Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Утверждено
Редакционно-издательским советом
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2015

УДК 531(075.8)
Ф503

Коллектив авторов:

доц. *К.В. Аленькина*, ст. преп. *Р.М. Маркель*,
проф. *В.М. Любимский*, доц. *А.Г. Моисеев*,
доц. *М.Г. Ноппе*

Рецензенты: доцент *А.В. Баранов*, доцент *В.Ф. Ким*

Работа подготовлена на кафедре прикладной
и теоретической физики для студентов I–II курсов
для всех факультетов заочного отделения

Ф503 **Физика: механика** : учебное пособие / Коллектив авторов. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. – 76 с.
ISBN 978-5-7782-1144-5

Настоящее пособие соответствует рабочим программам, принятым на кафедрах общей физики и прикладной и теоретической физики НГТУ. Может быть использовано и при проведении практических занятий на дневном отделении, а также при самоподготовке студентов к практическим занятиям.

УДК 531(075.8)

ISBN 978-5-7782-1144-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕХАНИКА

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании механического движения используется понятие системы отсчета. Система координат, связанная с телом, и прибор для измерения времени называются *системой отсчета*.

Существенным также является определение свободного тела. Тело, на которое не действуют другие тела, называется *свободным.*

Центральным понятием физики является понятие инерциальной системы отсчета. Система координат, связанная со свободным невращающимся телом, и прибор для измерения времени называются *инерциальной системой отсчета*.

Основные законы физики выглядят наиболее просто только в инерциальных системах отсчета.

2. МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При изучении движения тел бывают ситуации, когда размерами тела можно пренебречь, тогда такое тело называют *материальной точкой*.

Так, например, для расчета орбиты Земли при ее движении вокруг Солнца размеры нашей планеты несущественны и Землю можно считать материальной точкой. С другой стороны, при расчете орбит для низколетящих спутников Земли необходимо учитывать размеры планеты, т. е. одно и то же тело в одних задачах можно считать материальной точкой, а в других нельзя.

2.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

При движении материальной точки в пространстве ее положение задается *радиусом-вектором*. Вектор, проведенный из начала координат в точку, где находится тело, называется радиусом-вектором материальной точки.

Понятие радиуса-вектора лежит в основе понятия закона движения материальной точки. Радиус-вектор материальной точки, заданный как функция времени, называется *законом движения материальной точки*. Линия, которую вычерчивает в пространстве конец радиуса-вектора при движении материальной точки, – *траектория материальной точки* (рис. 1). Длина траектории – *путь*. Точка 1 – начальная точка движения материальной точки, а точка 2– конечная точка движения материальной точки.

При этом вектор $\Delta\vec{r}$, проведенный из начальной точки движения 1 в конечную точку движения 2, – *вектор перемещения*.

Быстроту передвижения материальной точки в пространстве характеризует *скорость*. *Средняя скорость* материальной точки при движении тела из точки 1 в точку 2 есть отношение вектора перемещения ко времени, за которое происходит это перемещение

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Мгновенной скоростью материальной точки $\vec{V}(t)$ называется производная радиуса-вектора $\vec{r}(t)$ по времени t.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Вектор мгновенной скорости всегда направлен по касательной к траектории.

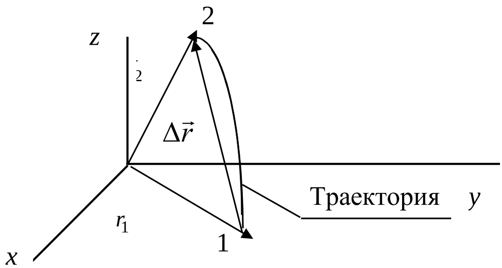


Рис. 1

Если вектор скорости материальной точки не изменяется с течением времени, то движение материальной точки называют равномерным. Если вектор скорости материальной точки изменяется, то движение не является равномерным. Быстроту изменения скорости характеризуют *ускорением*.

Среднее ускорение материальной точки $\vec{a}_{\text{ср}}(t)$ – это отношение изменения скорости точки при ее движении из положения 1 в положение 2 ко времени, за которое осуществляется это движение:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t},$$

где

$$\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1.$$

Ускорение– это производная скорости $\vec{V}(t)$ по времени t

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}.$$

В системе СИ время измеряется в секундах (с). Путь и перемещение измеряется в метрах (м), скорость измеряется в метрах, деленных на секунду (м/с), а ускорение измеряется в метрах, деленных на секунду в квадрате (м /с^2).

При переходе из неподвижной системы отсчета в подвижную систему отсчета скорость материальной точки изменяется.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета: неподвижную *x, y* и подвижную x', y' (рис. 2).

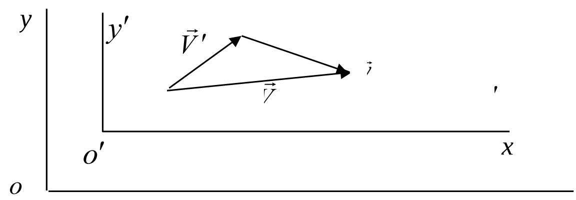


Рис. 2

Пусть $\vec{V}$ – скорость точки в неподвижной системе отсчета. Скорость точки в подвижной системе отсчета – $\vec{V}'$. Скорость подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета – $\vec{v}$. Тогда связь между скоростями $\vec{V}$, $\vec{V}'$ и $\vec{v}$ задается соотношением

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{v}. \qquad (2.1)$$

Условие (2.1) называют также законом *сложения скоростей* в классической физике. Формула (2.1) справедлива, если скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}'$ много меньше, чем скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с в вакууме (V', $v << c$).

2.2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Законы динамики материальной точки были изложены Ньютоном. Ньютон сформулировал три закона динамики. Для формулировки законов Ньютона необходимы понятия силы, массы, скорости и ускорения. Понятия скорости и ускорения материальной точки даны в разделе «Кинематика материальной точки».

Сила – это количественная мера взаимодействия тел. Сила является величиной векторной и характеризуется своим модулем и направлением. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на материальную точку, складываются по *правилу параллелограмма* (рис. 3).

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 .$$

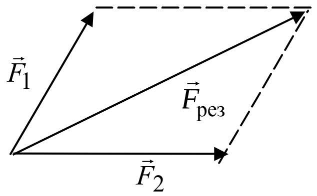


Рис. 3

Примечание. Сила измеряется в ньютонах (Н).

Масса материальной точки m есть мера инертности тела. Масса измеряется в килограммах (кг).

Первый закон Ньютона (закон инерции Галилея). В инерциальной системе отсчета тело, на которое не действуют другие тела или когда действие всех сил скомпенсировано, движется равномерно и прямолинейно или покоится.

Второй закон Ньютона. Ускорение тела прямо пропорционально результирующей силе, действующей на тело, и обратно пропорционально массе тела

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{рез}}}{m} .$$

Третий закон Ньютона. При взаимодействии двух точечных масс (тело 1 и тело 2) сила, с которой первое тело действует на второе, равна по модулю и противоположна по направлению силе, с которой второе тело действует на первое:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Силы действуют вдоль прямой, соединяющей эти точечные массы.

Следует отметить, что законы Ньютона справедливы только:

а) в инерциальных системах отсчета;

б) при условии, что скорости тел много меньше скорости света.

Например, законы Ньютона нельзя применять для расчета движения электрона в атомах, молекулах и твердых телах.

Законы Ньютона позволяют рассчитать закон движения материальной точки $\vec{r}(t)$ при $t > 0$, если известны: результирующая сила $\vec{F}_{\text{рез}}(t)$, действующая на материальную точку при $t > 0$, а также радиус-вектор $\vec{r}_0$ и скорость материальной точки $\vec{V}_0$ в начальный момент времени $(t = 0)$.

Следует отметить, что в физике существует подход, позволяющий рассчитать параметры системы материальных точек, при условии, что силы взаимодействия между частицами в исследуемой системе неизвестны. В основе этого подхода лежат законы сохранения импульса, механической энергии и момента импульса замкнутой системы материальных точек.

Замкнутая система – это система материальных точек, на которую другие тела не воздействуют.

2.3. ИМПУЛЬС И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Импульсом (*количеством движения*) материальной точки называется величина, равная произведению массы тела m на его скорость $\vec{V}$. Импульс – величина векторная

$$\vec{p} = m\vec{V}.$$

Импульсом $\vec{p}$ системы материальных точек называется величина, равная сумме импульсов всех точек системы

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i.$$

Здесь m_i – масса i-й точки; $\vec{V}_i$ – скорость i-й точки; N– число материальных точек.

Закон сохранения импульса (*количества движения*) *системы материальных точек.* Импульс системы материальных точек сохраняется, если сумма внешних сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю.

Закон сохранения импульса можно записать в виде:

$$\text{если} \quad \sum_{n=1}^{K} \vec{F}_n = 0, \quad \text{то} \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i = \text{const} .$$

Закон сохранения импульса может быть получен как следствие законов Ньютона, условия применения которых даны выше. Следовательно, в рамках данного подхода закон сохранения импульса выполняется только тогда, когда выполняются законы Ньютона.

При переходе из одной системы отсчета в другую импульс системы материальных точек изменяется. Для нахождения закона преобразования импульса системы материальных точек рассмотрим систему из N материальных точек. Пусть $\vec{V}_i$ – скорость i-й точки в неподвижной инерциальной системе отсчета; $\vec{V}_i'$ – скорость той же точки в подвижной инерциальной системе отсчета, $\vec{v}$ – скорость подвижной инерциальной системы отсчета относительно неподвижной. Тогда скорости точек в подвижной и неподвижной системах отсчета связаны соотношением (2.1)

$$\vec{V}_i = \vec{V}_i' + \vec{v} . \tag{2.2}$$

Умножая (2.2) на m_i, получим соотношение между импульсом частицы в подвижной $m_i \vec{V}_i'$ и неподвижной $m_i \vec{V}_i$ системах отсчета

$$m_i \vec{V}_i = m_i \vec{V}_i' + m_i \vec{v} .$$

Суммируя обе части последнего уравнения по всем i, получим закон преобразования импульса при переходе из покоящейся инерциальной системы отсчета в движущуюся:

$$\vec{p} = \vec{p}' + M\vec{v} . \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$ – импульс системы материальных точек в неподвижной системе отсчета; $\vec{p}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i'$ – импульс системы материальных точек в движущейся системе; $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – полная масса системы материальных точек.

Закон сохранения импульса системы позволяет в определенных случаях рассчитать результат столкновения частиц, если не известны силы, действующие между частицами.

Закон сохранения импульса выглядит очень просто в системе центра инерции.

Системой центра инерции называется инерциальная система отсчета, в которой полный импульс системы материальных точек равен нулю.

Для нахождения скорости системы центра инерции $\vec{V}_0$ воспользуемся соотношением (2.3). Если подвижная система отсчета есть система центра инерции, то $\vec{p}' = 0$ и скорость $\vec{V}_0$ находится из соотношения

$$\vec{p} = M\vec{V}_0 ,$$

откуда скорость системы центра инерции

$$\vec{V}_0 = \frac{\vec{p}}{M} .$$

Поскольку полный импульс системы в неподвижной системе отсчета $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i$, скорость системы центра инерции

$$\vec{V}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i . \tag{2.4}$$

Возьмем производную по времени от левой и правой частей (2.4):

$$\frac{d\vec{V}_0}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \frac{1}{M} \vec{F}_{\text{рез}} .$$

Из полученной формулы видно, что если результирующая сила равна нулю, то скорость движения центра инерции (центра масс) – величина постоянная.

Радиус-вектор центра инерции системы материальных точек определяется на основе формулы (2.4). Поскольку скорость *i*-й частицы есть ее производная радиуса-вектора $\vec{r}_i$ по времени, скорость системы центра инерции можно записать в виде

$$\vec{V}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt},$$

или

$$\vec{V}_0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i .$$

Величину, стоящую под знаком полной производной, обозначим $\vec{R}_0$:

$$\vec{R}_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i .$$

$\vec{R}_0$ называется *радиусом-вектором центра инерции* системы материальных точек.

Примечание. Системы центра инерции интересны тем, что описания многих процессов в них выглядят проще, чем в других инерциальных системах отсчета.

3. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

Для формулировки закона сохранения механической энергии системы материальных точек необходимы понятия работы силы, кинетической энергии системы материальных точек и потенциальной энергии системы материальных точек.

Работой А постоянной силы $\vec{F}$ при прямолинейном однонаправленном движении точки называется скалярное произведение вектора силы и вектора перемещения $\Delta\vec{r}$

$$A = \left(\vec{F}\Delta\vec{r}\right) = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha .$$

Здесь $|\vec{F}|$ и $|\Delta\vec{r}|$– модули векторов силы и перемещения; α– угол между этими векторами. Модуль вектора перемещения при прямолинейном движении есть путь S . Поэтому работа равна

$$A = FS\cos\alpha .$$

Для того чтобы дать понятие работы переменной силы при криволинейном движении тела из точки 1 в точку 2 (рис. 4), разобьем всю траекторию движения на N очень небольших участков таких, что на каждом участке i сила $\vec{F}_i$ практически остается постоянной, а сам участок очень мало отличается от отрезка прямой.

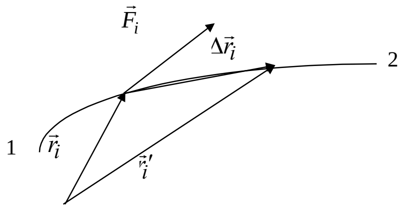


Рис. 4

Здесь $\vec{F}_i$– сила, действующая на тело на участке i; $\Delta\vec{r}_i$ – вектор перемещения на i участке.

В этом случае работа силы $\vec{F}_i$ на участке i траектории есть

$$\delta A_i = \left(\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i\right).$$

Работа же силы на всей траектории от точки 1 до точки 2 есть сумма работ на всех участках траектории:

$$A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i\right).$$

В строгом математическом смысле работа переменной силы может быть представлена как предел суммы работ δA_i , когда каждый вектор перемещения $\Delta\vec{r}_i$ стремится к нулю, а число разбиений N стремится к бесконечности:

$$A = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i \Delta\vec{r}_i\right).$$

Такой предел суммы математики называют криволинейным интегралом силы по заданной траектории между точками 1 и 2. Теперь можно сказать, что работа переменной силы $\vec{F}$ при криволинейном движении тела из точки 1 в точку 2 есть криволинейный интеграл силы $\vec{F}$ по заданной траектории движения тела

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{r} \right). \qquad (3.1)$$

Кинетической энергией материальной точки называется величина $T = \frac{mV^2}{2}$. Здесь m – масса материальной точки; V – скорость материальной точки. Понятие работы A (3.1) переменной силы, действующей на материальную точку, позволяет сформулировать теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки. При перемещении материальной точки в пространстве из точки 1 в точку 2 под действием переменной результирующей силы $\vec{F}_{\text{рез}}$ изменение кинетической энергии материальной точки равно работе результирующей силы, т.е.

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \int_1^2 \left(\vec{F}_{\text{рез}} d\vec{r} \right) = A.$$

4. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Потенциальная энергия материальной точки является характеристикой, позволяющей исследовать движение материальной точки, когда точка движется в статическом поле тяготения или в электростатическом поле. Это поля консервативных (потенциальных) сил.

Основные свойства консервативного поля:

1. Сила, действующая на материальную точку со стороны потенциального поля, зависит только от координаты материальной точки.

2. Работа силы, действующей на материальную точку со стороны потенциального поля, не зависит от формы траектории, по которой частица переходит из одной точки в другую.

Из этих свойств следует, что работа при перемещении материальной точки в поле потенциальных сил по замкнутой траектории равна нулю.

Потенциальной энергией тела в произвольной точке, например 1, называется работа консервативных сил поля, совершаемая при перемещении тела из точки 1 в точку O (рис. 5) при условии, что потенциальная энергия в точке O равна нулю:

$$U_1 = A_{10}.$$

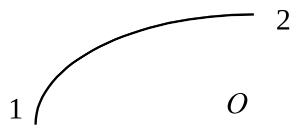


Рис. 5

Примечание. Точка O выбирается произвольно. Произвол в выборе нулевой точки обусловливает неоднозначность потенциальной энергии.

Работа A_{12} по перемещению тела из точки 1 в точку 2 в потенциальном поле равна разности потенциальных энергий тела в точках 1 и 2:

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

При произвольном движении материальной точки потенциальная энергия есть функция трех координат материальной точки x, y, z:

$$U = U(x, y, z).$$

В этом случае проекции силы F_x, F_y, F_z, действующей на материальную точку, могут быть найдены по формулам:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x},\ \ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y},\ \ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Потенциальная энергия материальной точки $U = U(x, y, z)$ и кинетическая энергия материальной точки $T = \dfrac{mV^2}{2}$ определяют механическую энергию материальной точки. *Механической энергией* материальной точки E называется сумма ее кинетической и потенциальной энергий

$$E = \frac{mV^2}{2} + U \ .$$

Закон сохранения механической энергии тела материальной точки при ее движении в поле потенциальных сил: *при движении материальной точки в поле только потенциальных сил сумма кинетической и потенциальной энергий этой точки остается постоянной:*

$$\frac{mV^2}{2} + U = \mathrm{const} \ .$$

Пример 1

Найти потенциальную энергию тела массы m в однородном поле силы тяжести на высоте h над поверхностью Земли, если ускорение свободного падения постоянно и равно g.

Р е ш е н и е

Если нулевую точку выбрать на поверхности Земли так что $U_0 = 0$, то работа силы тяжести mg равна $A_{mg} = mgh$ и $U = mgh$.

Пример 2

Найти потенциальную энергию U точечного тела массы m, находящегося на расстоянии r от массивного точечного тела массы M.

Р е ш е н и е

Между этими телами действует сила притяжения, которая рассчитывается по формуле

$$F = G\frac{mM}{r^2} \ .$$

Если нулевую точку выбрать на бесконечности, то полная работа A силы притяжения F при перемещении тела массы m на бесконечность равна сумме элементарных работ dA:

$$dA = -G\frac{mM}{r'^2}dr'$$

на элементарных участках dr', когда $r < r' < \infty$.

Полную работу A можно представить в виде интеграла:

$$A = -\int_{r'=r}^{r'=\infty} G\frac{mM}{r'^2}dr' .$$

Потенциальная энергия U в этом случае равна работе A:

$$U = A = -G\frac{mM}{r} .$$

Законы сохранения импульса и механической энергии позволяют создать математическое описание упругого и неупругого ударов двух тел.

Упругим ударом двух тел называется такой удар, при котором кинетическая энергия тел сохраняется.

$$\frac{mV_2^2}{2} + \frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2'^2}{2} + \frac{mV_1'^2}{2} .$$

Здесь m_1 и m_2– массы 1 и 2 тела; $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ – скорости 1 и 2 тела до удара; $\vec{V}_1'$ и $\vec{V}_2'$ – скорости 1 и 2 тела после удара.

При упругом ударе двух тел, на которые не действуют внешние силы, кроме кинетической энергии, сохраняется полный импульс системы двух тел

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2' .$$

Пример 3

На неподвижную частицу массы m_1 налетает частица массы m_2, модуль скорости которой равен V_2. Найти скорости частиц $\vec{V}_1'$ и $\vec{V}_2'$ после удара. Удар считать центральным и упругим.

Примечание. Столкновение частиц называется центральным, если частицы до и после удара двигаются только вдоль одной оси.

Р е ш е н и е

Если удар центральный, а частица массы m_2 движется со скоростью V_2, то

$$\frac{m_2V_2^{\ 2}}{2} = \frac{m_1V_1'^2}{2} + \frac{m_2V_2'^2}{2} ,$$

$$m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2'.$$

Неизвестные V_1' и V_2' могут быть найдены по формулам:

$$V_1' = 2V_2\frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad V_2' = V_2\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Неупругим ударом называется удар, при котором не сохраняется кинетическая энергия тел, так как часть кинетической энергии переходит во внутреннею энергию взаимодействующих тел. Поэтому при неупругом ударе имеет место только закон сохранения импульса

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2'$$

при условии, что система замкнута.

Пример 4

На неподвижную частицу массы m_1 налетает частица массы m_2, модуль скорости которой равен V_2. После столкновения образуется новая частица с массой $m_1 + m_2$. Найти скорость образовавшейся частицы $\vec{V}'$.

Р е ш е н и е

В этой задаче закон сохранения импульса принимает вид

$$m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{V}'.$$

Последнее соотношение позволяет найти скорость образовавшейся частицы $\vec{V}'$:

$$\vec{V}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{V}_2.$$

5. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Моментом импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно некоторой точки O называется величина

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]. \qquad (5.1)$$

Здесь $\vec{r}$ – радиус-вектор точки; $\vec{p} = m \cdot \vec{V}$ – импульс точки; m – масса точки; $\vec{V}$ – ее скорость.

Моментом импульса системы материальных точек относительно некоторой точки О называется величина

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i] .$$

Здесь N – число материальных точек в системе; i – номер материальной точки (i = 1, 2, 3, ..., N); $\vec{r}_i$ – радиус-вектор i точки, $\vec{p}_i = m_i \vec{V}_i$ – импульс i точки.

Для формулировки закона сохранения момента импульса системы материальных точек необходимо понятие момента силы, действующего на материальную точку.

Моментом силы $\vec{M}_i$, действующей на i материальную точку *относительно некоторой точки О*, называется величина

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_i].$$

Здесь $\vec{F}_i$ – сила, действующая на i материальную точку.

Моментом сил $\vec{M}$*, действующих на систему из N материальных точек относительно некоторой точки О*, называется величина

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i \times \vec{F}_i] .$$

Момент сил $\vec{M}$, действующих на систему материальных точек, определяет скорость изменения момента импульса $\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)$ этих материальных точек:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} .$$

Однако момент сил $\vec{M}$, действующих на систему материальных точек, можно представить как сумму моментов внешних сил $\vec{M}_{\text{внеш}}$ и сумму моментов внутренних сил $\vec{M}_{\text{внутр}}$:

$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{внеш}} + \vec{M}_{\text{внутр}} .$$

Поскольку сумма моментов внутренних сил $\vec{M}_{\text{внутр}}$ всегда равна нулю, скорость изменения момента импульса $\left(\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right)$ системы материальных точек равна сумме моментов внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}. \tag{5.2}$$

Отсюда следует закон сохранения момента импульса системы материальных точек.

Если сумма моментов внешних сил $\vec{M}_{\text{внеш}}$*, действующих на систему материальных точек, равна нулю, то момент импульса этой системы сохраняется* ($\vec{L} = \text{const}$).

Пример 5

Материальная точка массы m движется равномерно по окружности радиуса R со скоростью V_0. Окружность находится в плоскости xy и центр окружности совпадает с началом координат. Если смотреть на окружность со стороны оси z, когда $z > 0$, то вращение точки происходит против часовой стрелки. Найти момент импульса частицы $\vec{L}$.

Р е ш е н и е

Вектор момента количества движения $\vec{L}$ равен:

$$\vec{L} = [\vec{r} \times m\vec{V}].$$

В исследуемой системе радиус-вектор частицы $\vec{r}$ лежит в плоскости xy, вектор скорости частицы $\vec{V}$ также лежит в плоскости xy, причем векторы $\vec{V}$ и $\vec{r}$ всегда перпендикулярны. В этом случае вектор $\vec{L}$ по правилу векторного произведения направлен по оси z и по модулю равен $\left|\vec{L}\right| = mV_0R$.

Закон сохранения момента импульса системы материальных точек может быть получен как следствие законов Ньютона. Поэтому область выполнения закона сохранения момента импульса обусловлена областью применения законов Ньютона.

6. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Реальные физические тела не всегда можно рассматривать как точечные массы. Поэтому в механике вводится понятие твердого тела.

Твердым телом называется тело, у которого расстояние между двумя любыми точками не изменяется в процессе движения тела.

Плоским движением называется движение, при котором все точки твердого тела движутся в параллельных плоскостях. Любое плоское движение твердого тела может быть представлено в виде суперпозиции (наложения) поступательного и вращательного движений.

Поступательное движение – это движение, при котором все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные перемещения.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

6.1. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

При вращении твердого тела вокруг закрепленной оси (рис. 6) точки, лежащие на прямой *OA*, за одинаковые промежутки времени проходят разные расстояния. Поэтому линейные скорости этих точек – разные. Однако угол поворота $\Delta\varphi$ этих точек – одинаков.

Поэтому при вращении твердого тела рассматривают *угловую скорость* ω:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{6.1}$$

Если твердое тело вращается равномерно, то $\omega = \text{const}$. Если движение неравномерное, то угловая скорость, вычисленная по формуле (6.1), будет средней скоростью за время Δt.

Если Δt устремить к нулю, то

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

где ω – *мгновенная угловая скорость*.

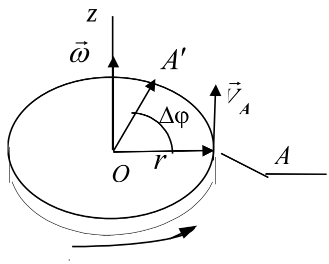


Рис. 6

Угловой скорости удобно приписать векторные свойства. Для этого условились вектор угловой скорости направлять вдоль оси вращения так, чтобы из его конца поворот твердого тела был виден как поворот против часовой стрелки (рис. 6).

Линейная и угловая скорости связаны между собой. Для того чтобы установить эту связь, рассмотрим перемещение точки A за время Δt (рис. 6). За это время точка переместится из положения A в положение A' и пройдет расстояние $\Delta S = r\Delta\varphi$. Поэтому модуль линейной скорости этой точки равен

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\omega,$$

т.е. линейная и угловая скорости связаны соотношением

$$V = r\omega. \qquad (6.2)$$

Поскольку линейная скорость направлена по касательной к траектории движения точки, а угловая скорость – по оси вращения (рис. 6), в векторной форме уравнение (6.2) имеет вид

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}\ .$$

Угловое ускорение определяется аналогично линейному ускорению

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\ .$$

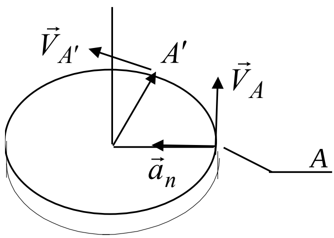


Рис. 7

При ускоренном движении направление $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением угловой скорости, а при замедленном движении имеет противоположное направление.

При вращении твердого тела даже с постоянной угловой скоростью все точки твердого тела, за исключением точек, находящихся на оси вращения, имеют ускорение. Рассмотрим точку A, которая при вращении твердого тела перемещается в положение A' (рис. 7).

Так как направление линейной скорости совпадает с касательной к траектории движения точки, то направления линейных скоростей в точках A и A' различаются и

$$\vec{V}_A' = \vec{V}_A + \Delta\vec{V} .$$

Изменение скорости, когда $\omega = \mathrm{const}$, связано с ускорением, которое называется нормальным, направленным по радиусу к оси вращения и равным

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \omega^2 r .$$

Если твердое тело вращается ускоренно, то точки твердого тела имеют кроме нормального ускорения еще и тангенциальное, направленное по касательной к траектории движения точки:

$$a_\tau = \varepsilon r .$$

Результирующее ускорение произвольной точки твердого тела с закрепленной осью вращения может быть найдено по теореме Пифагора через a_n и a_τ:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} .$$

Как сказано выше, плоское движение твердого тела может быть представлено в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений.

Рассмотрим плоское движение твердого тела на примере равномерного качения диска (цилиндра) по горизонтальной поверхности (рис. 8). Скорость точки O на оси диска равна $\vec{V}_0$.

Качение диска – действительно сложное движение, состоящее из поступательного и вращательного движений: если бы диск не вращался,

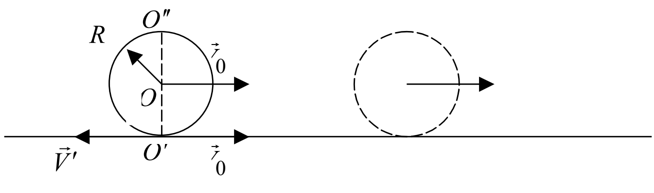


Рис. 8

то было бы только его скольжение, если бы не было поступательного движения, а только вращательное, то центр диска бы не перемещался.

Итак, при чисто поступательном движении диска все его точки имеют одинаковую скорость. Так как точки, лежащие на оси диска, не имеют вращательного движения, то скорость поступательного движения равна $\vec{V}_0$. За счет вращательного движения точка O' имеет скорость $\vec{V}'$, направленную противоположно скорости $\vec{V}_0$. Однако, поскольку точка O' касается горизонтальной поверхности, ее мгновенная скорость относительно этой поверхности равна нулю. Поэтому

$$\vec{V}_0 + \vec{V}' = 0 \text{ и } \vec{V}' = -\vec{V}_0 .$$

Линейная и угловая скорости связаны соотношением (6.2). Поэтому

$$\omega = \frac{V'}{R} = \frac{V_0}{R} .$$

Зная угловую скорость и скорость поступательного движения диска, можно найти линейную скорость любой точки диска. Линейная скорость, например, точки O'' складывается из скорости поступательного движения $\vec{V}_0$ и скорости вращательного движения $\omega R = V_0$ и равна $2\vec{V}_0$.

6.2. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

Для того чтобы получить выражение для момента импульса твердого тела, воспользуемся формулой (5.1). Мысленно разобьем твердое тело на N частей с элементарными массами m_i, выберем начало системы отсчета в некоторой точке на оси вращения твердого тела (рис. 9) и проведем к элементарной массе радиус-вектор $\vec{r}_i$.

Модуль момента импульса i-й массы равен

$$\left|\vec{L}_i\right| = \left|\vec{r}_i \times \vec{V}_i m_i\right| = r_i V_i m_i ,$$

так как угол между радиусом-вектором $\vec{r}_i$ и вектором скорости V_i равен 90° (рис. 9).

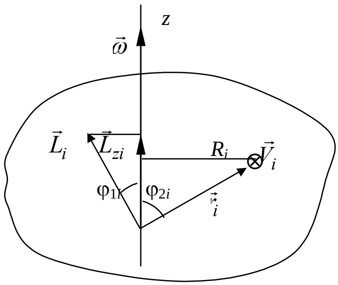


Рис. 9

Найдем проекцию момента импульса твердого тела на ось вращения (ось z) (L_z). Момент импульса твердого тела равен сумме моментов импульсов всех его N частей. Тогда $L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi}$.

$$\left|L_{zi}\right| = L_z \cos\varphi_{1i} = r_i V_i m_i \cos\varphi_{1i} . \qquad (6.3)$$

Линейная скорость i-й массы связана с угловой скоростью

$$V_i = \omega r_i \sin\varphi_{2i} , \qquad (6.4)$$

где φ_{2i} – угол между вектором угловой скорости и радиусом-вектором, проведенным к i-й массе. Из рис. 9 видно, что

$$r_i \cos\varphi_{1i} = r_i \sin\varphi_{2i} = R_i . \qquad (6.5)$$

Подставив (6.4), (6.5) в (6.3), получим

$$L_{zi} = m_i R_i^2 \omega$$

и

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi} = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = J\omega ,$$

где $J = \sum_{i=1}^{N} \left(R_i^2 m_i \right)$ – *момент инерции твердого тела*.

Окончательно

$$L_z = J\omega .$$

Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, если твердое тело симметрично относительно оси вращения. В этом случае

$$\vec{L} = J\vec{\omega}. \tag{6.6}$$

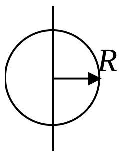
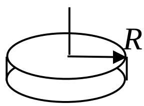
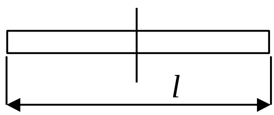
Перейдя в $J = \sum_{i=1}^{N}\left(R_i^2 m_i\right)$ к бесконечно малым величинам, заменим сумму на интеграл и в результате получим

$$J = \int_{v} R_i^2 \rho dv, \tag{6.7}$$

где ρ – плотность вещества твердого тела; v – объем твердого тела.

Именно формула (6.7) применяется для вычислений моментов инерции твердых тел различных форм. В таблице приведены моменты инерции шара, цилиндра (диска), стержня относительно осей, проходящих через их центры инерции.

Таблица 1

Фигура	J	Положение оси вращения
Шар	$\frac{2}{5}mR^2$	
Цилиндр (диск)	$\frac{1}{2}mR^2$	
Стержень	$\frac{1}{12}ml^2$	

m – масса твердого тела.

Если ось вращения не совпадает с осью, проходящей через центр инерции, то момент инерции может быть определен по теореме Штейнера: «Момент инерции твердого тела относительно произвольной оси равен моменту инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр инерции и параллельной данной оси, и произведению массы тела на квадрат расстояния между осями», т.е.

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J – момент инерции тела относительно произвольной оси; J_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции; m – масса тела; a – расстояние между осями.

Пример 6

Найти момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения перпендикулярна стержню. Масса стержня – m, его длина – l.

Р е ш е н и е

Согласно теореме Штейнера $J = J_0 + ma^2$, $a = \frac{l}{2}$.

Из табл. 1 следует, что $J_0 = \frac{1}{12} ml^2$.

Тогда $J = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}$.

6.3. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения получим из уравнения (5.2)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}} \qquad (6.8)$$

и соотношения (6.6). Подставив выражения для вектора $\vec{L}$ (6.6) в (6.8), получим

$$J\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M}_{\text{внеш}}.$$

Так как у твердого тела с закрепленной осью вращения угловая скорость и ее изменения могут быть направлены только по оси вращения, то изменение угловой скорости может вызывать только проекция момента силы на эту ось. Поэтому $J\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M}_{z\ \text{внеш}}$.

Так как $\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{\varepsilon}$, то

$$J\vec{\varepsilon}=\vec{M}_{z\ \text{внеш}}. \tag{6.9}$$

Уравнение (6.9) – основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела с закрепленной осью вращения.

Пример 7

На край равномерно вращающегося в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω диска радиусом *R* падает груз массой *m*. Какой станет угловая скорость диска с грузом после падения груза на диск? Момент инерции диска – *J*, груз считать точечной массой.

Р е ш е н и е

Так как при падении груза на диск не возникает вращающий момент (момент силы), направленный вдоль оси диска, то выполняется закон сохранения момента импульса. До падения груза на диск его момент импульса относительно оси вращения диска равен нулю. Поэтому до падения груза на диск момент импульса системы равен моменту импульса диска ($J\omega$). После падения груза на диск момент инерции системы равен сумме моментов инерции диска и груза. Момент инерции груза (считаем его точечной массой) равен $J_{\text{г}}=mR^2$. Тогда закон сохранения момента импульса имеет вид

$$J\omega=\left(J+J_{\text{г}}\right)\omega'=\left(J+mR^2\right)\omega',$$

и угловая скорость диска с грузом после падения груза на диск равна

$$\omega'=\frac{J}{J+mR^2}\omega.$$

6.4. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

Вращающееся твердое тело обладает кинетической энергией. Для того чтобы получить выражение для кинетической энергии вращающегося твердого тела, мысленно разобьем его на части с элементарными массами m_i, проведем к каждой элементарной массе от оси вращения радиусы-векторы. Кинетическая энергия каждой элементарной массы равна

$$E_i = \frac{m_i V_i^2}{2}.$$

Запишем линейную скорость каждой элементарной массы через угловую скорость $\left|\vec{V}_i\right| = \left|\vec{\omega} \times \vec{r}_i\right| = \omega r_i \sin\left(\vec{\omega}, \hat{} \, \vec{r}_i\right) = \omega R_i$ (см. рис. 6). Тогда

$$E_i = \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия твердого тела равна сумме кинетических энергий его частей

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Если твердое тело совершает сложное движение, которое можно представить в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений, то кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений.

Пример 8

Определить кинетическую энергию катящегося по горизонтальной поверхности со скоростью V_0 однородного диска массы m (рис. 8).

Р е ш е н и е

Кинетическая энергия катящегося диска равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений

$$E = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где первое слагаемое – кинетическая энергия поступательного, а второе слагаемое – кинетическая энергия вращательного движения.

Момент инерции диска (см. табл. 1) $J = \frac{mR^2}{2}$, угловая скорость (см. пример на стр. 23) – $\omega = \frac{V_0}{R}$.

Поэтому кинетическая энергия катящегося диска равна

$$E = \frac{mV_0^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\frac{V_0^2}{R^2}\right) = \frac{3}{4}mV_0^2.$$

Таблица 2

Поступательное движение	Вращательное движение
Путь S	Угол поворота φ
Скорость $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Масса m	Момент инерции J
Импульс $\vec{p} = m\vec{V}$	Момент импульса $\vec{L} = J\vec{\omega}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
II закон Ньютона $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$	Основное уравнение динамики вращательного движения $\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}$
Кинетическая энергия $E = \frac{mV^2}{2}$	Кинетическая энергия $E = \frac{J\omega^2}{2}$

Существует аналогия в форме записи законов механики при поступательном и вращательном движениях. В табл. 2 приведены физические величины и физические законы для поступательного и вращательного движений.

7. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

7.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

Специальная теория относительности изучает движение тел, когда скорость материальной точки сопоставима со скоростью света c в вакууме, но $V < c$ (c = 3·10^8 м/с). При движении тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света, преобразования координат, известные в механике Ньютона (преобразования Галилея), становятся несправедливыми и заменяются на преобразования Лоренца, которые имеют вид

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'. \tag{7.1}$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z. \tag{7.2}$$

Расположение систем координат показано на рис. 10. Время отсчитывается с момента совпадения точек O и O'.

Из преобразований Лоренца существуют следствия. Рассмотрим два следствия из преобразований Лоренца: а) сокращение длины; б) замедление времени.

а) сокращение длины

Рассмотрим стержень длиной l_0, движущийся вдоль оси x со скоростью $V \approx c$ относительно наблюдателя, и определим его длину. Для этого совместим подвижную систему отсчета со стержнем (рис. 10).

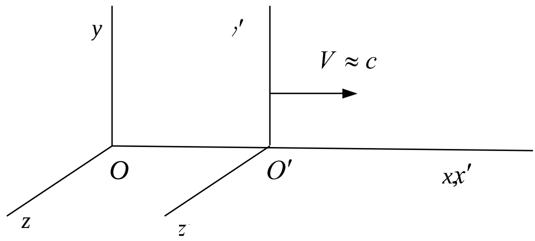


Рис. 10

Координаты концов стержня в движущейся системе координат обозначим x_1' и x_2'. Для того чтобы измерения длины движущегося стержня были однозначными, необходимо определять координаты концов стержня в неподвижной системе отсчета в один и тот же момент времени (t_0). Тогда длина стержня относительно неподвижного наблюдателя будет $l = \Delta x = x_2 - x_1$.

Для вычисления длины стержня в неподвижной системе отсчета воспользуемся вторым уравнением из (7.2). Тогда

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - Vt_0 - \left(x_1 - Vt_0\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \qquad (7.3)$$

Так как $x_2' - x_1' = l_0$ и $x_2 - x_1 = l$, то (7.3) можно записать в виде

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}. \qquad (7.4)$$

Из (7.4) видно, что длина стержня наибольшая в той системе отсчета, в которой стержень покоится. l_0 – *собственная длина стержня.*

б) замедление времени

Обозначим промежуток времени между двумя событиями в точке с координатами (x_0, y_0, z_0) в некоторой инерциальной системе отсчета (ИСО) как $\Delta t = \tau_0$. Промежуток времени между этими же событиями в другой ИСО, движущейся относительно первой со скоростью V, найдем, используя первую формулу из (7.2):

$$\Delta t' = \frac{\left(t_2 - \frac{x_0 V}{c^2}\right) - \left(t_1 - \frac{x_0 V}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} .$$

Обозначив $\Delta t' = \tau$, получим

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} . \qquad (7.5)$$

Из (7.5) видно, что промежуток времени наименьший в той ИСО, в которой эти события произошли в одной и той же точке. τ_0 – *собственное время.*

Пример 9

Космический корабль отправляется к некоторой звезде, находящейся от Земли на расстоянии Δx. Скорость космического корабля относительно Земли $V \approx c$. Каково время полета космического корабля для наблюдателя на Земле и космонавта?

Р е ш е н и е

Для наблюдателя на Земле время полета равно $\Delta t = \frac{\Delta x}{V}$.

Для космонавта расстояние сокращается и может быть вычислено по формуле (7.4). Так как $\Delta x = l_0$, то

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} .$$

Скорость космического корабля – V, и время полета для космонавта равно

$$\Delta t' = \frac{l}{V} = \frac{l_0}{V} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} . \qquad (7.6)$$

Сравним формулы (7.5) и (7.6). В (7.6) $\Delta t'$ – собственное время τ_0, так как события (старт и финиш космического корабля) для космонавта происходят в одной и той же точке («кресле космонавта»). Поэтому при вычислении времени полета космического корабля с точки зрения космонавта можно пользоваться формулой (7.5).

7.2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЭНЕРГИЕЙ И ИМПУЛЬСОМ

При скоростях, близких к скорости света, *импульс тела* массы m равен

$$p = \frac{mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \tag{7.7}$$

а его *полная энергия* –

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}. \tag{7.8}$$

Из (7.8) видно, что если $V = 0$, то энергия тела равна $E_0 = mc^2$. E_0 – *энергия покоя.*

Исключив V из (7.7) и (7.8), получим формулу, связывающую полную энергию и импульс:

$$E^2 = p^2c^2 + \left(mc^2\right)^2. \tag{7.9}$$

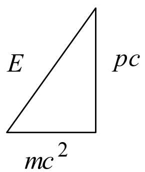


Рис. 11

Выражение (7.9) напоминает теорему Пифагора и может быть представлено в графическом виде (рис. 11).

Кинетическая энергия (T) в релятивистском случае – это разность между полной энергией и энергией покоя.

$$T = E - E_0 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right).$$

Если скорость тела много меньше c, то

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\approx 1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}$$

и кинетическая энергия равна

$$T=mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}-1\right)=\frac{mV^2}{2}. \qquad (7.10)$$

Формула (7.10) является известным выражением для кинетической энергии в механике Ньютона.

Пример 10

Какова скорость микрочастицы, если ее кинетическая энергия в 9 раз больше энергии покоя?

Р е ш е н и е

Так как кинетическая энергия в 9 раз больше энергии покоя, то

$$T=9mc^2$$

и тогда полная энергия равна

$$E=T+mc^2=10mc^2,$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}=10mc^2,$$

а скорость микрочастицы равна $V=c\sqrt{0.99}$.

7.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

При взаимодействии нескольких частиц при условии, что на систему частиц не действуют внешние силы, сохраняется полная энергия частиц

$$\sum E_i=\text{const}$$

и сохраняется полный импульс частиц

$$\sum \vec{p}_i = \text{const}\,.$$

Пример 11

Нейтральный покоящийся π^0-мезон распадается на два γ-кванта. Определить энергии и импульсы γ-квантов. Энергия покоя π^0-мезона равна 135 МэВ (1 эВ = $1.6{\cdot}10^{-19}$ Дж).

Р е ш е н и е

При распаде частицы выполняются законы сохранения импульса и энергии. До распада импульс π^0-мезона равен нулю. Поэтому

$$0 = \vec{p}_{\gamma_1} + \vec{p}_{\gamma 2} \quad \text{и} \quad p_{\gamma_1} = p_{\gamma 2} = p_{\gamma}\,.$$

γ – кванты – безмассовые частицы, т.е. их энергии покоя равны нулю.

Поэтому из (7.9) следует, что $E_{\gamma_1} = p_\gamma c$, $E_{\gamma_2} = p_\gamma c$ и $E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2} = E_\gamma$. Энергия π^0-мезона – это энергия покоя. Из закона сохранения энергии следует, что энергия покоя π^0-мезона равна полной энергии двух γ-квантов. Тогда энергия каждого кванта равна

$$E_\gamma = \frac{c^2 m_{0\pi^0}}{2} = 67.5\ \text{МэВ} = 1.08\cdot 10^{-11}\ \text{Дж},$$

а импульсы квантов равны

$$p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = 3.6\cdot 10^{-20}\ \text{кг·м/с}.$$

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

> Десять страниц понятых лучше ста страниц, изученных на память и не понятых, а одна страница, самостоятельно проработанная, лучше десяти страниц, понятых отчетливо, но пассивно.
>
> *Д. Юнг.*

Работа студента-заочника по изучению физики складывается из следующих основных элементов: самостоятельного изучения физики по учебным пособиям, выполнения контрольных работ (решения задач), лабораторных работ, сдачи зачетов и экзаменов.

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы, ознакомьтесь с содержанием всех разделов данного учебного пособия.

1. УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ

Для более эффективного изучения курса рекомендуем при выполнении контрольной работы использовать две отдельные тетради: в одной выполняется по всем правилам контрольная работа, а в другой конспектируются указанные разделы из учебников и учебных пособий и даются ответы на предлагаемые контрольные вопросы. Это поможет вам при устной беседе с преподавателем во время защиты контрольной работы в межсессионный период и на экзамене.

После изучения теоретического материала приступите к решению задач своего варианта. *Обратите внимание: если используемые в задачах формулы не являются физическими законами или определениями, то необходимо сделать их вывод.*

Не забывайте о предварительных очных консультациях для городских студентов, на которых студенты решают задачи своего варианта, задавая вопросы преподавателю (на эти консультации обязательно приносить учебники и методические пособия). Напоминаем вам, что приступать к выполнению контрольных работ нужно в соответствии с учебным графиком.

2. УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Обращаем ваше внимание на выполнение ряда формальных, но обязательных правил по оформлению контрольных работ.

1. Контрольная работа выполняется чернилами в обычной школьной тетради, на обложке которой приводятся сведения по следующему образцу:

Контрольная работа № 1 по физике
студента II курса, ФЭН, НГТУ
Петрова Н.И. Шифр 30634215, группа ОТЗ-907
Адрес: 656000, г. Барнаул, ул. Советская, 10, кв. 15.

2. Для замечаний преподавателя на страницах тетради оставляют поля шириной 3 см. Каждую следующую задачу начинают с новой страницы.

3. В контрольной работе № 1 студент должен решить восемь задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра. Номера задач определяются по таблице вариантов для первой контрольной работы.

4. Должны быть выполнены все требования к решению задач, изложенные в разделе 3.

5. В конце контрольной работы следует указать, каким учебным пособием студент пользовался при изучении курса физики (название учебника, автора, год издания).

3. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Внимательно изучите требования, которые следует выполнять при решении задач.

1. Переписать условие задачи в тетрадь полностью без сокращений.
2. Сделать краткую запись условия, т.е. величины, данные в условии, выписать для наглядности столбиком и выразить их в единицах СИ.
3. Дать аккуратно выполненный чертеж, поясняющий содержание задачи (в тех случаях, когда это возможно).
4. Указать основные законы и формулы, на которых базируется решение задачи, дать словесную формулировку этих законов, разъяснить буквенные обозначения формул. Если при решении задач применяется формула, полученная для частного случая, не выражающая какой-нибудь физический закон или не являющаяся определением какой-нибудь физической величины, то ее следует вывести.
5. Сопроводить решение задачи краткими, но исчерпывающими пояснениями.
6. Получить решение задачи в общем виде, т.е. выразить искомую величину в буквенных обозначениях величин, заданных в условии задачи. Промежуточные величины не вычислять.
7. Во всех задачах проверить размерность, т.е. подставить в правую часть полученной рабочей формулы вместо символов величин обозначения единиц, произвести с ними необходимые действия и убедиться в том, что полученная при этом размерность соответствует искомой величине.

8. Подставить в рабочую формулу числовые значения, произвести вычисления, руководствуясь правилами приближенных вычислений; записать в ответ числовое значение и наименование единицы искомой величины.

9. При подстановке в рабочую формулу, а также при записи ответа числовое значение величины представить как произведение десятичной дроби с одной значащей цифрой перед запятой на соответствующую степень десяти. Например, надо вместо 3520 записать $3.520 \cdot 10^3$, а вместо 0.00129 записать $1.29 \cdot 10^{-3}$ и т.д.

10. Значащими цифрами называют все цифры, кроме нуля, а также и нуль в двух случаях: когда он стоит между значащими цифрами и когда он стоит в конце числа. Например: 0.205 – нуль между 2 и 5 – значащий; 0.300 – два нуля в конце значащие.

4. О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

Приближенные вычисления следует вести с соблюдением следующих правил.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел окончательный результат округлять так, чтобы он не имел значащих цифр в тех разрядах, которые отсутствуют хотя бы в одном из слагаемых. Например, при сложении чисел 4.462 + 2.38 + 1.17273 + 1.0262 = 9.04093 следует сумму округлить до сотых долей, т.е. принять ее равной 9.04, так как слагаемое 2.38 задано с точностью до сотых долей.

2. При умножении округлить сомножители так, чтобы каждый из них содержал столько значащих цифр, сколько их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр. Например, вместо выражения $3.723 \cdot 2.4 \cdot 5.1846$ следует вычислять выражение $3.7 \cdot 2.4 \cdot 5.2$. В окончательном результате оставлять такое же количество цифр, какое имеется в сомножителях после их округления. В промежуточных результатах сохранять на одну цифру больше. Такое же правило соблюдать и при делении приближенных чисел.

3. При возведении в степень в результате указать столько значащих цифр, сколько их имеется в основании степени. Например, $1.32^2 \approx 1.74$. При извлечении корня в результате указать столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении. Например, $\sqrt{1.17 \cdot 10^{-8}} \approx 1.08 \cdot 10^{-4}$.

4. При вычислении сложных выражений применять указанные правила в соответствии с видом производимых действий. Например, требуется вычислить

$$\frac{(3.2+17.062)\sqrt{3.7}}{5.1\cdot 2.007\cdot 10^{3}}.$$

Сомножитель 5.1 имеет наименьшее число значащих цифр– две. Поэтому результаты всех промежуточных вычислений должны округляться до трех значащих цифр:

$$\frac{(3.2+17.062)\sqrt{3.7}}{5.1\cdot 2.007\cdot 10^{3}} \approx \frac{20.3\cdot 1.92}{10.3\cdot 10^{3}} \approx \frac{39.0}{10.3\cdot 10^{3}} = 3.79\cdot 10^{-3}.$$

После округления результата до двух значащих цифр получаем $3.8\cdot 10^{-3}$.

ВОПРОСЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЭКЗАМЕН ПО РАЗДЕЛУ ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

1. Система отсчета. Инерциальные системы отсчета. Принцип относительности Галилея. Преобразования Галилея. Длина пути, вектор перемещения. Скорость и ускорение материальной точки.
2. Масса, сила, импульс тела. I, II, III законы Ньютона. Центр инерции. Система отсчета центра инерции. Движение центра инерции.
3. Законы сохранения и изменения импульса системы частиц.
4. Работа и мощность. Кинетическая энергия. Теорема о приращении кинетической энергии.
5. Консервативные (потенциальные) поля. Потенциальная энергия. Связь консервативной силы с потенциальной энергией. Неконсервативные силы.
6. Механическая энергия. Закон сохранения механической энергии.
7. Движение в потенциальном поле. Границы движения, устойчивость.
8. Абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары. Применение к их описанию законов сохранения импульса и энергии.

9. Понятие твердого тела. Вращение твердого тела относительно закрепленной оси: характеристики вращательного движения.

10. Момент силы и момент импульса. Закон сохранения момента импульса твердого тела относительно закрепленной оси. Момент инерции твердого тела.

11. Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно закрепленной оси.

12. Принцип относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца.

13. Следствия из преобразований Лоренца:

а) сокращение длины;

б) замедление времени;

в) релятивистский закон сложения скоростей.

14. Инвариантные величины в механике: скорость света в вакууме, масса, интервал.

15. Энергия, импульс в релятивистской механике. Соотношение между ними. Кинетическая энергия в релятивистском случае.

16. Применение законов сохранения в релятивистской механике (распад, столкновение).

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 1

> Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.
>
> *Д. Пойя*

1. СОДЕРЖАНИЕ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

В контрольную работу № 1 входят задачи по следующим разделам:

1. Кинематика поступательного и вращательного движения– задачи № 91–100.

2. Импульс. Изменение импульса– задачи № 101–110.

3. Закон сохранения импульса в нерелятивистской механике – задачи № 111–120.

4. Применение законов сохранения энергии и импульса для упругого и неупругого соударений тел (нерелятивистский случай) – задачи № 121–130.

5. Плоское движение твердого тела: поступательное и вращательное – задачи № 131–140.

6. Вращательное движение. Законы сохранения момента импульса и энергии – задачи № 141–150.

7. Законы динамики Ньютона. Основное уравнение динамики вращательного движения – задачи № 151–160.

8. Законы сохранения импульса и энергии в релятивистской механике (на примере задач о распаде частиц) – задачи № 161–170.

2. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

2.1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО И ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ – ЗАДАЧИ № 91–100

При изучении задач этого типа студенты должны уметь находить мгновенную и среднюю скорость; угловую скорость и угловое ускорение; нормальную и тангенциальную составляющие ускорения. Рекомендуем прочитать литературу [1, § 3–5; 3, § 1–4].

Пример 12

Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 50$ м. Уравнение движения автомобиля $\xi(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ м, $B = 10$ м/с, $C = -0.5$ м/с^2. Найти: скорость V автомобиля, его тангенциальное a_τ, нормальное a_n, и полное ускорение a в момент времени $t = 5$ с.

Р е ш е н и е

Зная уравнение движения, найдем скорость, взяв первую производную от координаты по времени: $V = \dfrac{d\xi(t)}{dt} = B + 2Ct$. Подставим в это выражение значения B, C, t, произведем вычисления: $V = 5$ м/с.

Тангенциальное ускорение найдем, взяв первую производную от скорости по времени: $a_\tau = \dfrac{dV}{dt} = 2C$. Подставив значение C, получим

$a_\tau = -1$ м/с^2. Отрицательный знак ускорения означает: движение – равнозамедленное в данной задаче.

Нормальное ускорение определяется по формуле $a_n = V^2/R$. Подставим сюда найденное значение скорости и заданное значение радиуса кривизны траектории и произведем вычисления: $a_n = 0.5$ м/с^2.

Полное ускорение является векторной суммой ускорений $\bar{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Абсолютное значение ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Подставив в это выражение найденные значения a_τ и a_n, получим $a = 1.1$ м/с^2.

Пример 13

Маховик, вращавшийся с постоянной частотой $n_0 = 10$ с$^{-1}$, при торможении начал вращаться равнозамедленно. Когда торможение прекратилось, вращение маховика стало равномерным, но уже с частотой $n = 6$ с$^{-1}$. Определить угловое ускорение ε маховика и продолжительность t торможения, если за время равнозамедленного движения маховик сделал $N = 50$ оборотов.

Р е ш е н и е

Угловое ускорение маховика связано с начальной ω_0 и конечной ω угловыми скоростями соотношением $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi$, где $\varphi = 2\pi N$– угол в радианах. Чтобы получить это соотношение, нужно вспомнить, что $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ и $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$. Проинтегрировав первое выражение по времени, получим $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$. Подставив полученную формулу в выражение $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, выразив $d\varphi$ и проведя интегрирование по времени, получим $\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$. Выразив время из $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$, подставив его в предыдущее выражение, выразим ε через ω и φ. Тогда $\varepsilon = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)/(2\varphi)$.

Но так как $\varphi = 2\pi N$, $\omega = 2\pi n$, $\omega_0 = 2\pi n_0$, то $\varepsilon = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varphi} = \dfrac{\pi\left(n^2 - n_0^2\right)}{N}$.

Подставив значения π, n, n_0, N и вычислив, получим $\varepsilon = -4.02$ рад/с^2. Знак «минус» указывает на то, что маховик вращался замедленно.

Определим продолжительность торможения, используя формулу, связывающую угловую скорость вращения с временем t: угловая скорость линейно зависит от времени, и поэтому можно написать $\omega(t) = \omega_0 + \varepsilon t$, тогда $t = (\omega - \omega_0)/\varepsilon$, где $\omega = 2\pi n$, откуда $t = \dfrac{2N}{n_0 + n}$.

Подставив числовые значения и произведя вычисления, найдем $t = 6.25$ с.

2.2. ИМПУЛЬС. ИЗМЕНЕНИЕ ИМПУЛЬСА – ЗАДАЧИ № 101–110

При решении задач этого типа вы должны научиться находить вектор изменения импульса и определять модуль этого вектора. Обратите внимание на определения «импульс материальной точки» и «импульс твердого тела» и способ нахождения изменения импульса тела при его движении. Рекомендуем изучить литературу [1, § 2, 8, 18; 2, § 1, 2, 3].

Пример 14

Тело массой $m = 1$ кг движется с постоянной скоростью $V = 1$ м/с по окружности. Определить изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ графически и модуль $|\Delta\vec{p}|$ за время прохождения им трех четвертей окружности.

Р е ш е н и е

Скорость и импульс – векторные величины. Для нахождения вектора $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$ нужно использовать правило вычитания векторов (см. сложение и вычитание векторов в работе [1, § 2]). Учтем, что $|\vec{p}_0| = |\vec{p}_1| = p = mV$, но направления векторов $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_1$ различны (рис. 12). Векторы $\vec{p}_0$ и $\vec{p}_1$ перенесем на отдельный рисунок (рис. 13)

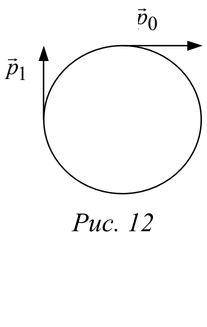


Рис. 12

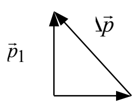


Рис. 13

и построим вектор $|\Delta\vec{p}|$. Правильность построения $|\Delta\vec{p}|$ легко проверить, сделав обратную операцию: зная векторы $|\Delta\vec{p}|$ и $\vec{p}_0$, построить вектор $\vec{p}_1$ ($\vec{p}_1 = \vec{p}_0 + \Delta\vec{p}$).

Из рис. 13 следует: $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_0^2} = \sqrt{2} \cdot mV$.

Пример 15

Тело массой m брошено под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0 (рис.14). Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти изменение импульса: 1) к моменту достижения телом наивысшей точки траектории движения (точка 1), 2) к моменту падения тела на землю (точка 2).

Р е ш е н и е

На тело в вертикальном направлении действует сила тяжести. В результате происходит изменение вертикальной составляющей импульса тела (см. раздел 2.3) $\Delta p_y = mgt$, где t – время движения тела.

В горизонтальном направлении сила не действует и горизонтальная составляющая импульса не изменяется.

В момент бросания тела горизонтальная составляющая импульса равна $p_{x0} = mV_0 \cos(\alpha) = \mathrm{const}$, а вертикальная составляющая импульса – $p_{y0} = mV_0 \sin(\alpha)$.

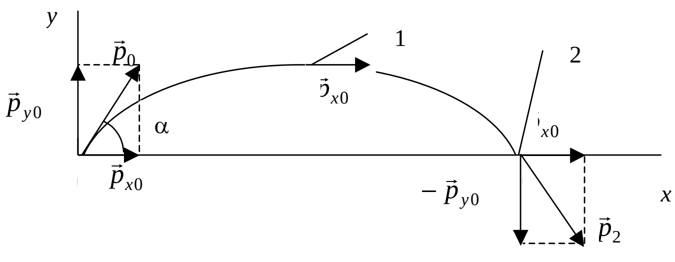


Рис. 14

В наивысшей точке траектории вертикальная составляющая импульса равна нулю (тело престает двигаться в вертикальном направлении) и изменение импульса к моменту достижения телом точки 2 равно:

$$|\Delta\vec{p}_{10}| = |\vec{p}_1 - \vec{p}_0| = |\vec{p}_{y0}| = mV_0 \sin(\alpha) = mgt_1,$$

где t_1 – время полета тела до наивысшей точки траектории.

В точке 2 импульс тела равен сумме векторов вертикальной и горизонтальной проекций импульса. Горизонтальная проекция импульса не изменяется, а вертикальная составляющая равна

$$\left|\vec{p}_{y2}\right| = -mV_0 \sin(\alpha) = -mgt_2 \text{ и } t_1 = t_2 .$$

При переходе из точки 1 в точку 2 изменение импульса тела равно

$$\left|\Delta\vec{p}_{21}\right| = \left|\vec{p}_2 - \vec{p}_1\right| = \left|\vec{p}_{y0}\right| = mV_0 \sin(\alpha) = mgt_1$$

и вектор изменения импульса направлен вертикально вниз, т. е. $\Delta\vec{p}_{21} = -\vec{p}_{y0}$.

Изменение импульса тела при переходе из начальной точки движения в конечную равно

$$\left|\Delta\vec{p}_{20}\right| = \left|\vec{p}_2 - \vec{p}_0\right| = \left|2\vec{p}_{y0}\right| = 2mV_0 \sin(\alpha) = mg\left(t_1 + t_2\right).$$

2.3. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ – ЗАДАЧИ № 111–120

При составлении уравнений на основании закона сохранения импульса следует обращать внимание на то, что скорости (а значит, и импульсы) всех рассматриваемых тел, образующих замкнутую систему, должны отсчитываться относительно одной системы отсчета.

После изучения литературы [1, § 8, 9, 18, 27; 2, § 1, 2, 3] попытайтесь ответить на следующие вопросы:

Если мы имеем систему тел, то чему равен импульс всей системы?

Найдите и сформулируйте условие, при котором сохраняется импульс системы тел.

Пример 16

На горизонтальных рельсах стоит тележка с песком (общая масса $m_1 = 5.0 \cdot 10^2$ кг). В песок попадает снаряд массой $m = 5.0$ кг. В момент попадания скорость снаряда $V = 4.0 \cdot 10^2$ м/с и направлена сверху вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти скорость тележки *U*, если снаряд застревает в песке.

Р е ш е н и е

Тележку и снаряд можно рассматривать как систему двух неупруго взаимодействующих тел. Но для этой системы импульс не сохраняется, так как действуют внешние силы: сила тяжести, сила нормальной реакции и сила трения. Если пренебречь действием силы трения на тележку во время удара, то, поскольку силы тяжести и нормальной реакции рельсов строго вертикальны, проекция внешних сил на горизонтальное направление x равна 0. Тогда в направлении оси x проекция вектора импульса системы на ось x сохраняется

$$p_{x\,\text{до}} = p_{x\,\text{после}},$$

где $p_{x\,\text{до}} = m_2 V\cos\alpha$ и $p_{x\,\text{после}} = (m_1 + m_2)U$ – проекции вектора импульса системы на ось x соответственно до и после взаимодействия тел. Тогда

$$m_2 V\cos\alpha = (m_1 + m_2)U \ .$$

Получаем

$$U = \frac{m_2 V\cos\alpha}{m_1 + m_2} = 3.4 \text{ м/с.}$$

2.4. ПРИМЕНЕНИЕ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА ДЛЯ УПРУГОГО И НЕУПРУГОГО СОУДАРЕНИИ ТЕЛ (НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ СЛУЧАЙ) – ЗАДАЧИ № 121–130

Перед решением задач:

1) сравните определения «упругий удар» и «неупругий удар»;

2) обратите внимание на различие в использовании законов сохранения энергии и импульса при упругом и неупругом ударах;

3) если известны массы m_1 и m_2 двух тел и скорости их до удара V_1 и V_2, то попытайтесь определить скорости U_1 и U_2 после удара при абсолютно упругом ударе.

Вам легко будет ответить на предлагаемые вопросы после изучения литературы [1, § 28; 2, § 1.3.5].

Пример 17

Молот массой $m_1 = 2.0\cdot 10^2$ кг падает на поковку массой m_2, которая вместе с наковальней равна $2.5\cdot 10^3$ кг. Считая удар центральным и неупругим, определить коэффициент полезного действия (КПД) η удара молота о поковку. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию поковки.

Р е ш е н и е

КПД удара молота о поковку равен отношению энергии $W_{\text{деф}}$, затраченной на деформацию поковки, ко всей затраченной энергии

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2}, \qquad \eta = \frac{W_{\text{деф}}}{T}.$$

Для определения $W_{\text{деф}}$ применим законы сохранения импульса и энергии для системы молот – поковка (с наковальней):

$$m_1 \vec{V}_1 = (m_1 + m_2)\vec{U},$$

где $\vec{V}_1$ – скорость молота в момент удара; $\vec{U}$ – скорость молота и поковки (вместе с наковальней) непосредственно после удара

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2} U^2 + W_{\text{деф}}.$$

Разделив на $T = \dfrac{m_1 V_1^2}{2}$ уравнение для энергии, получим

$$1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 V_1^2} U^2 + \frac{W_{\text{деф}}}{T}.$$

Отсюда можно найти $W_{\text{деф}}$, если известна U. Находим U из закона сохранения импульса $U = \dfrac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}$ и определяем КПД удара:

$$\eta = \frac{W_{\text{деф}}}{T} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0.93.$$

2.5. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА – ЗАДАЧИ № 131–140

Рекомендуем внимательно прочитать литературу [1, § 5, 36–39, 41, 42; 2, §1.1.5 и гл. 1.4] и раздел 6 данного пособия. После изучения основных характеристик вращательного движения предлагаем вам ответить на такие вопросы.

1. Как определить направление угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$?

2. Совпадают ли по направлению угловая скорость и угловое ускорение?

3. От чего зависит момент инерции тела J и как его можно изменить?

4. Как определить направление момента силы $\vec{M}$ относительно центра вращения, если заданы приложенная сила $\vec{F}$ и радиус-вектор $\vec{r}$ от центра вращения до точки приложения силы?

5. Как связаны между собой моменты силы $\vec{M}$, момент инерции J и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$?

Обращаем ваше внимание, что момент силы $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ и связь между линейной и угловой скоростью $\vec{V} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$ выражаются через векторные произведения. Поэтому вам необходимо изучить раздел «Векторное произведение» [1, § 2]. Направление вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ определяется по правилу правого винта [1, § 5].

Пример 18

Диск массой m катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью V_c. Найти кинетическую энергию диска.

Р е ш е н и е

Кинетическая энергия при плоском движении диска слагается из энергии поступательного движения ($T_{\text{пост}}$) со скоростью, равной скорости центра инерции V_c, и энергия вращения ($T_{\text{вр}}$) вокруг оси, проходящей через центр инерции диска:

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2},$$

где V_c – скорость центра инерции; $\vec{\omega}$ – угловая скорость; J – момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр инерции диска $J_c = \dfrac{mR^2}{2}$; m – масса диска.

Примечание. Понятие о центре инерции тела и его кинетической энергии при плоском движении можно найти в учебном пособии [1, §27, 37, 42] и в справочнике [2, §1.2.3, 1.4.3]. При отсутствии скольжения $V_c = \omega R$. Тогда

$$T = T_{\text{пост}} + T_{\text{вр}} = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mR^2V_c^2}{2R^2 2} = \frac{3mV_c^2}{4}.$$

2.6. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УГЛОВОГО ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ – ЗАДАЧИ № 141–150

Обратите внимание, что при использовании закона сохранения момента импульса следует рассматривать моменты импульсов всех тел системы относительно одной оси (или параллельных и неподвижных друг относительно друга осей). Предлагаем вам ответить на следующие вопросы.

1. Чему равен и как направлен момент импульса: 1) материальной точки? 2) твердого тела?
2. При выполнении какого условия можно применить закон сохранения момента импульса системы?

Для того чтобы ответить на эти вопросы, изучите литературу [1, §29; 2, §1.4.4]

Пример 19

Человек массой $m_0 = 60.0$ кг находится на неподвижной платформе массой $m = 100.0$ кг. С какой частотой n будет вращаться платформа, если человек будет двигаться по окружности радиусом $r = 5.0$ м вокруг оси вращения? Скорость движения человека относительно платформы $V_{\text{ч.пл}} = 1.0$ м/с. Радиус платформы $R = 10.0$ м. Считать платформу однородным диском, а человека– точечной массой.

$$J_{\text{ч.пл}} = \frac{mR^2}{2}, \quad J_{\text{ч.пл}} = m_0 r^2 .$$

Р е ш е н и е

Сначала поясним некоторые обозначения: $V_{\text{ч.пл}}$ – линейная скорость человека относительно платформы; $\vec{\omega}_{\text{ч.пл}}$ – угловая скорость человека относительно платформы. Если нет проскальзывания, то $\omega_{\text{ч.пл}} = \dfrac{V_{\text{ч.пл}}}{r}$. Применим закон сохранения момента импульса для системы человек – платформа относительно Земли. Так как результирующий момент сил тяжести и реакции опоры равен нулю

$$J_{\text{пл}}\vec{\omega}_{\text{пл}} + J_{\text{ч}}\vec{\omega}_{\text{чЗ}} = 0,$$

$\vec{\omega}_{\text{чЗ}} = \vec{\omega}_{\text{ч.пл}} + \vec{\omega}_{\text{пл}}$ – угловая скорость человека относительно Земли.

Выбираем положительное направление оси, которое связываем с направлением угловой скорости человека относительно Земли. Проектируем моменты импульсов человека и платформы на выбранную ось. Закон сохранения момента импульса для системы человек – платформа запишется в скалярном виде относительно Земли следующим образом:

$$J_{\text{ч}}\omega_{\text{чЗ}} - J_{\text{пл}}\omega_{\text{пл}} = 0.$$

Подставляем значения $J_{\text{ч}}$, $J_{\text{пл}}$ и $\omega_{\text{чЗ}} = \dfrac{V_{\text{ч.пл}}}{r} - \omega_{\text{пл}}$ и получаем

$$m_0 r^2\left(\frac{V_{\text{ч.пл}}}{r} - \omega_{\text{пл}}\right) = \frac{mR^2}{2}\omega_{\text{пл}},$$

$$n_{\text{пл}} = \frac{\omega_{\text{пл}}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{m_0 r V_{\text{ч.пл}}}{\dfrac{mR^2}{2} + m_0 r^2} = 0.4 \text{ об/мин.}$$

2.7. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИЕЙ, ИМПУЛЬСОМ, МАССОЙ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ – ЗАДАЧИ № 161–170

При изучении этой темы студенты должны ответить на вопросы 12–16I. Для этого следует проработать литературу [1, гл.8; 7, гл.4] и раздел 7 данного пособия.

Связь между полной энергией E, импульсом $\vec{p}$ и массой m тела дается соотношением

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4.$$

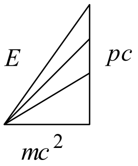


Рис. 15

Выражение $E^2 - p^2c^2$ при любых скоростях тела остается неизменным, равным m^2c^4, т.е. оно есть инвариант движения. Таким образом, масса покоя m является инвариантной (неизменной) комбинацией E и p (рис. 15).

Пример 20

Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти μ-мезон, чтобы его скорость составляла 95 % скорости света?

$$\beta = \frac{V}{c} = 0.95, \quad m_\mu = 207m_e, \quad m_ec^2 = 0.51 \text{ МэВ},$$

$$1\,\text{МэВ} = 1.6\cdot10^{-13} \text{ Дж}, q_\mu = e = 1.6\cdot10^{-19}\,\text{Кл}, \quad m_e = 9.1\cdot10^{-31} \text{ кг}.$$

Р е ш е н и е

В данном примере и в задачах № 151–160 рассматриваются мезоны. Мезоны – это нестабильные элементарные частицы с элементарным электрическим зарядом или нейтральные со значениями масс, промежуточных между массами электрона и нуклонов (протонов и нейтронов). В данной задаче мезон движется со скоростью, близкой к скорости света, и поэтому является релятивистским. Пройдя ускоряющую разность потенциалов U, мезон приобретает кинетическую энергию T. Согласно закону сохранения энергии записываем:

$$eU = T.$$

Кинетическая энергия мезона – разность между его полной энергией и энергией покоя и поэтому равна

$$T = m_\mu c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$$

Тогда

$$U = \frac{m_\mu c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = \frac{2.2 m_\mu c^2}{e} \approx 233 \cdot 10^6 \text{ В.}$$

2.8. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА И ЭНЕРГИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ (НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ О РАСПАДЕ ЧАСТИЦ) – ЗАДАЧИ № 161–170

Одним из примеров экспериментального подтверждения выводов релятивистской механики являются процессы распада (и столкновения) элементарных частиц. Утверждается, что основной принцип, регулирующий процессы в микромире, таков: все, что не запрещено законами сохранения, разрешено. Из всего множества запретов, принятых в микромире, нас особенно будут интересовать законы сохранения энергии и импульса. Они формулируются применительно к распаду так: после процесса распада суммарная полная энергия возникших частиц равна полной энергии распавшейся частицы. То же и с импульсом. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 21

Частица с массой m_0 распадается на две частицы массы m_1 и m_2. Определить энергии и импульсы образовавшихся частиц: E_1, E_2, p_1, p_2.

Р е ш е н и е

Используем систему отсчета, в которой суммарный импульс частиц до и после их взаимодействия равен нулю. Это система центра инерции (СЦИ). Запишем законы сохранения энергии и импульса:

$$E_0 = E_1 + E_2, \qquad \vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 .$$

Значит, $|\vec{p}_2| = |\vec{p}_1| = p$.

Полные энергии частиц связаны с импульсами и энергиями покоя

$$E_1 = \sqrt{p^2c^2 + m_1^2c^4}, \qquad E_2 = \sqrt{p^2c^2 + m_2^2c^4} .$$

$$E_0 = m_0 c^2 .$$

Представим соотношения между энергиями, импульсами и массами частиц в виде треугольников (рис. 16).

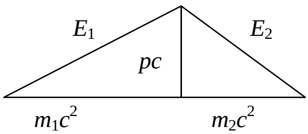


Рис. 16

Подставляя выражения для энергий всех частиц в первое уравнение, получим

$$m_0c^2 - \left(p^2c^2 + m_1^2c^4\right)^{1/2} = \left(p^2c^2 + m_2^2c^4\right)^{1/2}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения, сократив подобные члены и сделав перенос выражений, не зависящих от *p,* в правую часть, получим

$$-2m_0c^2\sqrt{\left(p^2c^2 + m_1^2c^4\right)} = \left(m_2^2 - m_0^2 - m_1^2\right)c^4.$$

Сократив на $\left(-2m_0c^2\right)$, опять возводя в квадрат обе части уравнения и сократив подобные члены, получим выражение для модулей импульсов

$$p_1 = p_2 = p = c\sqrt{\left(\frac{\left(m_0^2 + m_1^2 - m_2^2\right)}{2m_0}\right)^2 - m_1^2}.$$

Подставляя выражения для импульсов частиц в выражение для энергии, получим энергии образовавшихся частиц E_1 и E_2.

Пример 22

Покоившаяся частица распалась на новую частицу массой m_1 и на фотон с импульсом p_γ. Определить массу распавшейся частицы m_0.

Р е ш е н и е

Используем систему центра инерции (СЦИ). Обращаем ваше внимание на существование частиц (фотон, нейтрино), для которых энергия покоя равна нулю. Если в формуле (7.9) положим $m^2c^4 = 0$, то $E = pc$. Применяем законы сохранения энергии и импульса:

$$E_0 = E_1 + E\gamma,$$

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 + \vec{p}_\gamma.$$

$\vec{p}_0 = 0$. Следовательно, $\left|\vec{p}_1\right| = \left|\vec{p}_\gamma\right| = p_\gamma$.

Используем геометрические представления (рис. 17). Получим

$$E_1 = \sqrt{p_\gamma^2 c^2 + m_1^2 c^4}\ , \qquad E_\gamma = p_\gamma c\ ,$$

$$E_0 = m_0 c^2\ .$$

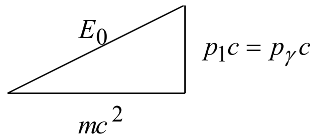


Рис. 17

Подставляя выражения для энергий всех частиц в

$$E_0 = E_1 + E\gamma,$$

получим уравнение относительно m_0:

$$m_0 c^2 = \sqrt{p_\gamma^2 c^2 + m_1^2 c^4} + p_\gamma c\ .$$

Разделив на c^2, вы получите массу распавшейся частицы

$$m_0 = \frac{\sqrt{p_\gamma^2 c^2 + m_1^2 c^4} + p_\gamma c}{c^2}\ .$$

3. ТАБЛИЦА ВАРИАНТОВ ДЛЯ ПЕРВОЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Студент-заочник должен решить восемь задач того варианта, номер которого совпадает с последней цифрой его шифра (номер студенческого билета или номер зачетной книжки).

Пример выбора варианта.

Пусть ваш шифр – 30634215. Тогда ваш вариант № 5 (задачи 96, 106, 116, …).

Таблица 3

Вариант	Номера задач							
0	91	101	111	121	131	141	151	161
1	92	102	112	122	132	142	152	162
2	93	103	113	123	133	143	153	163
3	94	104	114	124	134	144	154	164
4	95	105	115	125	135	145	155	165
5	96	106	116	126	136	146	156	166
6	97	107	117	127	137	147	157	167
7	98	108	118	128	138	148	158	168
8	99	109	119	129	139	149	159	169
9	100	110	120	130	140	150	160	170

Кроме того, предлагаем вам решить нестандартные задачи (раздел 5). Решение этих задач будет учитываться при сдаче экзамена и, несомненно, повысит вашу эрудицию.

4. ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ № 1

Вы тигр, вы лев, вы кошка. Если бы к небу и к земле были приделаны кольца, вы бы схватили эти кольца и притянули бы небо к земле.

И.А. Бабель

Для удобства нумерация задач в контрольных работах начинается с номера 91.

91. Движение точки по прямой задано уравнением $x = At + Bt^2$, где $A=2$ м/с, $B=-0.5$ м/с^2. Определить среднюю скорость $\langle V \rangle$ движения точки в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 3$ с.

92. Движение точки по окружности радиусом $R=4$ м задано уравнением $\xi = A + Bt + Ct^2$, где $A=10$ м; $B=-2$ м/с, $C=1$ м/с^2. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точки в момент времени $t_0 = 2$ с.

93. По дуге окружности радиусом $R=10$ м движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки $a_n = 4.9$ м/с^2. В этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол $\varphi = 60$ °. Найти скорость V и тангенциальное ускорение a_τ точки.

94. Точка движется по окружности радиусом $R=2$ м согласно уравнению $\xi = At^3$, где $A=2$ м/с^3. В какой момент времени t_0 нормальное ускорение a_n точки будет равно тангенциальному a_τ? Определить полное ускорение a в этот момент.

95. Диск радиусом $R=20$ см вращается так, что угол поворота диска изменяется во времени как $\varphi = A + Bt + Ct^3$, где $A=3$ рад; $B=-1$ рад/с; $C=-0.1$ рад/с^3. Определить тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска для момента времени $t_0 = 10$ с.

96. Диск радиусом $R = 10$ см, находившийся в состоянии покоя, начал вращаться с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0.5$ рад/с^2. Найти тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения точек на окружности диска в конце второй секунды после начала вращения.

97. Колесо автомашины вращается равноускоренно. Сделав $N = 50$ полных оборотов, оно изменило частоту вращения от $n_1 = 4$ об/с до $n_2 = 6$ об/с. Определить угловое ускорение ε колеса.

98. Диск вращается с угловым ускорением $\varepsilon = -2$ рад/с^2. Сколько оборотов N сделает диск при изменении частоты вращения от $n_1 = 240$ об/мин до $n_2 = 90$ об/мин? Найти время Δt, в течение которого это произойдет.

99. Определить линейную скорость V и центростремительное ускорение $a_ц$ точек, лежащих на земной поверхности: 1) на экваторе; 2) на широте Москвы ($\varphi = 56^\circ$).

100. Движения двух материальных точек описываются уравнениями $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$, $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, где $A_1 = 20$ м; $A_2 = 2$ м; $B_1 = B_2 = 2$ м/с; $C_1 = -4$ м/с^2; $C_2 = 0.5$ м/с^2. В какой момент времени t_0 скорости этих точек будут одинаковыми? Определить скорости V_1 и V_2 и ускорения a_1 и a_2 точек в этот момент.

Во всех задачах 101–110 обязательно сделать поясняющие чертежи.

101. С высоты $h_1 = 2.0$ м на стальную плиту свободно падает шарик массой $m = 0.2$ кг и подпрыгивает на высоту $h_2 = 0.5$ м. Определить изменение импульса шарика за время удара ($g = 9.8$ м/с^2).

102. Тело массой $m = 0.3$ кг, брошенное с поверхности Земли со скоростью $V = 2.0$ м/с вертикально вверх, падает на Землю. Найти изменение импульса тела за время движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

103. Пуля пущена с поверхности Земли с начальной скоростью $V_0 = 200$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Масса пули 0.1 кг. Найти изменение импульса к моменту достижения пулей наивысшей точки траектории движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

104. Снаряд массой 2.0 кг выпущен из орудия под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту с начальной скоростью 50 м/с. Найти изменение импульса к моменту падения снаряда на Землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

105. Камень массой 0.1 кг брошен с вышки высотой $h=44.1$ м в горизонтальном направлении с начальной скоростью $V_0=30.0$ м/с. Определить импульс камня в момент падения на Землю и изменение импульса за время движения. Сопротивление воздуха не учитывать ($g=9.8$ м/с^2).

106. Молекула массой $m=4.56\cdot10^{-26}$ кг, летящая по нормали к стенке сосуда со скоростью $V=600$ м/с, ударяется о стенку и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти изменение импульса молекулы за время удара о стенку.

107. Молекула массой $m=4.56\cdot10^{-26}$ кг, летящая со скоростью $V=600$ м/с, ударяется о стенку сосуда под углом α = 60° к нормали и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Найти изменение импульса молекулы за время удара.

108. Тело массой 0.10 кг, двигаясь равномерно, описывает 1/4 окружности радиусом $R=1.20$ м в течение 2.00 с. Найти изменение импульса за время движения.

109. Тело массой 0.2 кг движется с постоянной скоростью 0.5 м/с по окружности. Определить изменение импульса тела за время прохождения им половины окружности.

110. Тело массой $m=0.1$ кг брошено под углом α = 30° к горизонту с начальной скоростью $V_0=10$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти изменение импульса к моменту падения тела на Землю.

При решении задач № 111–120 необходимо сделать поясняющие чертежи и указать, относительно какой системы отсчета вы применили закон сохранения импульса.

111. При горизонтальном полете со скоростью $V=250$ м/с снаряд массой $m=8$ кг разорвался на две части. Большая часть массой $m_1=6$ кг получила скорость $U_1=400$ м/с в направлении полета снаряда. Определить абсолютное значение и направление скорости U_2 меньшей части снаряда.

112. На тележке, свободно движущейся по горизонтальному пути со скоростью $V_1=3$ м/с, находится человек. Человек прыгает в сторону, противоположную движению тележки. После прыжка скорость тележки изменилась и стала равной 4 м/с. Определить горизонтальную составляющую скорости человека при прыжке относительно тележки. Масса тележки $m_1 = 210$ кг, масса человека $m_2 = 70$ кг.

113. Орудие, жестко закрепленное на железнодорожной платформе, производит выстрел вдоль полотна железной дороги под углом α = 30° к линии горизонта. Определить скорость U_2 отката платформы, если снаряд вылетает со скоростью $U_1 = 480$ м/с. Масса платформы с орудием и снарядом $m = 18.0$ т, масса снаряда $m_1 = 60.0$ кг.

114. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек. Масса его $m_1 = 60.0$ кг, масса доски $m_2 = 20.0$ кг. С какой скоростью U (относительно пола) будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью (относительно доски) $V_1 = 1.0$ м/с? Массой колес пренебречь, трение не учитывать.

115. Снаряд, летевший со скоростью $V = 400$ м/с, разорвался на два осколка. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью $U_1 = 150$ м/с. Определить скорость U_2 большего осколка.

116. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15.0$ т. Орудие стреляет вверх под углом α = 60° к горизонту. С какой скоростью V_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда m = 20 кг и он вылетает со скоростью $V_2 = 600.0$ м/с?

117. Тело массой в 1.0 кг, движется горизонтально со скоростью 1.0 м/с, догоняет второе тело массой 0.5 кг и неупруго сталкивается с ним. Какую скорость U получат тела, если второе тело двигалось со скоростью 0.5 м/с в том же направлении, что и первое тело?

118. Человек массой $m = 60.0$ кг бежит со скоростью 2.0 м/с навстречу тележке массой $m_2 = 80.0$ кг и вскакивает на нее. Тележка движется со скоростью 0.85 м/с. С какой скоростью U будет двигаться тележка после того, как человек запрыгнет на нее?

119. Снаряд массой $m_1 = 100$ кг, летящий горизонтально вдоль железнодорожного пути со скоростью $V_1 = 500$ м/с, попадает в вагон с песком, масса которого $m_2 = 10$ т, и застревает в нем. Какую скорость U получит вагон, если он двигался со скоростью $V_2 = 10$ м/с в направлении, противоположном движению снаряда?

120. В лодке массой $m_1 = 240.0$ кг стоит человек массой $m_2 = 60.0$ кг. Лодка плывет со скоростью $V_1 = 2.0$ м/с. Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью $V_2 = 4.0$ м/с (относительно лодки) в сторону, противоположную движению лодки. Найти скорость U движения лодки после прыжка человека.

121. По небольшому куску мягкого железа, лежащему на наковальне массой $m_1 = 300$ кг, ударяется молот массой $m_2 = 8$ кг. Определить КПД η удара, если удар неупругий. Полезной считать энергию, затраченную на деформацию куска железа.

122. Шар массой $m_1 = 1.0$ кг движется со скоростью $V_1 = 4.0$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 2.0$ кг, движущимся навстречу ему со скоростью $V_2 = 3.0$ м/с. Каковы скорости шаров U_1 и U_2 после удара? Удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

123. Шар массой $m_1 = 3.6$ кг движется со скоростью $V_1 = 2.0$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 5.0$ кг. Какая работа будет совершена при деформации шаров? Удар считать абсолютно неупругим, прямым, центральным.

124. Определить КПД η неупругого удара бойка массой $m_1 = 0.5$ т, падающего на сваю массой $m_2 = 120$ кг. Полезной считать энергию, затраченную на вбивание свай.

125. Шар массой $m_1 = 4.0$ кг движется со скоростью $V_1 = 5.0$ м/с и сталкивается с шаром массой $m_2 = 6.0$ кг, который движется ему навстречу со скоростью $V_2 = 2.0$ м/с. Считая удар прямым, центральным, а шары однородными, абсолютно упругими, найти их скорости после удара.

126. Шар массой $m_1 = 5.0$ кг движется со скоростью $V_1 = 1.0$ м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 2.0$ кг. Определить скорости шаров U_1 и U_2 после удара. Шары считать однородными, абсолютно упругими, удар прямым, центральным.

127. Тело массой $m_1 = 3.0$ кг движется со скоростью $V_1 = 4$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, найти количество теплоты Q, выделившееся при ударе.

128. Тело массой $m_1 = 5.0$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_2 = 2.5$ кг, которое после удара начинает двигаться с кинетической энергией $T_2' = 5.0$ Дж. Считая удар центральным и упругим, найти кинетические энергии T_1 и T_1' первого тела до и после удара.

129. Два тела движутся навстречу друг другу и соударяются неупруго. Скорости тел до удара были: $V_1 = 2$ м/с и $V_2 = 4$ м/с. Общая скорость тел после удара $U = 1$ м/с и по направлению совпадает с направлением скорости V_1. Во сколько раз кинетическая энергия T_1 первого тела была больше кинетической энергии T_2 второго тела?

130. Тело массой $m_1 = 5.0$ кг ударяется о неподвижное тело массой $m_1 = 2.5$ кг. Кинетическая энергия системы двух тел непосредственно после удара стала $T' = 5.0$ Дж. Считая удар центральным и неупругим, найти кинетическую энергию первого тела (T) до удара.

При решении задач № 131–160 вам необходимо знать формулы для определения момента инерции некоторых тел относительно оси, проходящей через центр инерции тела:

цилиндра $J = \dfrac{mR^2}{2}$,

диска $J = \dfrac{mR^2}{2}$,

обруча, обода $J = mR^2$,

шара $J = \dfrac{2}{5}mR^2$,

стержня длиной l – $J = \dfrac{ml^2}{12}$.

Момент инерции стержня длиной *l* относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец, равен $\dfrac{ml^2}{3}$. Во всех задачах g принять равным 9.8 м/с^2.

131. Определить скорость поступательного движения сплошного цилиндра, скатившегося с наклонной плоскости высотой $h = 0.2$ м.

132. По плоской горизонтальной поверхности катится диск со скоростью $V = 8.0$ м/с. Определить коэффициент сопротивления, если диск, будучи предоставленным самому себе, остановился, пройдя путь $S = 18.0$ м.

133. Диск массой $m = 2$ кг катится без скольжения со скоростью $V = 4$ м/с. Найти кинетическую энергию диска *T*.

134. Обруч и диск одинаковой массой $m_1 = m_2$ катятся без скольжения с одной и той же скоростью *V*. Кинетическая энергия обруча $T_1 = 40$ Дж. Найти кинетическую энергию диска.

135. Шар диаметром $d = 0.06$ м и массой $m = 0.25$ кг катится без скольжения по горизонтальной плоскости с частотой вращения $n = 4.0$ об/с. Найти кинетическую энергию шара *T*.

136. Найти кинетическую энергию *T* велосипедиста, едущего со скоростью $V = 9$ км/ч. Масса велосипеда вместе с велосипедистом $m = 78$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

137. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковую массу $m = 2.0$ кг, катятся без скольжения с одинаковой скоростью $V = 5.0$ м/с. Найти кинетические энергии этих тел.

138. Определить скорость *V* центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 10.0$ м.

139. Шар катится по горизонтальной плоскости. Какую часть составляет энергия поступательного движения от общей кинетической энергии?

140. Шар и сплошной цилиндр, двигаясь с одинаковой скоростью, вкатываются вверх по наклонной плоскости. Какое из тел поднимается выше? Найти отношение высот подъема.

В задачах № 141–150 скамью Жуковского рассматривать как однородный диск.

141. На краю платформы в виде диска, вращающейся по инерции вокруг вертикальной оси с частотой $n_1 = 8$ об/мин, стоит человек массой $m_1 = 70$ кг. Когда человек перешел в центр платформы, она стала вращаться с частотой $n_2 = 10$ об/мин. Определить массу платформы. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

142. На краю неподвижной скамьи Жуковского диаметром $D = 0.8$ м и массой $m_1 = 6.0$ кг стоит человек массой $m_2 = 60.0$ кг. С какой угловой скоростью ω начнет вращаться скамья, если человек поймает летящий на него мяч массой $m = 0.5$ кг? Траектория мяча– горизонтальная прямая, проходит на расстоянии $r = 0.4$ м от оси скамьи.

Скорость мяча $V = 5.0$ м/с. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

143. Человек стоит на скамье Жуковского и держит в руках стержень, направленный вертикально вдоль оси вращения скамьи. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамья неподвижна, колесо вращается с частотой $n_1 = 15.0$ об/с. С какой угловой скоростью ω_2 будет вращаться скамья, если человек повернет стержень на угол $\alpha = 180^\circ$ и колесо окажется на нижнем конце стержня? Суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 8$ кг·м^2, радиус колеса $R = 0.25$ м. Массу колеса $m = 2.5$ кг можно считать равномерно распределенной по ободу. Считать, что центр тяжести человека с колесом находится на оси платформы.

144. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень за его конец. Стержень расположен вертикально вдоль оси вращения скамьи. Скамья с человеком вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4.0$ рад/с. С какой угловой скоростью будет вращаться скамья с человеком, если повернуть стержень так, чтобы он занял горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи $J = 5$ кг·м^2. Длина стержня $L = 1.8$ м, его масса $m = 6.0$ кг. Считать, что центр тяжести стержня с человеком находится на оси платформы.

145. Платформа в виде диска диаметром $D = 3.0$ м и массой $m_1 = 180.0$ кг может вращаться вокруг вертикальной оси. С какой угловой скоростью ω_1 будет вращаться эта платформа, если по ее краю пройдет человек массой $m_2 = 70.0$ кг со скоростью $V = 1.8$ м/с относительно платформы? Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

146. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек. На какой угол φ повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя ее, вернется в исходную (на платформе) точку? Масса платформы $m_1 = 280.0$ кг, масса человека $m_2 = 80.0$ кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

147. Шарик массой $m = 0.06$ кг, привязанный к концу нити длиной $L_1 = 1.2$ м, вращается с частотой 2об/с, опираясь на горизонтальную плоскость. Нить укорачивается, приближая шарик к оси вращения до расстояния $L_2 = 0.6$ м. С какой частотой n_2 будет при этом вращаться шарик? Какую работу A совершает внешняя сила, укорачивая нить? Трением шарика о плоскость пренебречь.

148. Горизонтальная платформа массой $m = 80$ кг и радиусом $R = 1$ м вращается с частотой $n_1 = 20$ об/мин. В центре платформы стоит человек и держит в расставленных руках гири. С какой частотой n_2 будет вращаться платформа, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 2.94$ кг·м^2 до $J_2 = 0.98$ кг·м^2? Считать платформу однородным диском.

149. Человек стоит на скамье Жуковского и держит и руках за конец легкий стержень, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Стержень служит осью вращения колеса, расположенного на верхнем конце стержня. Скамейка неподвижна, колесо вращается с частотой $n_1 = 10$ об/с. С какой частотой будет вращаться скамейка, если человек повернет стержень на угол 90°? Суммарный момент инерции человека и скамейки 6 кг·м^2, момент инерции колеса 0.12 кг·м^2.

150. Горизонтальная платформа массой $m_1 = 100$ кг вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с частотой $n_1 = 10$ об/мин. Человек массой $m_2 = 60$ кг стоит при этом на краю платформы. С какой частотой n_2 она начнет вращаться, если человек перейдет от края платформы к ее центру? Считать платформу однородным диском, а человека – материальной точкой.

151. Тонкий однородный стержень длиной $L = 50$ см и массой $m = 400$ г вращается с угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с^2 около оси, проходящей перпендикулярно стержню через его середину. Определить вращающий момент M.

152. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом $R = 5$ см. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой $m = 0.4$ кг. Опускаясь равномерно, груз прошел путь $s = 1.8$ м за время $t = 3$ с. Определить момент инерции J маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

153. Вал массой $m = 100$ кг и радиусом $R = 5$ см вращался с частотой $n = 8$ об/с. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ Н, под действием которой вал остановился через $t = 10$ с. Определить коэффициент трения f.

154. Через блок, имеющий форму диска, перекинут шнур. К концам шнура привязали грузы массой $m_1 = 100$ г и $m_2 = 110$ г. С каким ускорением a будут двигаться грузы, если масса m блока равна 400 г? Трение при вращении блока ничтожно мало.

155. Два тела массами $m_1 = 0.25$ кг и $m_2 = 0.15$ кг связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_1. Тело массой m_2 привязано к другому концу шнура и свободно свисает. С каким ускорением a движутся тела и каковы силы T_1 и T_2 натяжения нити по обе стороны от блока? Коэффициент трения о поверхность стола равен $\mu = 0.2$. Масса блока m равна 0.1 кг, и ее можно считать равномерно распределенной по ободу. Массой нити и трением в подшипниках оси блока пренебречь.

156. Через блок массой $m = 0.2$ кг перекинут шнур, к концам которого подвесили грузы массами $m_1 = 0.3$ кг и $m_2 = 0.5$ кг. Определить силы T_1 и T_2 натяжения шнура по обе стороны блока во время движения грузов, если масса блока равномерно распределена по ободу.

157. Шар массой $m = 10$ кг и радиусом $R = 20$ см вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид: $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 2$ рад; $B = 4$ рад/с^2; $C = -1$ рад/с^3. Найти закон изменения момента сил, действующих на шар. Определить момент сил M в момент времени $t = 2$ с.

158. Две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 1$ кг соединены нитью, перекинутой через блок массой $m = 1$ кг. Найти ускорение a, с которым движутся гири и силы натяжения T_1 и T_2 нитей, к которым подвешены гири. Блок считать однородным диском. Трением пренебречь.

159. На барабан массой $m_1 = 9$ кг намотан шнур, к концу которого подвесили груз массой $m = 2$ кг. Определить ускорение a груза. Считать барабан однородным диском.

160. На барабан с $R = 0.5$ м намотан шнур, к концу которого подвесили груз массой $m_1 = 10$ кг. Ускорение груза $a = 2.04$ м/с^2. Определить момент инерции барабана. Считать барабан однородным диском.

Задачи № 161–170 следует решать в системе отсчета, в которой суммарный импульс тел (или частиц) до и после их взаимодействия равен нулю (это система центра инерции – СЦИ). О таких элементарных частицах, как Σ-гипероны, мезоны, нейтроны, протоны, вы можете прочитать в учебном пособии [2].

При решении задач № 161–170 необходимы следующие величины:

1) энергия покоя электрона $m_e c^2 = 0.51$ **МэВ;**

2) масса μ-мезона равна 207 $\boldsymbol{m_e}$**; энергия покоя μ-мезона** $\boldsymbol{m_\mu c^2}$ **равна 106 МэВ, где** $\boldsymbol{m_e}$ **– масса электрона (**$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ **кг);**

3) энергия покоя протона равна 938 МэВ;

1 МэВ = $\boldsymbol{10^6}$ **эВ = 1.6** $\boldsymbol{10^{-13}}$ **Дж,**

1 ГэВ = $\boldsymbol{10^9}$ **эВ = 1.6** $\boldsymbol{10^{-10}}$ **Дж.**

161. Кинетическая энергия некоторой частицы равна ее энергии покоя. Чему равна скорость частицы?

162. Покоившаяся частица массой M распадается на две одинаковые частицы с массами m. Определить кинетические энергии этих частиц.

163. Покоившаяся частица распалась на новую частицу массой M и на фотон с энергией E_γ. Определить массу m распавшейся частицы.

164. Найти скорость μ-мезона, ускоренного разностью потенциалов в 1000 В. (Заряд μ-мезона равен заряду электрона $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл)

165. Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его скорость составляла 95 % скорости света?

166. Скорость электрона $V = 0.8\ c$ (где c – скорость света в вакууме). Определить в мегаэлектрон-вольтах кинетическую энергию электрона (1 МэВ = 10^6 эВ).

167. Определить скорость частицы, если ее кинетическая энергия в 9 раз больше энергии покоя.

168. Покоившаяся частица массой M распалась на новую частицу массой m и на фотон. Определить импульс и энергию фотона.

169. Определить импульс и кинетическую энергию электрона, движущегося со скоростью $V = 0.9\ c$, где c – скорость света в вакууме.

170. Синхрофазотрон дает пучок протонов с кинетической энергией 1 ГэВ. Какую долю β скорости света составляет скорость протонов в этом пучке (1 ГэВ = 10^9 эВ)?

5. НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

5.1. Мячик массой 0.1 кг падает вертикально со скоростью 2.0 м/с, ударяется о наклонную плоскость и упруго отскакивает от нее без потери скорости. Угол наклона к горизонту 30°. Определить изменение импульса мячика за время удара.

5.2. Телеграфный столб высотой $h=5$ м и массой $M=50$ кг подпиливают у основания. С какой скоростью упадет на землю верхний конец столба? Столб считать тонким и однородным.

5.3. С какой наименьшей высоты h должен съехать велосипедист, чтобы по инерции (без трения) проехать дорожку, имеющую форму «мертвой петли» радиусом $R=0.3$м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Масса велосипедиста с велосипедом $m=75$ кг, причем на колеса приходится масса $m_0=3$ кг.

5.4. Как определить момент инерции тела произвольной формы?

5.5. Поток свободных электронов со скоростью $V=100$ м/с падает на заземленную мишень. Найти силу давления электронов на мишень, если поток свободных электронов создает ток, равный $I=100$ мА.

5.6. ЗАДАЧА: **Спаси парашютиста, летящего без парашюта**

> Зачем прыгаешь? Хочу испытывать драйв от прыжка в бездну. Приземлившись, начинаешь особо ценить жизнь.
>
> « есть наслаждение в бою и мрачной бездны на краю и в разъяренном океане»
>
> А.С.Пушкин

Все вы прыгаете сейчас с парашютом. Прыгнули и после минуты свободного падения раскрыли основной парашют. Но, купол не раскрылся! Не беда, раскрыли запасной парашют. Но, опять купол не раскрылся!!! Что делать? Известно, во все время войны целые подразделения разбивались.

Но известен другой случай. Девушка – мастер спорта совершила ночной прыжок с высоты 10 000 метров. У нее тоже не раскрылись два парашюта. Но девушка совершила ряд действий. Её ноги при падении по колено вошли в землю, они были сломаны. Но девушка осталась жива!! А после того, как ноги зажили, она продолжала прыжки с самолета (настоящая львица!). Какие же знания по физике помогли девушке-парашютистке спастись?

Опираясь на законы Ньютона, полагая, что сила трения парашютиста F(трения)= - kV; (V- скорость падения; k= const), вывести формулу для скорости стационарного падения парашютиста V. На основании выведенной формулы для V – дайте рекомендации парашютисту, которые помогут ему спастись.

Подсказка: В воздухе девушка-парашютистка начала кричать: «Осветите землю!». (Зачем ей нужна была эта информация?)

6. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ

№ 101–105, 110. Векторы изменения импульса и силы тяжести должны иметь одно направление, так как согласно второму закону Ньютона

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}\ .$$

№ 106, 107. Изменение импульса должно быть направлено перпендикулярно стенке (по направлению действия силы реакции со стороны стенки).

№ 103–105, 110. Подсказку для решения задач вы найдете в примере 15.

№ 111–120. Подумайте, почему эти задачи нельзя решить с использованием закона сохранения энергии. Прежде чем применить закон сохранения импульса, не забудьте показать, что система тел, для которой вы используете этот закон, должна быть замкнутой (пример 16).

№ 112. Обратите внимание на выбор системы отсчета. Требуется определить горизонтальную составляющую скорости человека при прыжке относительно тележки (U_2), в то время как в условии указаны скорости тележки относительно Земли. Положительным направлением считаем направление скорости тележки U_1, тогда проекция скорости человека относительно Земли на выбранное направление равна $(-U_{2x} + U_1)$.

№ 114. Выбираем в качестве системы отсчета Землю. Проекция скорости человека относительно Земли: $V_1 - U$.

№ 116. Внимательно разберите решение примера 16.

№ 118, 119. При записи закона сохранения импульса обратите внимание, что человек и снаряд двигались навстречу, соответственно тележка и вагон.

№ 120. Если в качестве системы отсчета выбрать Землю, то проекция скорости человека относительно Земли равна $V_2 - U$.

№ 121, 124. Внимательно разберите решение примера 17.

№ 122, 125, 126. Не забудьте получить формулы для скоростей тел U_1 и U_2 после удара [1, § 28].

№ 123, 127, 129, 130. Обратите внимание, что при неупругом ударе механическая энергия не сохраняется. Часть суммарной кинетической энергии шаров до удара переходит в энергию деформации:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)}{2} U^2 + W_{\text{деф}},$$

U находим из закона сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\vec{U} .$$

№ 131–140. Эти задачи решаются с использованием закона сохранения энергии: потенциальная энергия тела, находящегося на высоте h, переходит в кинетическую энергию поступательного и вращательного движения и наоборот (задача № 140).

№ 132. Сумма кинетических энергий поступательного и вращательного движений диска расходуется на работу по преодолению сил трения, которая равна $mgkS$.

№ 141-150. Подумайте, почему эти задачи нельзя решить с использованием закона сохранения энергии. Покажите, что система тел, для которой вы используете закон сохранения момента импульса, является замкнутой.

№ 143. Вспомните, что угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси вращения. Поэтому если выбрать положительное направление оси, совпадающее с первоначальным направлением угловой скорости колеса $\vec{\omega}_1$, то проекция $J_k \omega_1$ на эту ось – положительная. Когда колесо повернуто на 180°, то проекция момента импульса колеса на выбранную ось будет отрицательной ($-J_k \omega_1$).

№ 145, 146. Внимательно разберите решение примера 19.

№ 146. Учтите, что угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

№ 149. См. указания к задаче № 143. Если колесо повернуто на 90°, то проекция момента импульса колеса на выбранную ось равна 0.

№ 161–170. Внимательно разберите решение примеров 19, 20 и вывод соотношений между массой, импульсом и энергией в релятивистской механике. Обращаем ваше внимание, что эти задачи решаются с использованием законов сохранения энергии и импульса и инвариантного соотношения между полной энергией *E*, импульсом $\vec{p}$ и массой *m*: $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$.

При решении задач, когда известны кинетическая энергия *T* и масса частицы *m*, необходимо определить, по какой формуле рассчитывается импульс $\left(\text{релятивистский случай } p = \dfrac{1}{c}\sqrt{T(T+2mc^2)};\ \text{нерелятивистский } p = \sqrt{2mT}\right)$. Необходимо помнить перевод: 1 эВ = $1.6{\cdot}10^{-19}$ Дж; 1 МэВ = $1.6{\cdot}10^{-13}$ Дж.

Следует иметь в виду, что для микрочастиц импульс принято выражать в мегаэлектрон-вольтах, деленных на скорость света (МэВ/*c*), где *c* – скорость света; перевод в СИ делается следующим образом: $[p] =$ МэВ/$c = \dfrac{1.6\cdot10^{-13}}{3\cdot10^{8}}$ Дж·с/м $= 5.3\cdot10^{-22}$ кг·м/с (килограмм-метр в секунду).

Обратите внимание на то, что μ-мезон является заряженной частицей. Следовательно, пройдя разность потенциалов 1 кВ, μ-мезон получает от электрического поля энергию, равную $eU = 1.6\cdot10^{-16}$ Дж.

7. ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ 91–170

91. $\langle V\rangle = A+B(t_2+t_1)=0$ м/с.

92. $a_\tau = R\varepsilon = 2C = 2$ м/с^2; $a_n = (B+2Ct_0)^2/R = 1$ м/с^2; $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=2.24$ м/с^2.

93. $V=\sqrt{a_n R}=7$ м/с; $a_\tau = a_n\sqrt{3}=8.5$ м/с^2.

94. $t_0=\sqrt[3]{2R/3A}=0.87$ с; $a_n(t_0)=a(t_0)=6At_0=10.5$ м/с^2;
$a(t_0)=6\sqrt{2}At_0=14.8$ м/с^2.

95. $a_\tau = 6CRt_0=-1.2$ рад/с^2; $a_n=\left(B+3Ct_0^2\right)^2 R=192$ рад/с^2;
$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}\approx 192$ рад/с^2.

96. $a_\tau = R\varepsilon = 0.05$ м/с^2; $a_n=\varepsilon^2 t_0^2 R=0.1$ м/с^2; $a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}=0.11$ м/с^2.

97. $\varepsilon = \dfrac{\pi\left(n_2^2-n_1^2\right)}{N}=1.26$ рад/с^2.

98. $N=\dfrac{\pi\left(n_2^2-n_1^2\right)}{\varepsilon}=21.6$ об; $\Delta t=\dfrac{2\pi(n_2-n_1)}{\varepsilon}=7.85$ с.

99. $V_1=\omega R=463$ м/с; $V_2=\omega R\cos\varphi=259$ м/с; $a_1=\omega^2 R=3.37$ см/с^2;
$a_2=\omega^2 R\cos\varphi=1.88$ см/с^2.

100. $t_0=(B_1-B_2)/2(C_2-C_1)=0$ с; $V_1(t_0)=V_2(t_0)=2$ м/с; $a_1(t_0)=-8$ м/с^2;
$a_2(t_0)=1$ м/с^2.

101. $\Delta p=m\sqrt{2g}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)=1.9$ кг·м/с.

102. $\Delta p=2mV_0=1.2$ кг·м/с.

103. $\Delta p=mV_0\sin\alpha=17.3$ кг·м/с.

104. $\Delta p=2mV_0\sin\alpha=100$ кг·м/с.

105. $p=m\sqrt{V_0^2+2gh}=4.2$ кг·м/с; $\Delta p=m\sqrt{2gh}=2.9$ кг·м/с.

106. $\Delta p=2mV_0=5.6\cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

107. $\Delta P=2mV\cos\alpha=2.74\cdot 10^{-23}$ кг·м/с.

108. $\Delta p=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{\pi mR}{\Delta t}=0.133$ кг·м/с.

109. $\Delta p=2mV_0=0.2$ кг·м/с.

110. $\Delta p=2mV_0\sin\alpha=1$ кг·м/с.

111. $U_2 = \dfrac{mV - m_1 U_1}{m_2} = -200$ м/с.

112. $U_{2x} = \dfrac{(m_1 + m_2)}{m_2}(U_1 - V_1) = 4$ м/с.

113. $U_2 = \dfrac{U_1 m_1 \cos\alpha}{m - m_1} = 1.4$ м/с.

114. $U = \dfrac{m_1 V_1}{m_2 + m_1} = 0.75$ м/с.

115. $U_2 = \dfrac{(V + 0.4U_1)}{0.6} = 767$ м/с.

116. $V_1 = \dfrac{mV_2 \cos\alpha}{M - m} = 0.4$ м/с.

117. $U = \dfrac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} = 0.8$ м/с.

118. $U = \dfrac{m_1 V_1 - m_2 V_2}{m_1 + m_2} = 0.4$ м/с.

119. $U = \dfrac{m_2 V_2 - m_1 V_1}{m_1 + m_2} = 5$ м/с.

120. $U = \dfrac{(m_1 + m_2)V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2} = 2.8$ м/с.

121. $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 97\ \%$.

122. $U_1 = \dfrac{\left(m_1 - m_2\right)V_1 + 2m_2 V_2}{m_1 + m_2} = -5.3$ м/с;

$U_2 = \dfrac{\left(m_1 - m_2\right)V_2 + 2m_1 V_1}{m_1 + m_2} = 1.7$ м/с.

123. $A_{\text{деф}} = \dfrac{m_1 V_1^2}{2} - \dfrac{m_1^2 V_1^2}{2\left(m_1 + m_2\right)} = 3.8$ Дж.

124. $\eta = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 0.8$.

125. $U_1=\dfrac{(m_1-m_2)V_1-2m_2V_2}{m_1+m_2}=-3.4$ м/с; $U_2=\dfrac{(m_1-m_2)V_2+2m_1V_1}{m_1+m_2}=3.6$ м/с .

126. $U_1=\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}V_1=\dfrac{3}{7}$ м/с; $U_2=\dfrac{2m_1V_1}{m_1+m_2}=\dfrac{10}{7}$ м/с.

127. $Q=\dfrac{m_1m_2V_1^2}{2(m_1+m_2)}=12$ Дж.

128. $T_1=\dfrac{(m_1+m_2)^2}{4m_1m_2}T_2'=5.6$ Дж; $T_1'=\dfrac{(m_1-m_2)^2}{4m_1m_2}T_2'=0.6$ Дж.

129. $\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{V_2+U}{V_1-U}\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^2=1.25$.

130. $T_1=\dfrac{(m_1+m_2)}{m_1}T=7.5$ Дж.

131. $V=2\sqrt{\dfrac{gh}{3}}=1.6$ м/с.

132. $k=\dfrac{3V^2}{4gS}=0.27$.

133. $T=\dfrac{3}{4}mV^2=24$ Дж.

134. $T_{\text{д}}=\dfrac{3}{4}T_{\text{об}}=30$ Дж.

135. $T=\dfrac{7}{10}\pi^2mn^2d^2=9.9\cdot10^{-2}$ Дж.

136. $T=\dfrac{m+m_0}{2}V^2=253$ Дж.

137. $T_{\text{об}}=mV^2=50$ Дж; $T_{\text{цил}}=\dfrac{3}{4}mV^2=37.5$ Дж.

138. $V=\sqrt{\dfrac{10}{7}gh}=11.8$ м/с.

139. $\dfrac{T_{\text{пост}}}{T}=0.71$.

140. $\dfrac{h_{\text{ш}}}{h_{\text{цил}}}=\dfrac{14}{15}$.

141. $m_2=\dfrac{2m_1n_1}{n_2-n_1}=560$ кг.

142. $\omega=\dfrac{4mV}{(m_1+2m_2+2m)D}=9.8\cdot10^{-2}$ рад/с.

143. $\omega_2=\dfrac{4\pi n_1 mR^2}{J}=3.7$ рад/с.

144. $\omega_2=\dfrac{J\omega_1}{J+\frac{1}{3}mL^2}=1.74$ рад/с.

145. $\omega_1=\dfrac{4m_2V}{(m_1+2m_2)D}=0.525$ рад/с.

146. $\varphi=\dfrac{4\pi m_2}{m_1+2m_2}=\dfrac{8\pi}{11}$ рад.

147. $n_2=n_1\dfrac{L_1^2}{L_2^2}=8$ об/с; $A=2(\pi n_1L_1)^2\,m\left(\dfrac{L_1^2}{L_2^2}-1\right)=20.4$ Дж.

148. $n_2=n_1\dfrac{\frac{mR^2}{2}+J_1}{\frac{mR^2}{2}+J_2}=21$ об/мин.

149. $n_2=\dfrac{J_{\text{к}}n_{\text{к}}}{J_{\text{чс}}}=0.2$ об/с.

150. $n_2=\dfrac{m_1+2m_2}{m_1}=22$ об/мин.

151. $M=\dfrac{mL^2}{4}=0.025$ Н·м.

152. $J=mR^2\left(\dfrac{gt^2}{2s}-1\right)=0.24$ кг·м^2.

153. $f=\dfrac{\pi nmR}{Ft}=0.31$.

154. $a = g\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m} = 0.24$ м/с^2.

155. $a = g\dfrac{m_2 - \mu m_1}{m_1 + m_2 + m} = 2$ м/с^2, $T_1 = m_1 g\dfrac{m_2 + \mu(m + m_2)}{m_1 + m + m_2} = 0.98$ Н,

$T_2 = m_2 g\dfrac{m_1 + m + \mu m_1}{m_1 + m + m_2} = 1.18$ Н.

156. $T_1 = m_1 g\dfrac{m + 2m_2}{m_1 + m_2 + m} = 3.5$ Н, $T_2 = m_2 g\dfrac{m + 2m_1}{m_1 + m_2 + m} = 3.9$ Н.

157. $M = \dfrac{2}{5}mR^2(2B + 6Ct) = -0.64$ Н·м.

158. $a = g\dfrac{2(m_1 - m_2)}{2m_1 + 2m_2 + m} = 2.86$ м/с^2; $T_1 = m_1(g - a) = 14.3$ Н;

$T_2 = m_2(g + a) = 12.9$ Н.

159. $a = \dfrac{2mg}{2m + m_1} = 3.1$ м/с^2.

160. $J = m_1 R^2\left(\dfrac{g}{a} - 1\right) = 10$ кг·м^2.

161. $V = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c = 2.6 \cdot 10^8$ м/с.

162. $T = \dfrac{Mc^2}{2} - mc^2$.

163. $m = \dfrac{1}{c^2}\left(E_\gamma + \sqrt{E_\gamma^2 + M^2c^4}\right)$.

164. $V = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_\mu}} = 1.26 \cdot 10^6$ м/с.

165. $U = \dfrac{m_e c^2}{e}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} - 1\right) = 1.1 \cdot 10^6$ В.

166. $T = m_e c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} - 1\right) = 0.34$ МэВ.

167. $V = 0.995c$ м/с.

168. $E_\nu = \dfrac{\left(M^2 - m^2\right)c^2}{2M}$, $p_\nu = \dfrac{\left(M^2 - m^2\right)c}{2M}$.

169. $T = m_e c^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} - 1 \right) = 0.65$ МэВ; $p = \dfrac{m_e V}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}} = 1.04$ МэВ/*c*,

где *c* – скорость света.

170. $\beta = 0.88$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. *Савельев И.В*. Курс общей физики. – М.: Наука. – Кн. 1 –5, 1998 и последующие годы издания.

2. *Трофимова Т.И*. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1997 и последующие годы издания.

3. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике. – М.: Наука, 1985 и последующие годы издания.

Дополнительная

4. *Волькенштейн В. С*. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука,1988 и последующие годы издания.

5. *Чертов А.Г., Воробьев А.А.* Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1981 и последующие годы издания.

6. *Яворский Б.М., Селезнев Ю.А.* Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования. – М.: Наука, 1984.

7. *Копылов Р. И.* Всего лишь кинематика. – М.: Наука, 1981.

8. *Яворский Б.М., Пинский А. А.* Основы физики. – М.: Наука, 1981 и последующие годы издания. – Т. 1.

9. *Астахов А.В*. Курс физики. – М.: Высш. шк.. – Т. 1, 2, 3, 1983 и последующие годы издания.

10. *Детлаф А.А., Яворский Б.М*. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1999 и последующие годы издания.

Настоятельно рекомендуем вам учебник Т.И. Трофимовой «Курс физики» [2], который предназначен для студентов высших технических учебных заведений, изучающих физику в течение трех семестров. Если вы забыли единицы физических величин и их размерность, то необходимо обратиться к пособию [6].

Коллектив авторов

ФИЗИКА

МЕХАНИКА

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *В.Ф. Ноздрева*

Подписано в печать 17.04.2009. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 500 экз.
Уч.-изд. л. 4,41. Печ. л. 4,75. Изд. № 378. Заказ № . Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630092, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

Формулы

КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, $\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ СТР 6, $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$ СТР7,

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, $\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{рез}}}{m}$ СТР 8, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ СТР 9,

ИМПУЛЬС И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА $\vec{p} = m\vec{V}$ СТР 9,

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА $A = \left(\vec{F}\Delta\vec{r}\right) = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\alpha$ СТР 12,

$T = \frac{mV^2}{2}$ СТР 14,

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ,МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ,

$U_1 = A_{10}$ СТР 15, $E = \frac{mV^2}{2} + U$ СТР 16, $\frac{mV^2}{2} + U = \text{const}$ СТР 16,

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ , МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ СТР 18, $\vec{M} = \vec{M}_{\text{внеш}} + \vec{M}_{\text{внутр}}$ СТР 19

Кинематика вращательного движения

$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ стр 21, $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ стр 22, $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ стр 23, $\omega = \frac{V'}{R} = \frac{V_0}{R}$ стр24

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ

$\left|\vec{L}_i\right| = \left|\vec{r}_i \times \vec{V}_i m_i\right| = r_i V_i m_i$ стр24, $J = \sum\limits_{i=1}^{N}\left(R_i^2 m_i\right)$, $L_z = J\omega$ стр25, $J = J_0 + ma^2$ стр27,

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ,ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ, $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{z\ \text{внеш}}$ СТР 28,

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ,

$$E = \sum_{i=1}^{N} E_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i R_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}$$ СТР 29,

Преобразования Лоренца и следствия из них,

$$t = \frac{t' + \frac{x'V}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'.$$

$$t' = \frac{t - \frac{xV}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$ СТР 31,

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$ СТР 32, $$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$ СТР 33,

Связь между энергией и импульсом, $E^2 = p^2 c^2 + \left(mc^2\right)^2$ стр 34,

$$T = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} - 1\right) = \frac{mV^2}{2}$$ стр 35,

Закон сохранения энергии и импульса в специальной теории относительности,
$\sum E_i = \mathrm{const}$ стр 35, $\sum \vec{p}_i = \mathrm{const}$ стр36.