удалится от поверхности Земли на расстояние равное двойному радиусу Земли? Изменение массы ракеты в процессе движения не учитывать.

9. В лабораторной системе отсчета одна из двух одинаковых частиц массой m покоится, другая движется со скоростью $v=0.6c$ по направлению к покоящейся. Найти в системе центра инерции скорость частиц и массу этой системы частиц.

10. Кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя. Во сколько раз возрастет кинетическая и полная энергия частицы, если ее импульс увеличится в 4 раза?

Вариант 17

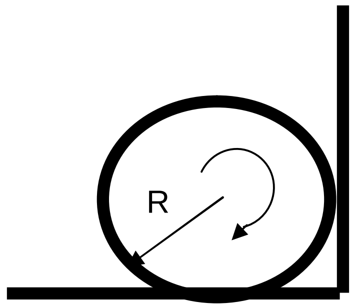


1. Камень бросают горизонтально с горы, уклон которой равен a. Определить, с какой скоростью был

брошен камень, если он упал на склон на расстоянии L от точки бросания?

2. Из точки A, лежащей на верхнем конце вертикального диаметра некоторой окружности, по наклонным плоскостям, установленным вдоль разных хорд, начинают скользить грузы. Через какое время грузы достигнут окружности? Как это время зависит от угла наклона хорды с вертикалью? Трением пренебречь.

3. Однородный цилиндр радиуса R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и поместили затем в угол. Коэффициент трения между стенками угла и цилиндра равен k. Сколько оборотов сделает цилиндр до остановки? **ОФ 1.295**.



4. Два тела с массами m_1 и m_2 лежат на гладкой горизонтальной плоскости и связаны между собой нитью, способной выдерживать нагрузку T_0. Определить максимальную силу, с которой можно тянуть за первый груз, чтобы нить не оборвалась. Изменится ли величина этой силы, если тянуть за второй груз?

5. Вверх по наклонной плоскости с постоянной скоростью v поднимается тело массы m под действием силы, направленной вдоль плоскости. При каком угле наклона плоскости затрачиваемая мощность будет максимальна? Какое значение этой мощности? Коэффициент трения $m = 0{,}5$.

6. Какую работу нужно совершить, чтобы длинную доску, лежащую на земле и закрепленную на одном конце, повернуть, не отрывая от земли, вокруг закрепленного конца на угол a? Длина доски l, масса m, коэффициент трения о поверхность земли m.

7. Внутри камеры автомобильного колеса находится небольшое тело. Радиус колеса $R = 0.4$ *м*. При какой минимальной скорости автомобиля тело будет вращаться вместе с колесом?

8.Определить коэффициент жесткости системы двух пружин при их последовательном и параллельном соединении. Жесткость каждой пружины k_1 и k_2 соответственно.

9.Нейтрон с кинетической энергией $T = 2mc^2$ налетает на другой покоящийся нейтрон. Найти в системе центра инерции общую кинетическую энергию нейтронов и импульс каждого нейтрона.

10. Определить скорость движения частицы, если ее кинетическая энергия составляет 99% ее энергии покоя.

Вариант 18

1. Шарик с высоты $h = 2$ *м* вертикально падает на наклонную плоскость и упруго отражается. При каком расстоянии от места падения он снова ударится о ту же плоскость? Угол наклона плоскости к горизонту α=30°.

2. Лодка длиной $l = 3$ *м* и массой $m = 120$ *кг* стоит на спокойной воде озера. На носу и корме лодки находятся два рыбака массами m_1=60 кг и m_2=90 кг. На сколько сдвинется лодка относительно дна озера, если рыбаки поменяются местами?

3. Шар, двигавшийся горизонтально, столкнулся с неподвижным шаром и передал ему *64%* своей кинетической энергии. Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Во сколько раз масса второго шара больше массы первого?

4. Двум одинаковым маховикам, находящимся в покое, сообщили одинаковую частоту вращения $\nu = 10$ *об/с* и предоставили их самим себе. Под действием сил трения один маховик остановился через одну минуту, а второй сделал до полной остановки 360 оборотов. У какого маховика тормозящий момент больше и во сколько раз?

5. Определить работу растяжения двух соединенных последовательно пружин с коэффициентами жесткости k_1=400 Н/м и k_2=250 Н/м, если первая пружина растянулась при этом на $\Delta l_1 = 2\ см$.

6. Платформа в виде диска диаметром *3 м* и массой m_1=180 кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью будет вращаться эта платформа, если по ее краю пойдет человек массой m_2=70 кг со скоростью v= *1.8 м/с* относительно платформы?

7. Определить линейную скорость и период обращения спутника Земли, обращающегося по круговой орбите на высоте *H = 1000 км.*

8. Какая работа будет совершена силами гравитационного поля при падении на Землю тела массой *1 кг* с высоты *H = 1000 км*?

9. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы он пробрел скорость v = *0.75c*?

10. При *b* распаде ядра атома кобальта Co^{60} испускается электрон с энергией *T = 250 кэв* и антинейтрино. При этом образуется дочернее ядро никеля Ni^{60}. Пренебрегая энергией и импульсом антинейтрино, определить скорости движения электрона и дочернего ядра после распада. Массу ядра никеля принять равной $60m_p$, где m_p- масса протона.

Вариант 19

1. Два шарика брошены с одинаковыми скоростями из одной точки вертикально вверх, один через *Dt = 1 с* после другого. Они столкнулись в воздухе через *T = 2 с* после вылета первого шарика. Определить начальную скорость шариков. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Двойная звезда имеет период обращения *T = 3 года,* а расстояние между ее компонентами *L =2 а. е.* (а. е. - астрономическая единица, равная радиусу орбиты Земли вокруг Солнца). Найти массу двойной звезды. (*Указание*: воспользоваться системой центра масс).

3. Небольшому телу, находящемуся в нижней точке наклонной плоскости сообщена начальная скорость вдоль плоскости. Время подъема тела в 2 раза меньше времени спуска до исходной точки. Угол наклона плоскости α=15°. Найти коэффициент трения.

4. Небольшой шарик, подвешенный на легкой нити, отводится в сторону так, что нить образует прямой угол с вертикалью, и затем отпускается. Найти полное ускорение шарика и силу натяжения нити как функцию угла отклонения нити от вертикали.

5. Небольшой шарик на легкой нерастяжимой нити движется по окружности в вертикальной плоскости. Найти массу шарика, если максимальное натяжение нити на *DF =2,5 Н* больше минимального.

6. К точке, радиус-вектор которой относительно начала координат равен $\vec{r} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, приложена сила $\vec{F} = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j}$ (*a, b, A, B – const)*, $\vec{i}, \vec{j}$ - орты осей *X,Y*. Найти момент силы и плечо действия силы относительно начала координат.

7. В результате изменения климатических условий на Земле возможно полное таяние полярных льдов. Приведет ли этот процесс к изменению времени суточного вращения Земли? Результат обосновать.

8. Найти период обращения спутника, движущегося вокруг некоторой планеты, вблизи ее поверхности, если средняя плотность вещества планеты ρ=3.3 г/см^3.

9. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями v_1=0.5c и v_2=0.75c по отношению к лабораторной системе отсчета. Найти скорость сближения частиц в лабораторной системе отсчета и относительную скорость частиц.

10. Какова должна быть кинетическая энергия протона, налетающего на другой, покоящийся протон, чтобы их суммарная кинетическая энергия в системе центра инерции была такой же, как у двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями *К = 25 Гэв.*

Вариант 20

1. Под каким углом к горизонту нужно установить ствол орудия, чтобы поразить цель, находящуюся на расстоянии $l = 10$ *км,* Если начальная скорость снаряда v_0=500 м/с? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Частица движется по радиусу вращающегося диска со скоростью $v=3$ *м/с*. Угловая скорость вращения диска $w = 20$ *рад/с*. В начальный момент времени частица находится в центре диска. Найти приближенное значение пути, пройденного частицей в неподвижной (лабораторной) системе отсчета за время с момента t_1=9 с до момента t_2=10 с.

3. Шарик массой $m = 100$ *г* брошен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=10$ *м/с*. При движении шарика на него действует сила сопротивления воздуха, равная 0.1 силы тяжести. Найти максимальную высоту траектории и полное время движения шарика до момента падения на землю.

4. За какое время тело массы m соскользнет с наклонной плоскости высотой h и углом наклона b, если по наклонной плоскости с углом наклона a оно движется вниз равномерно?

5. Шарик для игры в пинг-понг радиусом $R = 15$ *мм* и массой $m = 5$ *г*, погружен в воду на глубину $h = 30$ *см*. Когда шарик отпустили, он выпрыгнул из воды на высоту $H = 10$ *см*. Какая энергия при этом перешла в тепло вследствие трения шарика о воду?

6. Санки, движущиеся горизонтально по льду со скоростью $v=6$ *м/с*, выезжают на асфальт. Длина полозьев саней $l = 2$ *м*, коэффициент трения об асфальт $m = 1$. Какой путь пройдут сани по асфальту до остановки?

7. Тонкий стержень длины $l = 1$ *м* и массы $m = 0.6$ *кг* может вращаться вокруг перпендикулярной к нему горизонтальной оси, отстоящей от центра стержня на расстояние $a = 10$ *см*. Стержень приводится в горизонтальное положение и отпускается с нулевой начальной скоростью. Определить

угловую скорость ω и силу давления F на ось в момент прохождения стержнем положения равновесия.

8. Радиус орбиты Земли при ее вращении вокруг Солнца $R_З \approx 150 \times 10^6$ *км*, а радиус орбиты Марса $R_М \approx 230 \times 10^6$ *км*. Найти период обращения Марса вокруг Солнца.

9. Площадь поверхности куба в неподвижной системе отсчета S_0. Определить площадь поверхности тела в системе отсчета K', движущейся в направлении одного из ребер куба со скоростью $u = 0.96c$.

10. Релятивистская частица массы m начинает двигаться под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{F}$. Найти зависимость от времени импульса частицы $\vec{p}$ и скорости частицы v.

Вариант 21

1. Чему равен угол между векторами $\boldsymbol{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ и $\boldsymbol{b}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-6\mathbf{k}$**?**
2. Точка движется прямолинейно со скоростью $V=V_0+At^3$, где $V_0=16$ м/с, $A=-2$ м/с^4. В момент времени t=4 с определить: а) скорость точки V; б) ускорение точки a; в) перемещение точки Δx; г) путь s, пройденный точкой к этому моменту времени. Качественно изобразить на графике временные зависимости V(t), a(t); Δx(t), s(t). В начальный момент времени точка находилась в начале координат.
3. Футболист забивает гол с расстояния L=10 метров, посылая мяч точно под перекладину. Какую минимальную энергию в этом случае нужно сообщить мячу? Чему в этом случае будет равна начальная скорость мяча? На какую максимальную высоту поднимется мяч? Где будет находиться наивысшая точка траектории мяча- перед воротами, точно под верхней перекладиной, за воротами? Масса мяча m=0.5 кг, высота ворот h=2.5 м.
4. Тело массы m_1 налетает с некоторой скоростью на покоящееся тело большей массы m_2. Удар прямой, абсолютно упругий. Каково должно

быть соотношение масс двух тел m_2/m_1, чтобы скорости двух тел после столкновения были одинаковы по абсолютной величине?

5. Снаряд выпущен из зенитного орудия вертикально вверх со скоростью v_0= 800 м/с. Из-за сопротивления воздуха его ускорение зависит от времени следующим образом: $a(t)=-3g\exp(-kt)$, где g- ускорение свободного падения, $k=0.025 c^{-1}$-коэффициент учитывающий сопротивление воздуха. Найти зависимость от времени скорости снаряда v(t).Через какое время t снаряд достигнет высшей точки?
6. Альфа-частица с кинетической энергией 10 МэВ рассеивается на неподвижном протоне. Угол рассеяния равен 60°. Определить: а) импульс, полученный протоном в результате рассеяния: б) прицельный параметр; в) минимальное расстояние, на которое альфа частица подойдет к протону. Масса альфа частицы равна четырем протонным массам. При решении задачи использовать формулу Резерфорда, связывающую прицельный параметр b и угол рассеяния θ: $tg\frac{q}{2}=\frac{qq_0}{2bK}$, где q- заряд неподвижной частицы, q_0- заряд налетающей частицы, K-кинетическая энергия налетающей частицы.
7. Маховик, момент инерции которого равен 40 кгм^2 начал вращаться равноускоренно из состояния покоя под действием момента силы M=20 Нм. Вращение продолжалось 10 с после чего вращающий момент сил уменьшили вдвое. В момент времени t=15 с определить: а) частоту вращения маховика; б) число оборотов, совершенных маховиком за это время; в) его кинетическую энергию.
8. Спутник, двигавшийся по круговой орбите вблизи поверхности Земли, распался в результате взрыва на два осколка одинаковой массы. Один осколок непосредственно после взрыва остановился, другой продолжил движение. По какой траектории (замкнутой или незамкнутой) будет двигаться второй осколок?

9. Релятивистская частица- протон влетает в конденсатор вдоль его оси x со скоростью v_x=0.8c. В конденсаторе на протон в направлении y действует постоянное электрическое поле E. Какое время понадобится протону, чтобы пролететь конденсатор? Длина пластин конденсатора L=10 см.
10. Релятивистская частица массы m с кинетической энергией K налетает на покоящуюся частицу той же массы. Найти кинетическую энергию их относительного движения, импульс каждой частицы в Ц-системе и скорость этой системы.

Вариант 22

1 Вычислите модуль разности двух одинаковых векторов ***a***, угол между которыми равен α.

2 Две частицы, 1 и 2, движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения O. В момент t=0 частицы находились на расстояниях l_1, и l_2, от точки O. Через сколько времени после этого расстояние между частицами станет наименьшим? Чему оно равно? Задачу решить в системе отсчета, связанной с Землей и в системе отсчета, связанной с одной из частиц.

3. Определить радиус кривизны в начале и в вершине траектории тела, брошенного со скоростью V_0 под углом α к горизонту.
4. Тело массы m=100 г находится первоначально в состоянии покоя в начале координат. В момент t=0 в положительном направлении оси *x* на него начинает действовать сила $F=F_0e^{-t/T}$, где F_0=1.5 Н, T=10 с. В момент t=T действие силы прекращается. Определить: а) скорость тела в этот момент времени; б) расстояние тела от начала координат.
5. Из глубины Вселенной к Земле со скоростью v_0=20 км/с приближается астероид, масса которого m=100 т. Прицельный параметр астероида равен пяти земным радиусам. Столкнется ли астероид с Землей? Радиус Земли $R_з$=6400 км.

6. Частица 1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти вектор ее скорости **v** и модуль v, если масса частицы 2 в η= 2,0 раза больше, чем частицы 1, а их скорости перед столкновением $\mathbf{v}_1$=2**i** + 3**j** и $\mathbf{v}_2$ = 4**i**–5**j**, где компоненты скорости даны в СИ. **(ОФ 1.120/1.125)**
7. Момент импульса частицы относительно точки О меняется со временем по закону **M**=**a**+**b**t^2, где **a** и **b** -постоянные векторы, причем **a**⊥**b**. Найти относительно точки О момент **N** силы, действующей на частицу, когда угол между векторами **N** и **M** окажется равным 45°.**(ОФ 1.196/1.216)**
8. Релятивистская частица массы m с кинетической энергией К налетает на покоящуюся частицу той же массы. Найти кинетическую энергию их относительного движения, импульс каждой частицы в Ц-системе и скорость этой системы. **(КВФ 9.3)**
9. Релятивистский электрон со скоростью v_0=0.9c влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора. Скорость v_0 направлена параллельно пластинам. Между пластинами действует электрическое поле E=10 мкВ/см, направленное вниз (см. рис. Примера IX.1). Расстояние между пластинами d=1 см. длина пластин L=5 см. На расстоянии l_0=2 см от правого края конденсатора расположен экран. Найти смещение Δy электрона на экране от осевой линии. Действием силы тяжести пренебречь.
10. Найти минимальное расстояние, на которое протон с кинетической энергией T=0,87 МэВ приблизится к покоящемуся ядру атома ртути при рассеянии на угол θ=90°. Сравнить это расстояние с соответствующим значением прицельного параметра. **(КВФ 1.86).** При решении задачи использовать формулу Резерфорда, связывающую прицельный параметр *b* и угол рассеяния θ: $tg\frac{q}{2}=\frac{qq_0}{2bK}$, где q- заряд неподвижной частицы, q_0- заряд налетающей частицы, К- кинетическая энергия налетающей частицы

Вариант 23

1. Докажите, что: а) $\frac{dr}{d\vec{r}}=\frac{\vec{r}}{r}$; б) $\frac{dr}{dt}=\frac{(\vec{r}\vec{v})}{r}$; в) $\frac{df(r)}{dt}=\frac{df}{dr}\frac{\vec{r}\vec{v}}{r}$ где $r=\sqrt{x(t)^2+y(t)^2+z(t)^2}$ -расстояние точки от начала координат, v- скорость точки, $f(r)$ - произвольная скалярная функция.
2. Точка движется по оси x, при этом координата меняется по закону x=Acos(2πt/T). Нарисовать качественные зависимости координаты x(t), скорости v(t) и ускорения a(t) на временном промежутке 0<t<T, Найти: а) путь S_1, пройденный точкой за промежуток времени 0<t<T/8; б) путь S_2, пройденный точкой за промежуток времени 0<t<T.
3. Определить радиус кривизны траектории точки в начале движения и через t_0 секунд, если она движется по закону: x=bt, y=ct^2.
4. Поезд массой 100 т, движущийся со скоростью 100 км/час начинает тормозить. Через какое время после начала торможения скорость поезда уменьшится в два раза, если сила торможения меняется по закону F(t)=kt, где k=10 Н/с? Какое расстояние пройдет поезд за это время?
5. Ракета массой m=10 т пущена с Земли под углом α=45° к горизонту с начальной скоростью v_0=10 км/с. Найти: а) полную энергию ракеты и ее момент импульса относительно центра Земли; б) скорость ракеты на расстоянии равном 2R от поверхности Земли. Радиус Земли R=6400 км, ускорение силы тяжести на поверхности Земли g=10 м/с^2.
6. На массивную стенку массы M, движущуюся со скоростью V, налетает со скоростью v_0 шарик массы m, причем вектор скорости шарика направлен по нормали к поверхности стенки. Масса стенки много больше массы шарика. С какой скоростью v_1 шарик отскочит от стенки? *Указание*: задачу решить двумя способами- в системе центра масс и в лабораторной системе.
7. Шарик массы m бросили под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти модуль момента импульса шарика относительно

точки бросания в зависимости от времени движения. Вычислить M в вершине траектории, если m=130 г, α =45° и v_0=25м/с. Сопротивлением воздуха пренебречь. **(ОФ 1.197/1.217)**

8. Какую кинетическую энергию необходимо сообщить протону, налетающему на покоящийся протон, чтобы кинетическая энергия их относительного движения была такой же, как при столкновении двух протонов, движущихся навстречу друг другу с кинетическими энергиями K=30 ГэВ? **(КВФ 9.4)**

9. Электрон, имеющий скорость 5×10^6 м/с, влетает в электрическое поле напряженностью 1000 Н/Кл, которое совпадает по направлению с начальной скоростью электрона. (а) Какое расстояние пролетит электрон в этом поле до остановки? (б) Какое для этого потребуется время? (в) Предположим, что через 10 мм электрическое поле скачком обращается в нуль. Какую часть первоначальной кинетической энергии потеряет электрон, пройдя это расстояние?

10. Альфа-частица с кинетической энергией K_0=1,0 МэВ упруго рассеялась на покоившемся ядре ^{6}Li. Определить кинетическую энергию ядра отдачи, отлетевшего под углом θ = 30° к первоначальному направлению движения α-частицы**. (КВФ 8.2)**

Вариант 24

1. Докажите следующие векторные тождества: 1**.** **(A´(B´C))=B(AC)-C(AB);** 2. **(A-B)×(A+B)=2(A×B)**.

2 Ракета, запущенная вертикально вверх, поднимается с постоянным ускорением 20 м/с^2 в течение 1.0 мин. За это время ее топливо полностью выгорает и далее ракета двигается как свободно летящее тело. (а) На какую максимальную высоту поднимется ракета? (б) Через какое время после запуска ракета упадет на землю? (зависимостью g от высоты пренебречь).

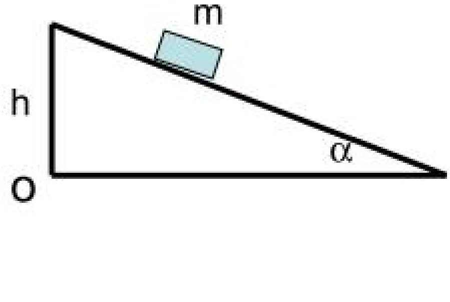
3 Частица, которая первоначально покоилась, прошла за время t_0=10с половину окружности радиуса R=160 см. Вычислить соответствующие этому промежутку времени значения: а) пути S и модуля вектора перемещения $|\Delta\vec{r}|$; б) среднего модуля скорости (или среднюю путевую скорость) <V>; в) модуля среднего вектора скорости (или модуль средней скорости перемещения) $|<\vec{V}>|$; г) модуль среднего вектора полного ускорения $|<\vec{a}>|$, если частица двигалась с постоянным тангенциальным ускорением.

4 Под действием некоторой силы F тело массой m=2 кг начинает в момент времени t_0=0 движение по оси x по закону $x(t)=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где A=1 м, B=–2 м/с, C=6 м/с^2, D=–1 м/с^3. В момент времени t_0=2 с найти: а) силу, действующую на тело; б) мощность P(t), развиваемую этой силой; в) работу совершенную силой F над телом за это время; г) путь, пройденный телом за 2 секунды.

5 Спутник, вращаясь по круговой орбите радиуса R=1.5 $R_З$ ($R_З$=6400 км-радиус Земли) получает с помощью тормозного двигателя импульс, который направлен вдоль траектории его движения в направлении его скорости. Какую дополнительную скорость v приобрел спутник, если в результате полученного импульса радиус его орбиты увеличился на 20%?

6 Ствол пушки направлен под углом θ = 45° к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в η= 50 раз меньше массы пушки, v_0=180 м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса ее освободить. **(ОФ 1.121/1.126)**

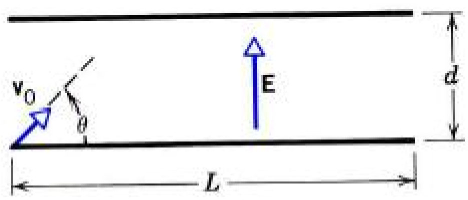
7 Небольшая шайба массы m=50 г начинает скользить с вершины гладкой наклонной плоскости, высота которой h= 100 см и угол наклона к горизонт) α = 15° (см. рис.). Найти модуль момента импульса шайбы относительно оси O,



перпендикулярной плоскости рисунка, через t=1,3 с после начала движения. **(ОФ 1.198/1.218)**

8 Позитрон с кинетической энергией, равной его энергии покоя, аннигилирует на покоящемся свободном электроне. В результате возникают два γ-кванта, энергия одного из которых в η= 2,00 раза больше энергии другого. Вычислить угол θ между направлениями разлета обоих γ-квантов. **(КВФ 9.9)**

9 Электрон влетает в пространство между двумя пластинами так, как показано на Рис. Скорость электрона v_0=5.83×10^6 м/с. Угол влета θ=39.0°; d=1.97 см, L=6.20 см. Электрическое поле E=1870 Н/Кл и направлено вертикально вверх. Попадет ли электрон на какую-либо из пластин? Если да, то на какую пластину он попадет и на каком расстоянии от левого края?



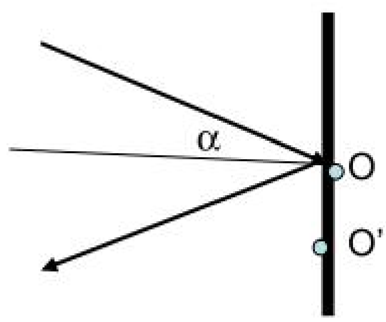
10 Найти кинетическую энергию налетающей α-частицы, если в результате упругого рассеяния ее на дейтроне угол между направлениями разлета обеих частиц θ=120° и энергия которую приобрел дейтрон, K_d = 0,40 МэВ. **(КВФ 8.3)**

Вариант 25

1. Радиус-вектор точки А относительно начала координат меняется со временем по закону $\mathbf{r}=\alpha t\mathbf{i}+\beta t^2\mathbf{j}$, Найти: а) уравнение траектории точки y(x); изобразить ее график; в) зависимость от времени угла φ между векторами **r** и d**r**/dt.
2. Парашютист первые 52.0 м пролетает, не раскрывая парашют. Когда парашют открывается, парашютист летит с замедляющим ускорением 2.10 м/с^2 и приземляется со скоростью 2.90 м/с. Найти: (а) сколько

времени парашютист будет падать? (б) С какой высоты он прыгнул? На начальной стадии полета сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Небольшое тело бросили под углом к горизонт с начальной скоростью V_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) перемещение тела как функцию времени $\mathbf{r}(t)$; б) средний вектор скорости $\langle \mathbf{V} \rangle$ за первые t секунд и за все время движения.
4. Частица массы m в момент t=0 начинает двигаться под действием силы $F=F_0\sin\omega t$, где F_0 и ω- постоянные. Найти путь, пройденный частицей в зависимости от t. Изобразить примерный график этой зависимости.
5. На какое максимальное расстояние от Земли удалится тело массой m=100 т, запущенное с ее поверхности с первой космической скоростью под углом 45° к горизонту? Чему будет равна полная механическая энергия такого тела?
6. В момент, когда скорость падающего тела составила v_0 =4,0 м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью v = 5,0 м/с каждый. Найти скорость третьего осколка сразу после разрыва. **(ОФ /1.129)**
7. Шайба А массы m, скользя по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v, испытала в точке О (см. рис. вид сверху) упругое столкновение с гладкой неподвижной стенкой. Угол между направлением движения шайбы и нормалью к стенке равен α. Найти: а) точки, относительно которых момент импульса М шайбы остается постоянным в этом процессе; б) модуль приращения момента импульса шайбы относительно точки О', которая находится в плоскости движения **(ОФ 1.199/1.219)**



8. Пи-мезон с кинетической энергией K_π = 50 МэВ распался на лету на мюон и нейтрино. Под каким углом к направлению движения π-мезона вылетел мюон, если угол вылета нейтрино равен 90° относительно направления движения π- мезона?**(КВФ 9.28)**
9. Протон, ускоренный разностью потенциалов U, попадает в момент t = 0 в однородное электрическое поле плоского конденсатора, длина пластин которого в направлении движения равна *l.* Напряженность поля меняется во времени как $E = \varepsilon t$, где ε- постоянная. Считая протон нерелятивистским, найти угол между направлениями его движения до и после пролета конденсатора. Краевыми эффектами пренебречь.
10. Нерелятивистская частица массы *m* с кинетической энергией *K* испытала упругое рассеяние на первоначально покоившемся ядре массы М. Найти в Ц-системе импульс каждой частицы и их суммарную кинетическую энергию. **(КВФ8.1)**

Вариант 26

1. Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 с радиус-вектором $\mathbf{r}_1=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ в точку 2 с радиус-вектором $\mathbf{r}_2=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$. Найти: а) вектор $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$; б) расстояние между этими точками 1 и 2; в) угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$.
2. Тело начинает в момент времени t=0 движение по прямой согласно закону $x(t)=At+Bt^4$, где A=16 м/с, B=–0.5 м/с^3. Найдите зависимость скорости и ускорения от времени и изобразите их на графиках. Какое расстояние (путь) пройдет тело за 4 с? Чему в этот момент будет равно положение тела на оси x?
3. Тело бросили с поверхности Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: а) время движения; б) максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета; при каком значении угла α они

будут равны друг другу? в) уравнение траектории y(x), где y и x - перемещения тела по вертикали и горизонтали соответственно; г) тангенциальное и нормальное ускорение в момент удара о землю.

4. Брусок массой m втаскивают за нить с постоянной скоростью на неподвижно закрепленный клин с углом α у основания. Коэффициент трения равен k. Найти угол β между нитью и поверхностью клина, при котором натяжение нити минимально.
5. Ракета массой m=10 т пущена с Земли вертикально с начальной скоростью v_0=10 км/с. Найти: а) скорость ракеты на расстоянии от поверхности Земли равном ее радиусу; б) максимальное расстояние, на которое ракета может удалиться от Земли; в) полную энергию ракеты. Радиус Земли R=6400 км, ускорение силы тяжести на поверхности Земли g=10 м/с^2.
6. Снаряд, выпущенный со скоростью v_0=100 м/с под углом α = 45° к горизонту, разорвался в верхней точке O траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю под точкой O со скоростью v_1 = 100 м/с. С какой скоростью упал на землю второй осколок? **(ОФ 1.124/1.130)**
7. Однородный шар массы m и радиуса R начинает скатываться без скольжения по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Найти зависимость от времени момента импульса шара относительно точки касания в начальный момент. Как изменится результат в случае абсолютно гладкой наклонной плоскости? **(ОФ 1.210/1.231)**
8. На покоящуюся частицу массы m_1 налетает частица массы m_2, кинетическая энергия которой равна K_2. После столкновения частицы слипаются и движутся как целое. Найти массу M образовавшейся частицы. При каких условиях эта масса приблизительно равна сумме

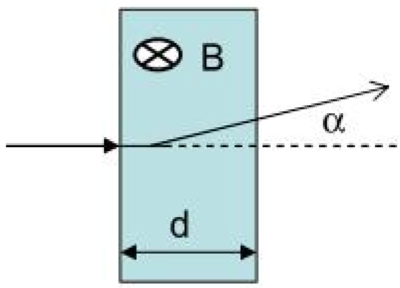
масс исходных частиц? Найти скорость V образовавшейся частицы. **(МФТИ 8.38)**

9. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле напряженности E= 10 кВ/см. Через сколько времени после начала движения кинетическая энергия электрона станет равной его энергии покоя?
10. α- частица (Z_α=2) с начальной кинетической энергией K_α=5.7 МэВ рассеивается на *первоначально* неподвижном ядре золота (Z_{Au}=79). Прицельный параметр $b=0.5\times10^{-13}$м. На какое минимальное расстояние α- частица приблизится к ядру? Чему равна начальная скорость α- частицы v_0 и ее скорость v_1 в точке минимального сближения?

Вариант 27

1. Некоторый вектор **A** меняется со временем по закону $\mathbf{A}=\mathbf{a}+\mathbf{b}t^2$, где **a** и **b** - постоянные векторы и перпендикулярны друг к другу. Найти вектор $\mathbf{B}=d\mathbf{A}/dt$, в момент, когда угол между векторами **A** и **B** окажется равным 45°.
2. В момент времени t=0 частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем по закону $v(t)=v_0\exp(-t/\tau)]$, где v_0- начальная скорость v_0= 10 см/с, τ=5с. Найти: а) время движения частицы до остановки; б) зависимость скорости частицы от пройденного пути; в) полный путь, пройденный частицей за все время движения.
3. Под каким углом к горизонту надо бросить шарик, чтобы: а) радиус кривизны начала его траектории был в η = 8 раз больше, чем в вершине; б) центр кривизны вершины траектории находился на земной поверхности?

4. На гладкой горизонтальной плоскости лежит доска массой m_1 и на ней брусок массой m_2. Коэффициент трения между бруском и доской равен k. К бруску приложили горизонтальную силу, увеличивающуюся со временем по закону $F=\beta t$, где β- постоянная. Найти зависимость от t ускорений доски a_1 и бруска a_2. Нарисовать примерные графики этих зависимостей.
5. На какое расстояние от Земли удалится тело массой m=100 т, запущенное с ее поверхности с первой космической скоростью под углом 90° к горизонту, то есть, по вертикали к поверхности? Чему будет равна полная механическая энергия такого тела ?
6. Две одинаковые тележки 1 и 2, на каждой из которых находится по одному человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, с каждой из них на другую перепрыгнул человек в направлении перпендикулярно движению тележек. В результате тележка 1 остановилась, а скорость тележки 2 стала v. Найти первоначальные скорости тележек v_1 и v_2, если масса каждой тележки (без человека) M, а масса каждого человека m. **(ОФ 1.127/1.133)**
7. На массивный неподвижный блок радиуса R намотана нить, к свободному концу которой подвешено небольшое тело массы m. В момент t = 0 систему предоставили самой себе, и она пришла в движение. Найти ее момент импульса относительно оси блока в зависимости от t. **(ОФ 1.208/1.229)**
8. При распаде некоторой частицы появляются две частицы с массами m_1 и m_2. Из опыта известны абсолютные величины импульсов p_1 и p_2 этих частиц и угол θ между направлениями их разлета. Найти массу распавшейся частицы. **(МФТИ 8.39)**
9. Протон, ускоренный разностью потенциалов U = 500 кВ, пролетает поперечное

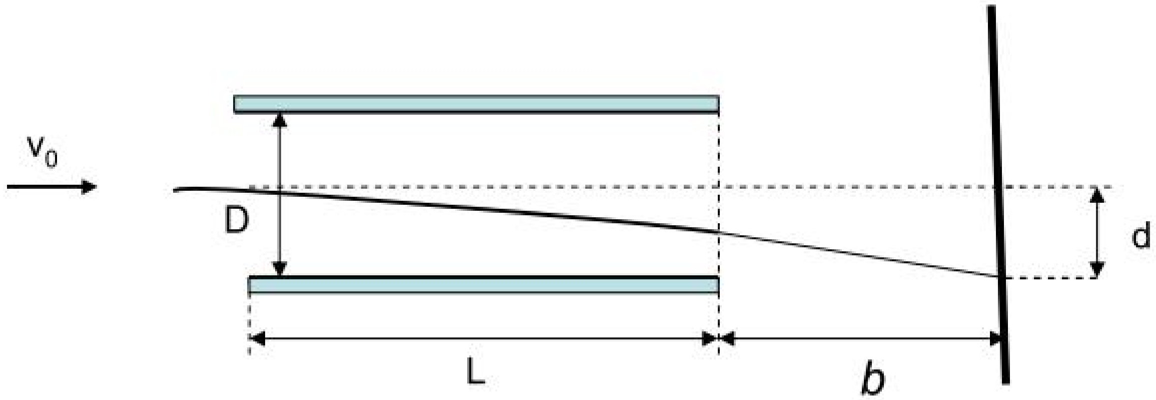


однородное магнитное поле с индукцией В -= 0,51 Тл. Толщина области с полем d=10 см (см. рис.). Найти угол α отклонения протона от первоначального направления движения.

10. Нерелятивистский нейтрон упруго рассеялся под углом θ_1„ на покоившемся ядре нуклида ^{4}He, в результате чего последнее отлетело под углом θ_2 = 60° к направлению движения налетающего нейтрона. Определить угол θ_1 **(КВФ 8.8).**

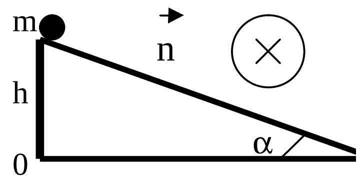
Вариант 28

1. Найдите какой-либо вектор **c,** перпендикулярный векторам ***a***=3**i**+4**j** и ***b***=2**i**+3**j**-6**k?**
2. Снаряд выпущен из зенитного орудия вертикально вверх со скоростью v_0= 800 м/с. Из-за сопротивления воздуха его ускорение зависит от времени следующим образом: a(t)=–3ge^{-kt}, где g- ускорение свободного падения, k=0.025с$^{-1}$-коэффициент учитывающий сопротивление воздуха. Найти зависимость от времени скорости снаряда v(t).Через какое время t снаряд достигнет высшей точки и на какую высоту он поднимется?
3. В горизонтально расположенную трубу длиной L по осевой линии влетает шарик массы m со скоростью V_0. Расстояние от второго конца трубы до стенки равно b (см. рис.). Определить: (а) минимальный диаметр трубы D, при котором камень вылетит из нее; (б) расстояние d от осевой линии до точки столкновения камня со стенкой; (в) радиус кривизны



траектории R_B в точке вылета из трубы.

4. Тело массой m (размерами тела пренебречь) начинает скользить без трения с вершины наклонной плоскости высотой h с углом при основании α (см. рис.). Найти выражение для момента импульса L(t) относительно точки 0. Направление нормали n показано на рисунке.



5. Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в 2,5 раза больше радиуса Земли. Найти: а) полную механическую энергию спутника; б) дополнительную скорость, которую надо кратковременно сообщить кораблю в направлении от центра Земли по ее радиусу, чтобы он смог покинуть поле тяготения Земли.

6. Две одинаковые тележки движутся друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью $\mathbf{v}_0$. На задней тележке находится человек массы m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью **u** относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого. **(ОФ 1.128/1.134**

7. Система состоит из двух частиц масс m_1 и m_2. В некоторый момент их радиусы-векторы r_1 и r_2,, а скорости соответственно v_1 и v_2. Найти собственный момент импульса системы в данный момент. **(ОФ /1.234)**

8. Покоящееся ядро массы M распадается на две части с массами m_1 и m_2. Вычислить кинетические энергии K_1 и K_2 продуктов распада. **(МФТИ 8.40)**

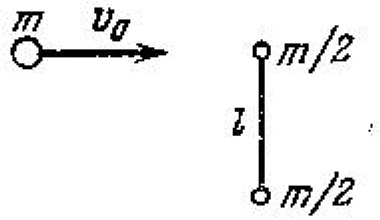
9. Заряженная частица движется по окружности радиуса r = 100 мм в однородном магнитном поле с индукцией B = 10,0 мТл. Найти ее скорость и период обращения, если частицей является: а) нерелятивистский протон; б) релятивистский электрон.

10. Нерелятивистский дейтрон упруго рассеялся на покоившемся ядре под углом 30°. Под таким же углом к направлению движения налетающего дейтрона отлетело и ядро отдачи. Определить массу ядра **(КВФ 8.4).**

Вариант 29

1. Вектор ***a*** направлен с юга на север параллельно оси вращения Земли. Второй вектор ***b*** направлен вертикально вверх, в той точке, где вы находитесь. Куда будет направлен вектор ***a´ b***? В какой точке Земной поверхности величина этого вектора максимальна? Минимальна?
2. В момент времени t=0 частица вышла из начала координат в положительном направлении оси x. Ее скорость меняется со временем по закону $v(t)=v_0[1-\exp(-t/\tau)]$, где v_0-вектор начальной скорости, модуль которого $|v_0|=10$ см/с, $\tau=5$с. Найти: а) зависимость от времени ускорения ***a***(t), действующего на частицу; б) момент времени, когда это ускорение максимально (его значение в этот момент времени); в) связь между ускорением ***a***(t) и скоростью v(t); г) зависимость пройденного пути s(t) от времени. Нарисовать графики зависимостей v(t), ***a***(t), s(t).
3. Координаты движения материальной точки меняются следующим образом: $x=b_1t+c_1t^3$, $y=b_2t+c_2t^2$, z=0. Определить касательное a_t и нормальное a_n ускорения и радиус кривизны R в момент времени t_1, когда $V_y=0$.
4. Тело массой m подбросили вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Сила сопротивления в воздухе (сила вязкого трения) пропорциональна скорости. Определить зависимость скорости от времени v(t) и время движения вверх.
5. Планета массы *m* движется по эллипсу вокруг Солнца так, что наименьшее и наибольшее расстояния ее от Солнца равны соответственно r_1 и r_2. Найти момент импульса L этой планеты относительно центра Солнца.
6. На краю покоящейся тележки массы M стоят два человека, масса каждого из которых равна m. Пренебрегая трением, найти скорость тележки после того, как оба человека спрыгнут с одной и той же горизонтальной скоростью **u** относительно тележки: а) одновременно; б) друг за другом. В каком случае скорость тележки будет больше? **(ОФ 1.129/1.135)**

7. Шарик массы m, двигавшийся со скоростью v_0, испытал упругое лобовое соударение с одним из шариков покоившейся жесткой гантели, как показано на рис. Масса каждого шарика гантели равна m/2, расстояние между ними *l*. Пренебрегая размерами шариков, найти собственный момент импульса М гантели после соударения, т. е. момент импульса в поступательно движущейся системе отсчета, связанной с центром масс гантели. **(ОФ 1.213/1.235)**



8. Релятивистская частица массы *m* испытывает упругое соударение с неподвижной частицей такой же массы. Найти кинетическую энергию K_1 рассеянной частицы по кинетической энергии K_0 налетающей частицы и углу рассеяния θ_1. **(МФТИ 8.41)**
9. Электрон, ускоренный разностью потенциалов U-= 1,0 кВ, движется в однородном магнитном поле под углом α= 30° к вектору **B**, модуль которого B=30мТл. По какой траектории движется электрон? Найти: а) параметры траектории; б) кинетическую энергию электрона; в) скорость электрона и ее проекции на направление параллельное вектору магнитного поля и на направление перпендикулярное вектору магнитного поля.
10. Альфа-частица с кинетической энергией К налетает с прицельным параметром 90 фм на покоящееся ядро атома свинца. Найти: а) модуль приращения вектора импульса рассеянной α-частицы, если К=2,3 МэВ; б) при каком значении К модуль приращения вектора импульса рассеянной α-частицы будет максимальным для данного прицельного параметра. Каков при этом угол рассеяния? **(КВФ 1.85).** При решении задачи использовать формулу Резерфорда, связывающую прицельный параметр *b* и угол рассеяния θ: $tg\frac{q}{2}=\frac{qq_0}{2bK}$, где q- заряд неподвижной частицы, q_0-

заряд налетающей частицы, K- кинетическая энергия налетающей частицы.

Вариант 30

1. Векторная сумма трех векторов ***a***, ***b***, ***c*** равна нулю. Абсолютные значения этих векторов соответственно равны 4, 3, 5. Вычислить величины ***ab***, ***ac***, ***bc***.
2. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на высоте h_1 два раза с интервалом времени Δt_1, а на высоте $h_2 < h_1$ два раза с интервалом времени Δt_2. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить по этим данным ускорение свободного падения g.
3. Под каким углом надо целиться в мишень, расположенную от стрелка на расстоянии L по горизонтали и на высоте H над горизонтом, чтобы пуля ее поразила? Начальная скорость пули V_0. *Указание*: считать, что искомый угол незначительно отличается от угла, под которым мишень видна из начала координат.
4. Определить закон движения y(t) парашютиста массой m, падающего с высоты h, при наличии силы сопротивления $F = kV$. Начальную скорость считать равной нулю.
5. На каком расстоянии от поверхности Земли должен находиться спутник, чтобы он все время висел над одной точкой земной поверхности (такие орбиты называются геостационарными)? Считать, что спутник движется вокруг Земли по круговой орбите. Вычислить также: а) скорость движения спутника по геостационарной орбите; б) момент импульса спутника относительно центра Земли; в) полную энергию спутника. Масса спутника равна 100 т. Радиус Земли R=6400 км. Ускорение силы тяжести на поверхности Земли принять 10 м/с^2.
6. В *K*-системе отсчета вдоль оси x движутся две нерелятивистские частицы: одна массы m_1 со скоростью v_1, другая массы m_2 со скоростью v_2. Найти: а) скорость V *K′*-системы отсчета, в которой суммарная

кинетическая энергия этих частиц минимальна; б) суммарную кинетическую энергию этих частиц в *K*¢-системе. **(ОФ 1.169/1.187)**

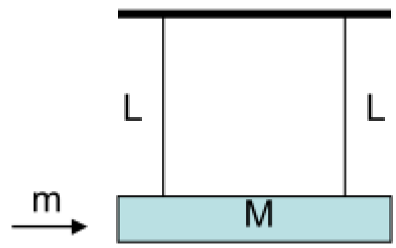
7. Система из двух движущихся частиц характеризуется в произвольный момент времени векторами положения $\mathbf{r_1}$, $\mathbf{r_2}$ и скорости $\mathbf{v_1}$ и $\mathbf{v_2}$. Показать, что в системе центра масс момент импульса этой системы есть $\mathbf{L=r\times p}$, где **r**- расстояние между частицами, **p**-импульс одной из частиц.
8. Релятивистский протон с кинетической энергией *K* испытывает упругое столкновение с покоящимся протоном, в результате чего частицы разлетаются симметрично относительно первоначального направления движения первого протона. Найти угол θ между направлениями разлета протонов. **(МФТИ 8.42)**
9. Для каких значений кинетической энергии период обращения электрона и протона в однородном магнитном поле на η= 1,0 % больше периода их обращения при нерелятивистских скоростях?
10. Воспользовавшись законами сохранения, показать, что свободный электрон не может поглотить фотон. **(КВФ 1.59)**

Вариант 31

1. Векторная сумма трех векторов ***a***, ***b***, ***c*** равна нулю. Абсолютные значения этих векторов соответственно равны 4, 3, 5. Вычислить величины ***a*´*b***, ***a*´*c***, ***b*´*c***.
2. Движение материальной точки задано уравнением $x(t)=At^2-Bt^3$, где A=3 м/с, B=1 м/с^2. Найти: а) момент времени, при котором частица достигает максимального положительного значения на оси *x*; б) путь, который частица пройдет за 4 с; в) положение частицы на оси *x* в этот момент времени; г) среднюю путевую скорость частицы на интервале от t=2 с до t=4 с.
3. Маховик, вращающийся с постоянной частотой f_0=10 об/с, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение

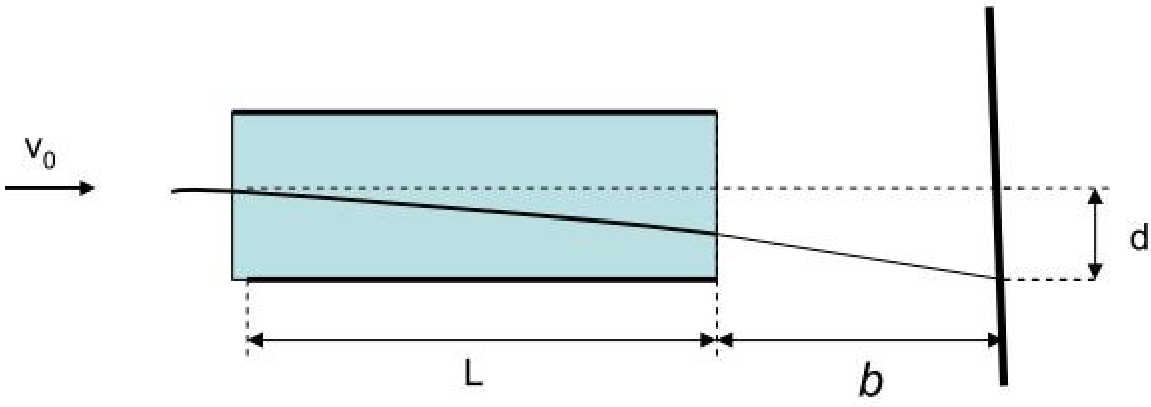
прекратилось, движение маховика снова стало происходить с постоянной частотой f=6 об/с. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность τ торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал N =50 оборотов.

4. Лодка массой m под парусом развила скорость V_0. Как будет убывать во времени скорость лодки после спуска паруса, если сила сопротивления воды пропорциональна скорости (F = kV)? Какое время лодка будет двигаться? Какой путь она пройдет?
5. Планета массы m движется вокруг Солнца по эллиптической орбите. Масса Солнца M_C. Механическая энергия планеты известна и равна $E=-|E|$, модуль момента импульса равен $|\vec{L}|$. Найти максимальное r_{max} и минимальное r_{min} расстояния между планетой и Солнцем. При каком соотношении m, M_C, $|E|$ и $|\vec{L}|$ планета движется по круговой орбите?
6. Летевшая горизонтально пуля массы m попала в тело массы M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длины L (см. рис.), и застряла в нем. В результате нити отклонились на угол θ. Считая m<<M, найти: а) скорость пули перед попаданием в тело; б) относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию. **(ОФ 1.176/1.194)**



7. Небольшой шарик массы m, привязанный на нити длины l к потолку в точке О, движется по горизонтальной окружности так, что нить вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Относительно каких точек момент импульса M шарика остается постоянным? Найти модуль приращения момента импульса шарика относительно точки О за половину оборота. **(ОФ 1.201/1.221)**

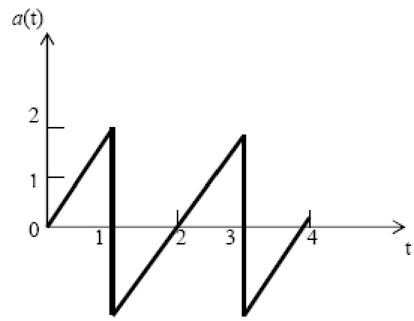
8. Релятивистский $\pi°$-мезон (энергия покоя m_0c^2) распадается на лету на два фотона с энергиями E_1 и E_2. Найти угол θ между направлениями разлета фотонов. **(МФТИ 8.43)**
9. Пучок нерелятивистских отрицательно заряженных частиц проходит, не отклоняясь, через область (см. рис.), в которой созданы поперечные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B. Если магнитное поле выключить, след пучка на экране смещается на d. Зная расстояния L и b, найти удельный заряд q/m частиц. Укажите на рисунке направления электрического и магнитного полей.



10. Фотон с энергией $\varepsilon_ф$=0.34 МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне так, что кинетическая энергия электрона отдачи составила η= 25% от энергии налетевшего фотона. Найти: а) смещение длины волны рассеянного фотона; б) угол θ, под которым рассеялся фотон. **(КВФ 1.62)**

Вариант 32

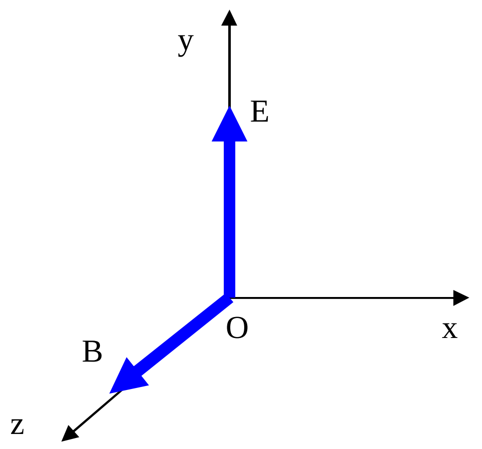
1. Имеется три вектора ***a***=3**i**+3**j**–2**k**, ***b***=–**i**–4**j**+2**k**, **c**=2**i**+2**j**+**k**. Найти: а) ***a***(***b*´*c***)***;*** б) ***a*(*b*+*c*)*;*** в) ***a*´(*b*+*c*).**
2. Начертить график зависимости скорости от времени, если дан график ускорения *a*(t).



3. Твердое тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = at + bt^3$ где a=6 рад/с, b=–2 рад/с. Найти: а) средние значения угловой скорости и углового ускорения за промежуток времени от t=0 до остановки; б) угловое ускорение в момент остановки тела.
4. Катер массы m движется по озеру со скоростью V_0. В момент t=0 выключили его двигатель. Считая силу сопротивления пропорциональной скорости катера $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$, найти: а) зависимость скорости от времени v(t); б) время движения катера с выключенным двигателем; в) скорость катера в зависимости от пути, пройденного с выключенным двигателем; г) полный путь до остановки.
5. Спутник, вращается по круговой орбите радиуса R=1.5 $R_З$ ($R_З$=6400 км-радиус Земли). Найти: а) полную механическую энергию спутника; б) минимальную дополнительную скорость, направленную вдоль траектории движения, которую нужно сообщить спутнику, чтобы он мог покинуть область земного притяжения. Масса спутника равна 10 т.
6. Частица А массы m, пролетев вблизи другой покоившейся частицы В, отклонилась на угол α. Импульс частицы А до взаимодействия был равен p_0, после взаимодействия стал p Найти массу частицы В, если система замкнутая. **(ОФ 1.180/1.199)**
7. Небольшой шарик подвесили к точке О на легкой нити длины l. Затем шарик отвели в сторону так, что нить отклонилась на угол θ от вертикали, и сообщили ему скорость в горизонтальном направлении перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой расположена нить. Какую начальную скорость надо сообщить шарику, чтобы в процессе движения максимальный угол отклонения нити от вертикали оказался равным $\pi/2$? **(ОФ 1.205/1.226)**
8. Покоящийся π^+-мезон (энергия покоя $m_\pi c^2$= 139,6МэВ) распадается на антимюон μ^+ (энергия покоя $m_\mu c^2$ = 105,7 МэВ) и нейтрино ν (энергия

покоя равна нулю). Найти кинетические энергии K_μ и K_ν продуктов распада. **(МФТИ 8.44)**

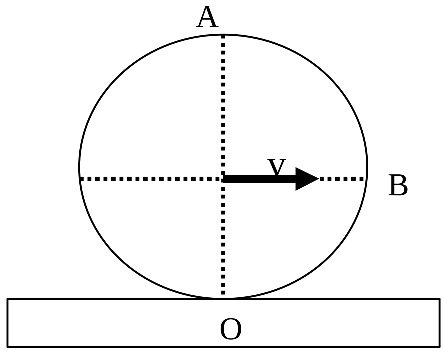
9. Частица с удельным зарядом q/m движется в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B (**см. рис**.). В момент t = 0 частица находилась в точке O и имела нулевую скорость. Найти для нерелятивистского случая: а) закон движения частицы x(t) и y(t); какой вид имеет траектория; б) длину участка траектории между двумя ближайшими точками, в которых скорость частицы обращается в нуль; в) среднее значение проекции скорости частицы на ось x (дрейфовую скорость).



10. Фотон с энергией $\varepsilon_ф$ рассеялся под углом θ на покоившемся свободном электроне. Определить угол φ, под которым вылетел электрон отдачи (по отношению к направлению налетевшего фотона). **(КВФ 1.63)**

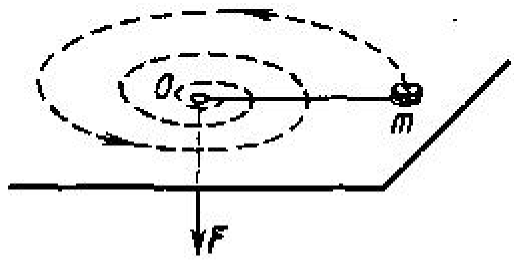
Вариант 33

1. Имеется три вектора ***a***=5**i**+4**j**–6**k**, ***b***=–2**i**+2**j**+3**k**, **c**=4**i**+3**j**+2**k**. Найти: а) вектор ***r***=***a***-***b***+***c***; б) угол между вектором ***r*** и положительным направлением оси z; в) угол между векторами ***a*** и ***b***.
2. Тело бросили вверх с начальной скоростью V_0 под углом α к горизонту. Вычислите зависимость от времени следующих величин: x(t), y(t), $V_x(t)$, $V_y(t)$, $|V(t)|$, $a_x(t)$, $a_y(t)$, $|a(t)|$; ρ(t), φ(t), $V_\rho(t)$, $V_\varphi(t)$, $a_n(t)$, $a_\tau(t)$.
3. Шар радиуса R=10,0 см катится без скольжения по горизонтальной плоскости так, что его центр движется с постоянным ускорением a=2,50 см/с^2.



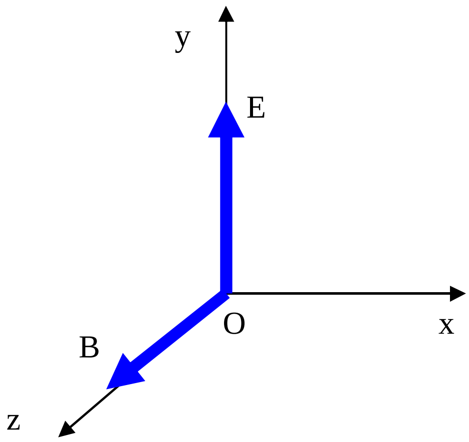
Через t=2,00 с после начала движения его положение соответствует показанному на рисунке. Найти: а) скорости точек А и В; б) ускорения точек А и О (см. Рис.).

4. Некоторое тело массой m=2 кг начинает прямолинейное движение так, что его скорость зависит от времени следующим образом: $v(t)=v_0 exp(-kt)$, где v_0=10 м/с, к=0.1c^{-1}. Какое расстояние пройдет тело за 10 с после начала движения? Чему в этот момент будет равна сила, действующая на тело?
5. Планета А движется по эллиптической орбите вокруг Солнца. В момент, когда она находилась на расстоянии r_0 от Солнца, ее скорость равнялась V_0, и угол между радиус-вектором r_0 и вектором скорости V_0 составлял α. Найти наибольшее и наименьшее расстояния, на которые удаляется от Солнца эта планета при своем движении.
6. В результате упругого лобового столкновения частицы 1 массы m_1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями. Найти массу частицы 2. **(ОФ 1.184/1.204)**
7. На гладкой горизонтальной плоскости движется небольшое тело массы m, привязанное к нити, другой конец которой втягивают в отверстие О (см. рис.) с постоянной скоростью. Найти силу натяжения нити в зависимости от расстояния r тела до отверстия, если при $r=r_0$ угловая скорость нити была равна ω_0. **(ОФ 1.207/1.228)**



8. При распаде «на лету» Ω^- гиперона ($\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$) измерены импульсы частиц распада p_Λ = 5,7 ГэВ/с и $p_к$ = 2,0 ГэВ/с (*с* — скорость света) и угол разлета между ними θ = 28,5°. Определить массу Ω^--гиперона. **(МФТИ 8.45)**

9. Заряженная частица с удельным зарядом q/m начинает двигаться в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля. Магнитное поле постоянно и имеет индукцию B, электрическое же меняется во времени как $E = E_m\cos\omega t$, где $\omega = qB/m$. Найти для нерелятивистского случая закон движения частицы x(t) и y(t), если в момент t = 0 она находилась в точке O (**см. рис.**). Какой примерно вид имеет траектория частицы?



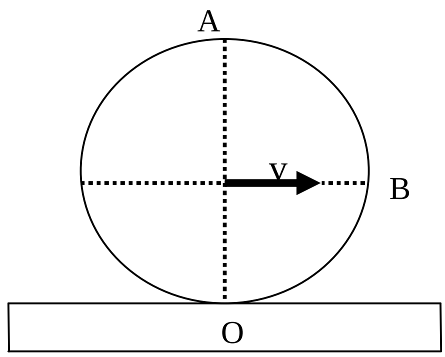
10. Найти, под какими углами φ к направлению падающих фотонов могут отлетать электроны с импульсом p. **(КВФ 1.64)**

Вариант 34

1. Пусть имеется три вектора, связанных соотношением $\vec{A}=\vec{B}\times\vec{C}$, причем вектора $\vec{B}$ и $\vec{C}$ перпендикулярны. Покажите, что $\vec{B}=\dfrac{\vec{C}\times\vec{A}}{C^2}$.

2. Начальное значение скорости точки равно $\mathbf{V_1}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$ (м/с), конечное $\mathbf{V_2}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ (м/с). Найти приращение скорости $\Delta\mathbf{V}$, модуль приращения скорости $|\Delta\mathbf{V}|$ приращение модуля скорости $\Delta|\mathbf{V}|$ и угол поворота вектора скорости.

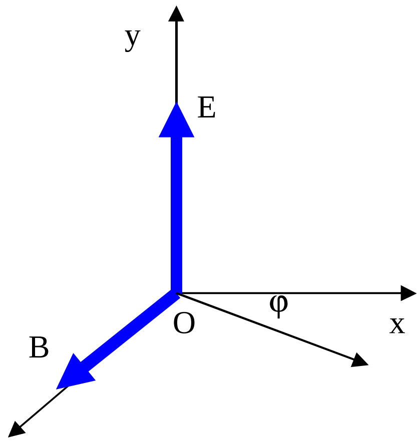
3. Цилиндр катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Радиус цилиндра равен R. Найти радиусы кривизны траекторий точек A и B (см. рис.).



4. Частица движется вдоль оси x по закону $x=\alpha t^2-\beta t^3$ где α и β-положительные постоянные. В момент t=0 сила, действующая на

частицу, равна F_0. Найти значения F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке x=0.

5. Двойная звезда -это система из двух звезд, движущихся вокруг ее центра масс. Известны расстояние L между компонентами двойной звезды и период *T* ее вращения. Считая, что L не меняется, найти суммарную массу системы.
6. После упругого столкновения частицы 1 с покоившейся частицей 2 обе частицы разлетелись симметрично относительно первоначального направления движения частицы 1, и угол между их направлениями разлета θ = 60°. Найти отношение масс этих частиц**. (ОФ 1.185/1.205)**
7. Замкнутая система состоит из двух одинаковых взаимодействующих частиц. В некоторый момент t_0 скорость одной частицы равна нулю, а другой v. Когда расстояние между частицами оказалось опять таким же, как и в момент t_0, скорость одной из частиц стала равной v_l. Чему равны в этот момент скорость другой частицы и угол между направлениями их движения? **(ОФ 1.181/1.201)**
8. Покоившаяся частица массой M распалась на новую частицу массой m и на фотон. Определить импульс и энергию фотона, а также скорость частицы. Ответ выразить через M и m.
9. Нерелятивистские протоны движутся прямолинейно в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с E=4,0кВ/м и B = 50мТл. Траектория протонов лежит в плоскости xz (см. рис.) и составляет угол φ=30°с осью x. Найти шаг винтовой линии, по которой будут двигаться протоны после выключения электрического поля.



10. Фотон с энергией $\varepsilon_ф$=0,46 МэВ рассеялся под углом =120° на покоившемся свободном электроне. Найти: а) энергию рассеянного фотона; б) энергию, переданную электрону. **(КВФ 1.65)**

Вариант 35

1. Камень бросили под углом α=30° к горизонту с начальной скоростью V_0=10 м/с. В верхней точке траектории найти компоненты векторов скорости V_ρ и V_φ и ускорения $\boldsymbol{a}_\rho$ и $\boldsymbol{a}_\varphi$ в полярной системе координат, начало которой совпадает с точкой, откуда бросили камень.
2. Радиус-вектор точки, где находится частица, есть $\mathbf{r}=a_1t\mathbf{i}+(a_2t-a_3t^2)\mathbf{j}$. Найти вектор скорости **V**, величину |**V**| в момент t=0, вектор ускорения $\boldsymbol{a}$. В какой момент времени вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения?
3. Твердое тело начинает вращаться вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\beta=\alpha t$, где $\alpha=2\times10^{-2}$=рад/$с^3$. Через какой промежуток времени после начала вращения вектор полного ускорения $\boldsymbol{a}$ произвольной точки тела образует с ее вектором скорости **V** угол β=60°?
4. Парашютист, масса которого m=80 кг, совершает затяжной прыжок. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости. Коэффициент сопротивления воздуха k=10 кг/с. 1) записать для движения парашютиста второй закон Ньютона в форме дифференциального уравнения. 2) Определить скорость установившегося движения парашютиста. 3) Определить, через какой промежуток времени Δt после начала прыжка скорость парашютиста будет равна 0.9 от скорости его установившегося движения. Начальная скорость парашютиста равна нулю.
5. Частица движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где ее потенциальная энергия $U = kr^2$, k- положительная постоянная, r- расстояние частицы до центра поля О. Найти массу частицы, если наименьшее расстояние ее до точки О равно r_1, а скорость на наибольшем расстоянии от этой точки v_2. **(ОФ 1.204/1.224)**
6. Замкнутая система состоит из двух одинаковых частиц, которые движутся со скоростями v_1 и v_2 так, что угол между направлениями их движения равен θ. После упругого столкновения скорости частиц

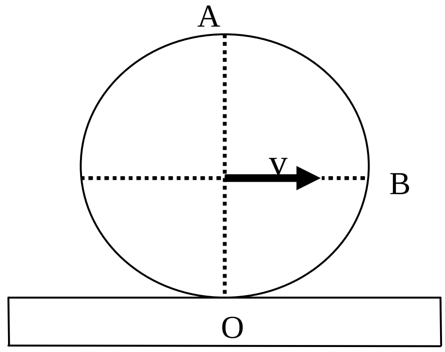
оказались равными v_1' и v_2'. Найти угол θ' между направлениями их разлета. **(ОФ 1.182/1.202)**

7. На какое минимальное расстояние приблизится α-частица с кинетической энергией К=40 кэВ (при лобовом соударении): а) к покоящемуся ядру атома свинца; б) к первоначально покоящемуся ядру ^{7}Li. **(КВФ 1.82)**
8. Покоившаяся нейтральная частица распалась на протон с кинетической энергией 5.3 МэВ и π-мезон. Найти массу М распавшейся частицы. Энергии покоя частиц: протон-1836 m_ec^2; π-мезона-273 m_ec^2, где m_ec^2- энергия покоя электрона: m_ec^2=0.51 МэВ.
9. Система состоит из длинного цилиндрического анода радиуса *a* и коаксиального с ним цилиндрического катода радиуса b (b<**a**). На оси системы имеется нить с током накала I, создающим в окружающем пространстве магнитное поле. Найти наименьшую разность потенциалов между катодом и анодом, при которой термоэлектроны, покидающие катод без начальной скорости, начнут достигать анода.
10. Фотон испытал рассеяние на покоившемся свободном электроне. Найти импульс налетавшего фотона, если энергия рассеянного фотона равна кинетической энергии электрона отдачи при угле 90° между направлениями их разлета. **(КВФ 1.69)**

Вариант 36

1. Имеются два вектора $\mathbf{B}=b_X\mathbf{i}+b_Z\mathbf{k}$ и $\mathbf{M}=M_X\mathbf{i}+M_Y\mathbf{j}+M_Z\mathbf{k}$. Вектор **M** можно представить в виде: $\mathbf{M}= \mathbf{M}_{\|}+ \mathbf{M}_{\perp}$, где вектор $\mathbf{M}_{\|}$ параллелен вектору **B,** а вектор $\mathbf{M}_{\perp}$ перпендикулярен вектору **B.** Найти в координатах x, y, z компоненты векторов $\mathbf{M}_{\|}$ и $\mathbf{M}_{\perp}$.
2. С земли одновременно бросили 2 шарика с одинаковой скоростью V_0=25 м/с- один вертикально вверх, другой- под углом a=60° к горизонту. Найти зависимость расстояния между шариками от времени и величину этого расстояния через t=1.7 с.

3. Колесо радиуса R движется горизонтально со скоростью v_0 и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Точка B на ободе (см. Рис.) описывает в пространстве некоторую траекторию. Найти радиус ее кривизны ρ в момент, когда точка B находится на уровне центра колеса.

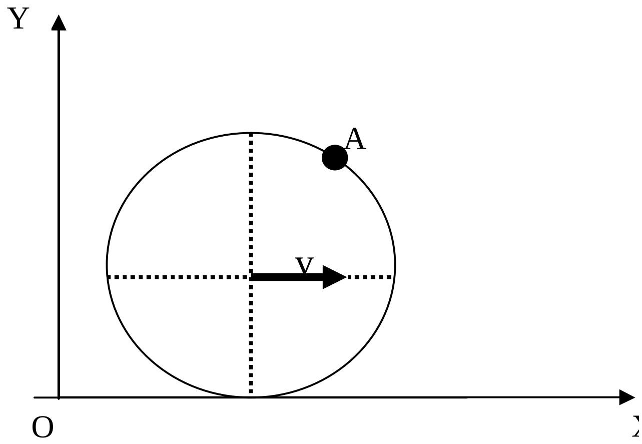


4. Начальная скорость пули V_0=800 м/с, ее масса m=10 г. Считая силу сопротивления воздуха F пропорциональной квадрату скорости: $F=-kv^2$, где $k=1.25\times10^{-5}$ кг/м, найти время через которое скорость пули уменьшится в два раза. Силу тяжести не учитывать.
5. Небольшое тело движется по замкнутой траектории в центральном силовом поле, где его потенциальная энергия пропорциональна квадрату расстояния до центра поля. Наименьшее расстояние тела до центра поля равно r_0, а наибольшее - в η раз больше. Найти радиус кривизны траектории тела в точке, соответствующей r_0. **(ОФ /1.225)**
6. Какой минимальной скоростью должен обладать атом водорода, чтобы при столкновении с таким же первоначально покоящимся атомом увеличить его внутреннюю энергию на 10 эВ? *Указание*: задачу решить двумя способами- в системе центра масс и в лабораторной системе.
7. Протон с кинетической энергией К=0,90 МэВ испытал упругое лобовое соударение с покоившимся дейтроном. Найти кинетическую энергию протона после соударения. **(КВФ 8.7)**
8. При неупругом столкновении частицы массой m, обладающей импульсом p=mc, и такой же покоящейся частицы образуется составная частица. Определить: а) скорость частицы до столкновения; б) скорость составной частицы; в) массу составной частицы.

9. Протоны ускоряются в циклотроне. Максимальный радиус кривизны их траектории r= 50 см. Найти: а) кинетическую энергию протонов в конце ускорения, если индукция магнитного поля в циклотроне В=1,0 Тл; б) минимальную частоту генератора циклотрона, при которой в конце ускорения протоны будут иметь кинетическую энергию К = 20 МэВ.
10. В результате столкновения фотона с покоившимся свободным электроном углы, под которыми рассеялся фотон и отлетел электрон отдачи, оказались одинаковыми и угол между направлениями их разлета θ=100°. Найти энергию налетавшего фотона. **(КВФ 1.70)**

Вариант 37

1. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \alpha\vec{k}$ и $\vec{b} = -\beta\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ будут коллинеарные?
2. Воздушный шар поднимается с поверхности Земли. Скорость подъема постоянна и равна V_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную скорость V_X=by, где у - высота подъема. Найти зависимость от высоты подъема полного, тангенциального и нормального ускорения шара.
3. Колесо радиуса R катится без скольжения по горизонтальному пути со скоростью v_0. Найти: а) зависимость от времени координаты x и y произвольной точки А на ободе колеса, полагая, что в начальный момент времени (t=0) x=0 и y=0. Нарисовать графики x(t), y(t), а также график y(x) траектории точки на ободе колеса; б) зависимость от времени горизонтальной компоненты v_X линейной скорости движения произвольной точки на ободе колеса, вертикальной компоненты v_Y этой скорости, а также модуля полной скорости для этой



же точки; в) величину и направление векторов скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ для двух точек обода катящегося колеса, расположенных в данный момент на противоположных концах горизонтального диаметра колеса. Как будут направлены ускорения этих точек?

4. Частица массы m в момент t=0 начинает двигаться под действием силы $F=F_0\cos\omega t$, где F_0 и ω- постоянные. Сколько времени будет двигаться частица до полной остановки? Какой путь она пройдет за это время? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?
5. Потенциальная энергия частицы в поле имеет вид $U=\frac{a}{r^2}-\frac{b}{r}$ где постоянные a, $b > 0$, r - расстояние от центра поля. Определить: 1) силу, действующую на тело; является ли поле центральным? 2) минимальное значение силы притяжения; какому расстоянию от центра оно соответствует? 3) значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы. Устойчиво ли оно? 4) Построить графики U(r) и $F_r(r)$- проекции силы на радиус-вектор. 5) Описать движение частицы в зависимости от величины полной энергии.
6. Шар, двигавшийся поступательно, испытал упругое соударение с другим, покоившимся шаром той же массы. При соударении угол между прямой, проходящей через центры шаров и направлением первоначального движения налетающего шара оказался равным α = 45°. Считая шары гладкими, найти долю η кинетической энергии налетающего шара, которая перешла в потенциальную энергию в момент наибольшей деформации. **(ОФ 1.187/1.207)**
7. Релятивистская частица массы m_1 с кинетической энергией К налетает на покоящуюся частицу массы m_2. Найти: а) кинетическую энергию их относительного движения; б) импульс каждой частицы в Ц-системе. **(КВФ 9.5)**

8. Найти энергию нейтрино, образовавшейся при распаде остановившегося π^+-мезона ($\pi^+ \to \nu + \mu^+$). Энергии покоя частиц: π^+-мезона 273 m_ec^2; μ^+-мезона-273 m_ec^2, где m_ec^2-энергия покоя электрона: m_ec^2=0.51 МэВ.
9. Частота генератора циклотрона f = 10 МГц. Найти эффективное ускоряющее напряжение на его дуантах, при котором расстояние между соседними траекториями протонов радиуса r = 0,5 м не меньше чем Δr = 1,0 см.
10. Найти энергию налетающего фотона, если известно, что при рассеянии под углом $\theta = 60°$ на покоящемся свободном электроне последний приобрел кинетическую энергию К=450 кэВ. **(КВФ 1.71)**

Вариант 38

1. Вычислить работу силы $\vec{F} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ при перемещении материальной точки из положения A(–1, 2, 0) в положение B (2, 1, 3).
2. Частица движется со скоростью **V**=αt(2**i**+3**j**+4**k**), где α=1 м/с^2. Найти: 1) модуль скорости в момент t=1.5 с; 2) ускорение частицы ***a*** и модуль ускорения в момент t=1.5 с; 3) путь S, пройденный частицей с момента t_1=2с до момента t_2=3с.
3. Вращение от двигателя автомобиля передается ведущим колесам через дифференциал- устройство, благодаря которому каждое из ведущих колес может вращаться с разной скоростью. Зачем нужен дифференциал? Почему нельзя оба ведущих колеса закрепить жестко на одной оси, которой передается вращение от двигателя? После того как вы ответите на эти вопросы, рассчитайте скорость ведущих колес автомобиля на закруглении дороги радиусом R=50 м. Автомобиль движется по колее шириной 1.2 м со скоростью 36 км/час. Радиус колес *r*=30 см. Найдите линейные скорости v_{in} внутренних (по отношению к центру кривизны дороги) и внешних v_{ex} колес автомобиля. Ответ: v_{in}=9.88 м/с, v_{ex}=10.12 м/с.

4. С какой скоростью будет двигаться тележка под действием постоянной силы F, если лежащий в ней песок высыпается через отверстие в дне? За 1 секунду высыпается масса μ песка. В момент t=0 тележка стояла на месте, а масса тележки и песка вместе была равна М.
5. Потенциальная энергия частицы, находящейся в центрально-симметричном поле, имеет вид $U=\frac{a}{r^3}-\frac{b}{r^2}$, где a, b - положительные постоянные. Имеется ли у этой частицы положение устойчивого равновесия по отношению к смещению в радиальном направлении?
6. Частица 1, имевшая скорость v = 10 м/с, испытала лобовое столкновение с покоившейся частицей 2 той же массы. В результате столкновения кинетическая энергия системы уменьшилась на η = 1,0 %. Найти модуль и направление скорости частицы 1 после столкновения. **(ОФ 1.189/1.209)**
7. Отрицательный мюон с кинетической энергией К=100 МэВ испытал упругое лобовое соударение с покоившимся электроном. Найти кинетическую энергию электрона после столкновения. **(КВФ 9.8)**
8. Найти кинетическую энергию нейтрона, образовавшегося при распаде остановившегося Σ-гиперона ($\Sigma \rightarrow n+\pi^-$). Энергии покоя частиц: Σ-гиперон-2328 m_ec^2; нейтрона-1836 m_ec^2; π^--мезона-273 m_ec^2, где m_ec^2-энергия покоя электрона: m_ec^2=0.51 МэВ.
9. Однократно ионизированные ионы He^+ ускоряют в циклотроне так, что максимальный радиус орбиты r= 60 см. Частота генератора циклотрона ν=10,0МГц, эффективное ускоряющее напряжение между дуантами U=50 кВ. Пренебрегая зазором между дуантами, найти: а) полное время процесса ускорения иона; б) приближенное значение пути, пройденного ионом за весь цикл ускорения.
10. Фотон с энергией $\varepsilon_ф$ =1,00 МэВ рассеялся на покоившемся свободном электроне. Найти кинетическую энергию электрона отдачи, если в результате рассеяния длина волны фотона изменилась на η= 25%.**(КВФ 1.72)**

Вариант 39

1. Сила $\vec{F} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ приложена к точке A(4, −2, 3). Определить момент этой силы относительно точки O(3, 2, −1).
2. Радиус-вектор точки, где находится частица, есть $\mathbf{r}=a_1t\mathbf{i}+a_2t^2\mathbf{j}+(a_3t^3+a_4t)\mathbf{k}$. Найти вектор скорости **V**, величину |**V**| в момент t=0, вектор ускорения ***a***. Как направлен вектор ***a*** по отношению к радиус- вектору **r** и вектору скорости **V** в момент t=0?
3. В результате горизонтального удара кием по центру бильярдного шара последний начал двигаться с линейной скоростью v_0= 5 м/с, постепенно замедляясь с ускорением a=−1 м/с^2. Одновременно после удара шар начал также вращаться вокруг своей оси с угловым ускорением ε=2.5/R (рад/с^2), где R- радиус шара. Через какое время после начала движения движение шара перейдет в чистое качение, то есть, шар будет двигаться без скольжения? Чему при этом станет равна линейная скорость шара v? Какое расстояние s пройдет шар за это время? Ответ: t=1.43 с, v=3.57 м/с.
4. Сила торможения, действующая на шайбу массой m=100 г, пущенной по поверхности льда с начальной скоростью v_0=20 м/с, зависит от времени по закону F=kt^2, где k=7.5×10^{-4} Н/с^2. Через какое время остановится шайба? Какое расстояние пройдет шайба до остановки? Чему равна работа сил торможения?
5. Потенциальная энергия частицы в центральном поле имеет вид $U = \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r}$, где a= 6×10^{-6} Дж м^2, b = 3×10^{-4} Дж м, r-расстояние от центра поля. Будет ли финитным движение частицы, если её энергия E = −2×10^{-3} Дж ? Какую минимальную скорость нужно сообщить частице массой m= 0,2 г , находящейся в положении равновесия, чтобы она могла удалиться от центра на расстояние R= 10 см ? Построить графики U(r), F(r).
6. Снаряд, летящий со скоростью v =500 м/с, разрывается на три одинаковых осколка так, что кинетическая энергия системы

увеличивается в η= 1,5 раза. Какую максимальную скорость может иметь один из осколков? **(ОФ 1.188/1.208)**

7. Атом натрия, двигающийся со скоростью 600 м/с, поглощает двигающийся ему навстречу фотон с энергией 2 эВ. Насколько при этом изменится скорость атома натрия?
8. Релятивистская частица, летящая со некоторой скоростью, распадается на две одинаковые частицы, каждая из которых имеет массу m. После распада скорость одной из частиц относительно лабораторной системы отсчета равна нулю, а другой равна 0.8c, где c-скорость света. Найти скорость частицы до распада v и ее массу M.
9. В момент t = 0 из отрицательно заряженной пластины плоского конденсатора вылетел электрон с пренебрежимо малой скоростью. Между пластинами действует электрическое поле, $E = E_0t$, где E_0 = 2000 В/мс. Расстояние между пластинами l = 5,0 см. С какой скоростью электрон подлетит к противоположной пластине?
10. Фотон с энергией, превышающей энергию покоя электрона в η= 1,5 раза, испытал лобовое столкновение с покоившемся свободным электроном, который находится в однородном магнитном поле. В результате электрон отдачи стал двигаться по окружности радиусом R = 2,9 см. Найти индукцию B магнитного поля. **(КВФ 1.73)**

Вариант 40

1. Найти вектор $\vec{a}$, образующий с ортом **j** угол 60°, а с ортом **k** угол 120°, если $|\vec{a}| = 5\sqrt{2}$
2. Точка начинает двигаться по окружности радиуса R =10 м с постоянным тангенциальным ускорением a_τ=0,4 м/с^2. Через какой промежуток времени вектор полного ускорения ***a*** образует с вектором скорости **V** угол β=60° ? Какой путь будет пройден за это время ?

3. Сплошной цилиндр радиусом R=5 см раскрутили до угловой скорости ω_0=10 рад/с и положили боковой поверхностью на негладкий стол. Цилиндр начинает катиться по столу с линейным ускорением a=1 м/с, при этом, вследствие трения о поверхность стола его вращение замедляется с ускорением ε=–40 рад/с^2. Через какое время после начала движения движение цилиндра перейдет в чистое качение, то есть, он будет двигаться без скольжения? Чему при этом станет равна линейная скорость цилиндра v? Какое расстояние s пройдет цилиндр за это время?
4. Тело массы m= 2 кг в момент t=0 начинает двигаться из начала координат под действием силы **F**=2t**i**+3t^2**j** Н. В момент времени t=3 с найти: а) мощность P(t), развиваемую этой силой; б) работу, совершенную этой силой; в) расстояние тела от начала координат.
5. Потенциальная энергия частицы имеет вид $U = a\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{z}\right)$, где a = const.

   Определить: 1) силу **F**, действующую на частицу; 2) работу A , совершаемую над частицей силами поля при переходе частицы из точки с координатами (1,1,1) в точку с координатами (2,2,3).
6. Частица массы m испытала столкновение с покоившейся частицей массы M, в результате которого частица m отклонилась на угол $\pi/2$, а частица M отскочила под углом θ= 30° к первоначальному направлению движения частицы m. На сколько процентов и как изменилась кинетическая энергия этой системы после столкновения, если M/m = 5,0 ? **(ОФ 1.190/1.210)**
7. Неподвижный атом находится в возбужденном состоянии, так что его внутренняя энергия равна E_1. После того, как атом испустил фотон частоты ν, его внутренняя энергия стала равна E_0. Найти с помощью законов сохранения относительное смещение частоты фотона $\Delta\nu/\nu$, обусловленное отдачей атома.
8. Релятивистская частица движется вдоль оси x со скоростью v_x=0.8c. В некоторый момент времени на частицу начинает действовать сила

направленная по оси y, в результате чего проекция скорости частицы на ось y стала равной v_y=0.5c. Как изменится при этом проекция vx скорости частицы на ось x?

9. Частица с удельным зарядом q/m движется прямолинейно под действием электрического поля $E = E_0 – \varepsilon x$, где ε- положительная постоянная, x - расстояние от точки, в которой частица первоначально покоилась. Найти расстояние, пройденное частицей до остановки.
10. Фотон с энергией $\varepsilon_ф$ испытал столкновение с электроном, который двигался ему навстречу. В результате столкновения направление движения фотона изменилось на противоположное, а его энергия оказалась прежней. Найти скорость электрона до и после столкновения. **(КВФ 1.74)**