Лекция 15. Уравнение Гамильтона-Якоби. Предельный переход от нестационарного уравнения Шредингера к уравнению Гамильтона-Якоби.

§1. Вывод уравнения Гамильтона-Якоби.

Рассмотрим механическую систему с f степенями свободы, описываемую уравнениями Гамильтона:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_k}$$

с заданным гамильтонианом $H(q,p,t)$. Попробуем отыскать такое каноническое преобразование, при котором гамильтониан $\tilde{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ вообще обращается в нуль.
Будем использовать для этого производящую функцию $F_2(q,P,t)$, которую обозначим через $S(q,P,t)$:

$$S(q,P,t) = F_2(q,P,t).$$

Потребуем, чтобы

$$\tilde{H}(Q,P,t) = H(q,p,t) + \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial t} = 0.$$

Используем для характеристики рассматриваемого канонического преобразования определяющее соотношение

$$\sum_{k=1}^{f} p_k dq_k - H(q,p,t)dt = \cancel{\sum_{k=1}^{f} P_k dQ_k} - \tilde{H}(Q,P,t)dt + dF_2 - \cancel{\sum P_k dQ_k} - \sum_k Q_k dP_k,$$

из которого извлекаем

$$p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_k}, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_k}$$

кроме того, т.к. $\tilde{H} = 0$, то

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_k} = 0, \quad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_k} = 0$$

$$\Rightarrow Q_k(t) = Q_{k0}, \quad P_k(t) = P_{k0}$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial q_k} = \frac{\partial S(q,P_0,t)}{\partial q_k} \\ Q_k &= \frac{\partial S(q,P,t)}{\partial P_k} = Q_{k0} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rightarrow p_k = p_k(Q_{k0},P_{k0},t), \\ &\rightarrow q_k = q_k(Q_{k0},P_{k0},t). \end{aligned}$$

Проясним вопрос с производящей функцией:

$$dS = dF_2 = \sum_k \frac{\partial F_2}{\partial q_k} dq_k + \sum \cancelto{0}{\frac{\partial F_2}{\partial P_k} dP_k} + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_k p_k dq_k - H dt = \left(\sum_k p_k \dot{q}_k - H\right) dt = L(q, \dot{q}, t) dt \quad (18)$$

то есть

$$\Rightarrow S(q,t) = \int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q}, t) dt + S_0$$ — Производящая функция рассматриваемого канонического преобр.-я является действием!

Из условия равенства нулю $\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t)$ получаем классическое уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\tilde{\mathcal{H}}(Q, P, t) = \mathcal{H}(q, p, t) + \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial t} = 0$$

в этом уравнении в качестве p_k-импульсов следует использовать выражения

$$p_k = \frac{\partial S(q, P, t)}{\partial q_k},$$

поэтому, окончательно, ур-е Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\mathcal{H}\left(q_1, \ldots, q_f; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_f}, t\right) + \frac{\partial S(q_1, \ldots, q_f; t)}{\partial t} = 0 -$$

– одно уравнение для функции действия $S(q,t)$ системы, но уравнение в частных производных!

Итак, в курсе аналитической механики мы познакомились с тремя способами описания движений механических (динамических) систем, или, как говорят, с тремя формами классической механики:

Уравнения Лагранжа	Уравнения Гамильтона	Уравнение Гамильтона-Якоби
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$	$\dot{q}_k = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_k}, \dot{p}_k = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_k}$	$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S(q,t)}{\partial t} = 0$

$k = 1, 2, \ldots, f$ – число степ. свободы.

$$S(q,t) = \int_{t_0} L(q, \dot{q}, t) dt$$ – действие системы.

§2. Предельный переход ($\hbar \to 0$) от нестационарного уравнения Шредингера к классическому уравнению Гамильтона-Якоби.

Рассмотрим нерелятивистскую квантовую систему с f степенями свободы. Ур-е Шредингера (нестационарное) для такой системы имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial t} = H\left(q_1, \ldots, q_f; -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_f}, t\right) \Psi(q,t)$$

– уравнение в частных производных для волновой функции $\Psi(q,t)$ в конфигурационном пространстве $(q_1, \ldots, q_f)$.

Выполним замену для волновой функции $\Psi(q,t)$:

$$\Psi(q,t) = A(q,t) e^{\frac{iS(q,t)}{\hbar}}$$

Для различных производных от $\Psi(q,t)$ получим следующие выражения:

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial q_k}\psi(q,t)\Big|_{\hbar\to 0} = \left(-i\hbar\frac{\partial A(q,t)}{\partial q_k}e^{\frac{iS}{\hbar}} + \frac{\partial S}{\partial q_k}\psi\right)\Big|_{\hbar\to 0} \to \frac{\partial S}{\partial q_k}\psi.$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t)\Big|_{\hbar\to 0} = \left(i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}e^{\frac{iS}{\hbar}} - \frac{\partial S}{\partial t}\psi\right)\Big|_{\hbar\to 0} = -\frac{\partial S}{\partial t}\psi.$$

В результате предельного перехода, $\hbar\to 0$, получаем ур-е:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{\hbar\to 0} = -\frac{\partial S}{\partial t}\psi = H\left(q_1,\dots,q_f;\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_f};t\right)\psi$$

то есть классическое ур-е Гамильтона-Якоби

$$H\left(q_1,\dots,q_f;\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_f};t\right) + \frac{\partial S(q_1,\dots,q_f;t)}{\partial t} = 0.$$