Лекция 26. Квазистационарные электромагнитные явления. Скин-эффект.

§1. Уравнения Максвелла для квазистационарных электромагнитных явлений. Условие квазистационарности.

Среди электромагнитных явлений с переменными полями выделяют область квазистационарных электромагнитных явлений, при описании которых можно пренебречь токами смещения. Получим условие или критерий квазистационарных явлений. Будем исходить для этого из уравнений Максвелла в магнито-диэлектрических средах:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t},$$

Ток смещения $\vec{j}_{смещ}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ в случае квазистационарных явлений должен быть по величине много меньше величин двух других слагаемых уравнения $\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$, т.е.

$$|\vec{j}_{смещ}|\ll|[\vec{\nabla}\times\vec{H}]|, \qquad |\vec{j}_{смещ}|\ll|\vec{j}|$$

Пусть $\mathcal{L}$ и T — характерные расстояние и время, на которых изменяются поля, в таком случае можно записать

$$|[\vec{\nabla}\times\vec{H}]|\sim\frac{|\vec{H}|}{\mathcal{L}}=\frac{H}{\mathcal{L}}, \quad |[\vec{\nabla}\times\vec{E}]|\sim\frac{E}{\mathcal{L}}\sim\left|\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right|=\frac{B}{T}=\frac{\mu\mu_0 H}{T},$$

$$|\vec{j}_{смещ}|\sim\left|\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right|\sim\frac{D}{T}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E}{T}$$

Потребуем выполнения условий пренебрежения током смещения:

$$1^\circ \quad \frac{|\vec{j}_{смещ}|}{|[\vec{\nabla}\times\vec{H}]|}\sim\frac{\varepsilon_0\varepsilon E}{T}\cdot\frac{\mathcal{L}}{H}\sim\frac{\varepsilon_0\varepsilon\,\mu\mu_0 H\mathcal{L}^2}{T^2 H}=\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\frac{\mathcal{L}^2}{T^2}\ll 1,$$

т.к. $\varepsilon_0\mu_0=\frac{1}{c^2}$, $\sqrt{\varepsilon\mu}\overset{def}{=}n$ — показатель преломления среды, $c/n=v_{среде}=c_{ср}$ — скорость света в среде, $c_{ср}T=\lambda_{ср}$ — длина волны в среде, то выписанное выше выражение для критерия 1° принимает вид:

$$\frac{|\vec{j}_{смещ}|}{|[\vec{\nabla}\times\vec{H}]|}\sim\frac{\mathcal{L}^2}{\lambda_{ср}^2}\ll 1$$

$$2^\circ \quad \frac{|\vec{j}_{смещ}|}{|\vec{j}|}\sim\frac{\varepsilon_0\varepsilon E}{T\cdot\sigma E}\sim\frac{\varepsilon_0\varepsilon\omega}{\sigma}\ll 1 \Rightarrow \omega\ll\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}=\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon 4\pi\varepsilon_0}$$

Итак, токами смещения можно пренебречь при выполнении двух условий:

$$\mathcal{L}\ll\lambda_{в\,среде}, \qquad \omega\ll\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\cdot 4\pi\varepsilon_0},$$

т.е. при достаточно малых характерных расстояниях, на которых изменяются поля, по сравнению с длиной волны и достаточно малых частотах колебаний полей, меньших характерной частоты $(\sigma/\varepsilon\varepsilon_0)$.

Пример. Материал медь, с $\rho_{Cu}=1.6\cdot10^{-8}$ Ом·м, $\varepsilon=1$

$$\omega\ll\frac{4\pi\sigma}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot10^9\cdot4\cdot3{,}14\cdot\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-8}}\sim10^{19}\,\frac{1}{c}$$ — очень высокие частоты.

Откуда заключаем, что условие $\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$ выполняется вплоть до очень высоких частот. Неравенство $\mathcal{L} \ll \lambda_{в0}$ также означает, что если говорить о поле излучения с частотой ω и длиной волны λ, то

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

набег по фазе, связанный со временем запаздывания $\tau_{зап} \sim r/c \sim \mathcal{L}/c$, очень мал:

$$\Delta\varphi = \omega\tau_{зап} = \omega\frac{r}{c_{ср}} \sim \omega\frac{\mathcal{L}}{c_{ср}} = \frac{\mathcal{L}}{\lambda} \ll 1$$

Постоянная $\varepsilon_0/\sigma = \tau_{релакс}$ является временем релаксации среды с проводимостью σ, именно, если в среде создано отличное от нуля распределение заряда $\rho(\vec{r}, t=0)$, то оно рассасывается за времена порядка $\tau_{релакс}$, действительно:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \xrightarrow{\vec{j} = \sigma\vec{E}} \sigma\cdot\vec{\nabla}\vec{E} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\sigma\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0,$$

откуда интегрированием находим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}dt \Rightarrow \rho(t) = \rho(0)e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0}}$$

$$\Rightarrow \tau_{релакс} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} = \rho\varepsilon_0 = \frac{1{,}6\cdot 10^{-8}}{4\pi}\cdot\frac{1}{9\cdot 10^{9}} \sim \frac{1{,}6}{4\pi\cdot 9}10^{-17} \ll 1,$$

т.е. можно считать, что в среде с указанной проводимостью $\rho(t) = 0$, этот факт будет использован при выводе уравнения для поля $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}\times\vec{H}] =$$

$$= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \vec{\nabla}^2\vec{E} \cong -\mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \cancel{\vec{\nabla}\frac{\rho}{\varepsilon_0}}^{\,0} - \vec{\nabla}^2\vec{E} = -\vec{\nabla}^2\vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$ ур-е для поля $\vec{E}$.

Совершенно аналогично получается уравнение и для $\vec{H}$:

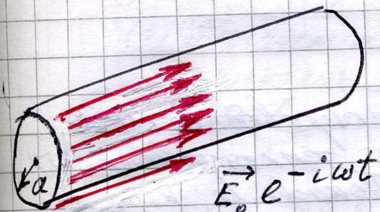
$$[\vec{\nabla}\times[\vec{\nabla}\times\vec{H}]] \cong \sigma[\vec{\nabla}\times\vec{E}] = -\sigma\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \vec{\nabla}(\underbrace{\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{H}}}_{0}) - \vec{\nabla}^2 H$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}}.$$

Полученные уравнения называются уравнениями Максвелла для скин-эффекта. При выводе этих уравнений пренебрежено токами смещения и принято во внимание, что плотность зарядов в проводящей среде равна нулю (отличная от нуля плотность зарядов очень быстро рассасывается). Среда предполагается однородной, с σ и μ — постоянными.

Работа многих устройств электротехники и радиотехники основана на ур-ях Максвелла для квазистационарных явлений, широкого класса явлений с переменными полями умеренных частот $\omega \ll \sigma/\varepsilon\varepsilon_0$ таких, что $\mathcal{L}/\lambda \ll 1$.

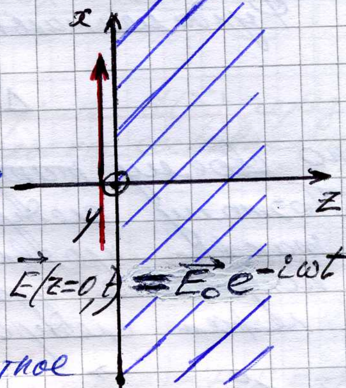
§2. Решения уравнений Максвелла для скин-эффекта



$\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

$\vec{E}(r=a,t)=\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

Типичная постановка задачи о скин-эффекте заключается в следующем. Снаружи, к поверхности проводника, например, цилиндра, как показано на рисунке слева; или к поверхности полупространства, занятого проводником, приложено переменное электромагнитное поле $\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$.



$\vec{E}(z=0,t)=\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$

Требуется определить поле $\vec{E}(r,t)$ внутри цилиндра, или поле внутри, при $z \geq 0$, проводящего полупространства $\vec{E}(z,t)$. При этом необходимо решать уравнение скин-эффекта с краевым условием:

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = \mu\mu_0\sigma \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{E}(z=0,t)=\vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \end{cases}$$

← для постановки задачи на рисунке справа.

Задачу будем решать, используя поля в комплексной форме

$$E_x(z,t)=E_x(z)e^{-i\omega t}, \quad e^{-i\omega t}=\cos\omega t - i\sin\omega t$$

Поле внутри проводящего полупространства, считаем, колеблется с той же частотой, что и внешнее поле, что типично для вынужденных колебаний. Для $E_x(z)$, после подстановки в уравнение скин-эффекта, получаем

$$\frac{d^2E_x(z)}{dz^2}+i\omega\mu\mu_0\sigma E_x(z)=0.$$

Далее выписываем характеристическое уравнение для λ, подставляя выражение $E_x(z)=E_0e^{\lambda z}$ в последнее уравнение:

$$\lambda^2+i\omega\mu\mu_0\sigma=0,$$

характеристическое уравнение для λ имеет решения:

$$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\omega\mu\mu_0\sigma}\,e^{-\frac{i\pi}{4}}=\pm\sqrt{\mu\mu_0\sigma\omega}\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \quad E_x(z,t)=a_1 e^{\lambda_1 z-i\omega t}+a_2 e^{\lambda_2 z-i\omega t}$$ — общее решение ур-я второго порядка.

Растущее по z, нефизическое поле, поэтому $a_1=0$. Убывающее по z поле — физически приемлемое решение.

$$\Rightarrow \quad E_x(z,t)=E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{i\left(\frac{z}{\delta}-\omega t\right)}, \quad \delta \stackrel{def}{=} \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}}$$

Получаем, таким образом, волну, распространяющуюся вглубь проводящего полупространства и затухающую с расстоянием с характерной глубиной проникновения δ. Произведём некоторые оценки для меди с $\rho_{Cu}=\frac{1}{\sigma}=1{,}6\cdot10^{-8}$ Ом·м и $\nu=50$ Гц, 50 кГц:

1) $\nu=50$ Гц: $\quad \delta\big|_{\mu=1}=\sqrt{\dfrac{2\cdot1{,}6\cdot10^{-8}}{2\cdot4\pi\cdot10^{-7}\,2\cdot3{,}14\cdot50}}\sim10^{-2}\text{м}=1\text{см};$

2) $\nu=50$ кГц: $\quad \delta\big|_{\mu=1}=\dfrac{10^{-2}}{\sqrt{10^3}}\sim3\cdot10^{-4}\text{м}=0{,}3\text{ мм}.$

§ 3. Тепловой скин-эффект.

Фундаментальное уравнение скин-эффекта

$$\Delta \vec{E} = \mu\mu_0\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

по своему типу является уравнением теплопроводности. Поэтому следует ожидать, что в явлениях теплопроводности также проявляет себя скин-эффект. Покажем, как получается уравнение теплопроводности. В основе вывода лежат следующие факты:

1° $\vec{q} = -\chi \vec{\nabla} T$ — поток тепла пропорционален градиенту температуры,

$\underbrace{\vec{q} = -\chi \vec{\nabla} T}_{\text{Закон Фика.}}$

2° $\underbrace{\frac{d}{dt}\int\limits_V cT\,dV}_{\text{Закон сохранения энергии (тепловой).}} = -\oint\limits_{\partial(V)} \vec{q}\cdot d\vec{S} \xrightarrow[\text{Гаусса-Остроград.}]{\text{по теореме}} -\int\limits_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{q})\,dV$

$$\Rightarrow \int\limits_V \vec{\nabla}(\chi\vec{\nabla}T)\,dV = \int\limits_V c\frac{\partial T}{\partial t}\,dV \quad (\forall V) \xrightarrow{(\chi = const)} \Delta T = \frac{c}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Сравнивая уравнения скин-эффекта и теплопроводности

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \longleftrightarrow \vec{\nabla}^2 T = \frac{c}{\chi}\frac{\partial T}{\partial t},$$

$$\delta_{эл} = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma\omega}} \longleftrightarrow \delta_{тепл} = \sqrt{\frac{2\chi}{c\omega}}$$

получаем выражение для глубины теплового скин-слоя.

Задача. Задав необходимые справочные данные, оценить глубину теплового скин-слоя.

Задаём величины:

$T = 1$ год — период колебаний температуры

$c_{H_2O} = 4{,}2\cdot 10^6 \frac{Дж}{м^3\cdot К}$ — теплоёмкость грунта Земли,

$\chi = \chi_{H_2O} = 600 \frac{Вт}{м\cdot с}$ — теплопроводность грунта Земли, т.е. воды.

$$\Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\cdot 3{,}14}{365\cdot 24\cdot 3600} \sim \frac{2\cdot 3{,}14}{0{,}365\cdot 10^4\cdot 9\cdot 10^3} \sim 1{,}91\cdot 10^{-7}\,с^{-1}$$

$$\Rightarrow \delta_{Тепл} = \sqrt{\frac{2\chi}{c\omega}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6\cdot 10^2}{4{,}2\cdot 10^6\cdot 1{,}91\cdot 10^{-7}}} \sim 40\,м$$

Моделирование земного грунта водой дало завышенный результат для $\delta_{тепл}$, больше, чем глубина расположения метро.

Для $\chi_{\substack{грунта \\ с\ 10\%\ H_2O}} = 1{,}75 \frac{Вт}{мс}$, $\delta_{Тепл} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}75}{4{,}2\cdot 10^6\cdot 1{,}91\cdot 10^{-7}}} \sim \sqrt{\frac{35}{4{,}2\cdot 1{,}91}} \sim 2{,}1\,М$

глубина погреба!

$t_{запаздыв} \sim \frac{z}{\delta\omega} \Big| _{z/\delta \sim \pi} \sim \frac{\pi}{\omega} = 0{,}5$ года!