Лекция 14. Канонические преобразования

§ 1. Идея вывода канонических преобразований. Определяющее соотношение для вывода канонических преобразований.

Хорошо известно, что уравнения Лагранжа не изменяются по форме невырожденных (обратимых) преобразованиях координат и времени:

$$t \to \tau = \tau(q, t); \qquad q_k \to Q_k = Q_k(q, t) \quad \Longleftrightarrow \quad t = t(Q, \tau); \qquad q_k = q_k(Q, \tau).$$

В самом деле,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot q, t)\, dt = \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[L\left(q(Q,\tau), \dot q(Q,\tau), t(Q,\tau)\right) \frac{dt}{d\tau} \right] d\tau \stackrel{def}{=}$$

$$\stackrel{def}{=} \delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \tilde L(Q, \mathring{Q}, \tau)\, d\tau \Longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \mathring{Q}_k} - \frac{\partial \tilde L}{\partial Q_k} = 0,$$ т.е. имеют место

как исходные, так и новые уравнения Лагранжа, имеющие одну и ту же форму

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \Longleftrightarrow \frac{d}{d\tau}\frac{\partial \tilde L}{\partial \mathring{Q}_k} - \frac{\partial \tilde L}{\partial Q_k} = 0,$$

говорят, в соответствии с указанным наблюдением, что уравнения Лагранжа общековариантны, т.е. не изменяют своей формы.

Аналогичный вопрос можно поставить и по поводу уравнений Гамильтона. Приведём соответствующее определение.

Определение. Преобразования обобщенных координат и импульсов, при которых канонические уравнения Гамильтона не изменяются, называются каноническими.

$$\dot p_k = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_k}, \qquad q_k \to Q_k = Q_k(q,p,t) \qquad \dot{P}_k = -\frac{\partial \tilde H(Q,P,t)}{\partial Q_k},$$

$$\dot q_k = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_k} \qquad p_k \to P_k = P_k(q,p,t) \qquad \dot Q_k = \frac{\partial \tilde H(Q,P,t)}{\partial P_k}.$$

Для чего нужны канонические преобразования? Часто их применение позволяет упростить интегрирование уравнений движения.

Пример. $$\dot p_k = -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_k}, \quad q_k \text{ — циклич.}, \ \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \Rightarrow \dot p_k = 0,$$

$$\dot q_k = \frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_k} \qquad \Longrightarrow p_k = \alpha_k = \mathrm{const}. \quad k = 1, \dots, f.$$

Если окажется, что все обобщенные координаты являются циклическими, то

$$\forall k, \quad p_k = \alpha_k = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, f;$$

$$\Longrightarrow \dot q_k = \frac{\partial H(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_k} = \omega_k(\alpha) \Longrightarrow q_k(t) = \omega_k(\alpha) t + q_{k0}$$

Уравнения движения, как видно из приведенного примера, при этом немедленно интегрируются. Канонические преобразования как раз и используют для упрощения уравнений движения и, соответственно, для упрощения процедуры их интегрирования.

Идея вывода канонических преобразований проста и заключается в следующем. Исходят из принципа наименьшего действия в виде, удобном для получения уравнений Гамильтона а именно:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot q,t)\,dt = \delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_{k=1}^{f} p_k\dot q_k - \mathcal{H}(q,p,t)\Big)dt =$$

$$= \delta\int_{t_1}^{t_2} \Lambda(q,\dot q,p,t)\,dt$$

необходимо учитывать зависимость и от $\dot q_k$, при этом q_k и p_k — независимые переменные, поэтому

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Lambda(q,\dot q,p,t)\,dt = \sum_k\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q_k}\Big)\delta q_k\,dt +$$

$$+\sum_k\int_{t_1}^{t_2}\Big(\frac{\partial\Lambda}{\partial p_k}-\cancel{\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot p_k}}\Big)\delta p_k\,dt = 0,$$

($\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot p_k}=0$)

получаем уравнения:

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot q_k}=0 \Rightarrow -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}-\frac{d}{dt}p_k=0,\ \text{т.е. } \dot p_k=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k};$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial p_k}=0 \Rightarrow \dot q_k-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}=0,\ \text{т.е. } \dot q_k=\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}.$$

Итак, принцип наименьшего действия в указанной форме

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_k p_k\dot q_k-\mathcal{H}(q,p,t)\Big)dt=0 \Rightarrow \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial\mathcal{H}(q,p,t)}{\partial q_k},\quad \frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial\mathcal{H}(q,p,t)}{\partial p_k},$$

непосредственно приводит к уравнениям Гамильтона.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_k p_k\dot q_k-\mathcal{H}(q,p,t)\Big)dt=0 \xleftrightarrow{q_k\to Q_k} \delta\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_k P_k\dot Q_k-\tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)\Big)dt=0$$

$$\dot p_k=-\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k},\quad \dot q_k=\frac{\partial\mathcal{H}(q,p,t)}{\partial p_k}\quad p_k\to P_k\qquad \dot P_k=-\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_k},\quad \dot Q_k=\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_k}$$

$$\Rightarrow\quad \delta\Big(\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_k p_k\dot q_k-\mathcal{H}(q,p,t)\Big)dt-\int_{t_1}^{t_2}\Big(\sum_k P_k\dot Q_k-\tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)\Big)dt\Big)=0$$

Известно, при применении принципа наименьшего действия, что подынтегральное выражение определяется с точностью до полной производной по времени от произвольной функции, т.е. можно записать (как и в случае неоднозначности задания лагранжиана)

$$\sum_k p_k\dot q_k-\mathcal{H}(q,p,t)-\Big(\sum_k P_k\dot Q_k-\tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)\Big)=\begin{cases}\dfrac{dF_1(q,Q,t)}{dt},\\[2mm] \dfrac{dF_2(q,P,t)}{dt},\\[2mm] \dfrac{dF_3(p,Q,t)}{dt},\\[2mm] \dfrac{dF_4(p,P,t)}{dt}.\end{cases}$$

при условии, что $\delta q(t_{1,2})=\delta Q(t_{1,2})=0$,

$\delta p(t_{1,2})=\delta P(t_1,t_2)=0.$

В функциях F_k перебираются всевозможные пары переменных (q,Q), (q,P), (p,Q), (p,P).

Получаем, таким образом, определяющее соотношение для канонических преобразований, имеющее следующий вид:

Определяющее соотношение для канонич. преобразований

$$\sum_k p_k dq_k - \mathcal{H}(q,p,t)\,dt - \Big(\sum_k P_k dQ_k - \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)\,dt\Big) = \left\{ \begin{array}{l} dF_1(q,Q,t),\ dF_2(q,P,t), \\ dF_3(p,Q,t),\ dF_4(p,P,t). \end{array} \right.$$

Функции $F_1(q,Q,t)$, $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$, $F_4(p,P,t)$ называются производящими функциями канонических преобразований.

§2. Использование различных производящих функций для канонических преобразований.

Покажем, как используются различные производящие функции для получения канонических преобразований.

1°. $F_1 = F_1(q,Q,t)$

$$\sum_{k=1}^{f} p_k dq_k - \mathcal{H}(q,p,t)\,dt - \Big(\sum_{k=1}^{f} P_k dQ_k - \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)\,dt\Big) = dF_1(q,Q,t) =$$
$$= \sum_{k=1}^{f}\Big(\frac{\partial F_1}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial F_2}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt\Big)$$

Сравнивая выражения при дифференциалах dq_k, dQ_k и dt, находим:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_k = \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_k} \xrightarrow[\text{определяются } Q_k]{\text{отсюда}} Q_k = Q_k(q,p,t), \\ P_k = -\dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_k} \longrightarrow P_k = P_k(q,p,t), \\ \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t) = \mathcal{H}(q,p,t) + \dfrac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t}. \end{array} \right.$$

Пример. $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 q^2}{2}$, $\quad F_1 = \dfrac{m\omega q^2}{2}\,\mathrm{ctg}\,Q$.

$$\Rightarrow p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = m\omega q\,\mathrm{ctg}\,Q \longrightarrow \mathrm{ctg}\,Q = \frac{p}{m\omega q}$$

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\sin^2 Q} \Rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\sin Q$$

$$p = m\omega\sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\,\sin Q\cdot\mathrm{ctg}\,Q = \sqrt{2Pm\omega}\,\cos Q$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial F_1}{\partial t}}}_{=0} = \mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = P\omega\cos^2 Q + P\omega\sin^2 Q = P\omega$$

$$\Rightarrow \dot{P} = -\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q} = 0,\quad \dot{Q} = \frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial P} = \omega,\quad \Big| \begin{array}{l} Q = \omega t + Q_0 \\ P = P_0 = \mathrm{const.} \end{array}$$

$$\Rightarrow q(t) = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\,\sin(\omega t + Q_0),\quad p(t) = \sqrt{2P_0 m\omega}\,\cos(\omega t + Q_0).$$

Наметим также способы использования других производящих функций для получения канонических преобразований.

2° $F_2 = F_2(q, P, t) \leftarrow F_1 = F_2(q, P, t) - \sum_k P_k Q_k$ преобразование Лежандра от Q_k ...

$$\Rightarrow \sum_k p_k dq_k - \mathcal{H}(q,p,t)dt = \sum_k P_k dQ_k - \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)dt + dF_2 - d\Big(\sum_k ...$$

$$= \sum_k \cancel{P_k dQ_k} - \tilde{\mathcal{H}}dt - \sum_k dP_k Q_k - \sum_k \cancel{P_k dQ_k}$$

$$+ \sum_k \frac{\partial F_2}{\partial q_k} dq_k + \sum_k \frac{\partial F_2}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial F_2}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} p_k = \dfrac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q_k} \longrightarrow P_k = P_k(q,p,t), \quad \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t) = \mathcal{H}(q,p,t) + \dfrac{\partial F_2}{\partial t} \\ Q_k = \dfrac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_k} \longrightarrow Q_k = Q_k(q,p,t), \end{array} \right.$$

3° $F_3 = F_3(p, Q, t) \leftarrow F_1 = F_3(p, Q, t) + \sum_k p_k q_k$ преобр-е Лежандра от q к p.

$$\Rightarrow \sum_k \cancel{p_k dq_k} - \mathcal{H}(q,p,t)dt = \sum_k P_k dQ_k - \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t) + \sum_k dp_k q_k + \sum_k \cancel{p_k dq_k}$$

$$+ \sum_k \frac{\partial F_3}{\partial p_k} dp_k + \sum_k \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} dQ_k + \frac{\partial F_3}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} P_k = -\dfrac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial Q_k} \longrightarrow P_k = P_k(q,p,t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \dfrac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial t} \\ q_k = -\dfrac{\partial F_3(p,Q,t)}{\partial p_k} \longrightarrow Q_k = Q_k(q,p,t), \end{array} \right.$$

4° $F_4 = F_4(p, P, t) \leftarrow F_1 = F_4(p, P, t) + \sum_k p_k q_k - \sum_k P_k Q_k$ преобр-е Лежандра от q к p и Q к P.

$$\Rightarrow \sum \cancel{p_k dq_k} - \mathcal{H}(q,p,t)dt = \sum_k \cancel{P_k dQ_k} - \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t) +$$

$$+ \sum_k \cancel{p_k dq_k} + \sum_k dp_k q_k - \sum_k \cancel{P_k dQ_k} - \sum_k dP_k Q_k$$

$$+ \sum_k \frac{\partial F_4}{\partial p_k} dp_k + \sum \frac{\partial F_4}{\partial P_k} dP_k + \frac{\partial F_4}{\partial t} dt$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{array}{l} q_k = -\dfrac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial p_k} \longrightarrow P_k = P_k(q,p,t). \\ Q_k = \dfrac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial P_k} \Rightarrow Q_k = Q_k(q,p,t); \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \dfrac{\partial F_4(p,P,t)}{\partial t} \end{array} \right.$$

§3. Простые примеры канонических преобразований

Приведем некоторые примеры канонических преобразований генерируемых различными производящими функциями. Исходим из определяющего соотношения:

$$\sum_k p_k dq_k - \mathcal{H}dt = \sum_k P_k dQ_k - \tilde{\mathcal{H}}(Q,P,t)dt + \left\{ \begin{array}{l} dF_1(q,Q,t), \; dF_2(q,P,t) \\ dF_3(p,Q,t), \; dF_4(p,P,t) \end{array} \right.$$

(А) $F_1 = \sum_k q_k Q_k \rightarrow p_k = \frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_k} = Q_k,$

$$-\frac{\partial F_1}{\partial Q_k} = P_k = -q_k$$ — Данное преобразование меняет ролями импульсы и координаты!

(Б) $F_2 = -\sum_l q_l P_l, \quad F_2(q,P,t).$

$$\sum_k p_k dq_k - H dt = \cancel{\sum_k P_k dQ_k} - \tilde{H} dt + dF_2 - \cancel{\sum_k P_k dQ_k} - \sum_k dP_k \cdot Q_k$$

$$\rightarrow p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = -P_k, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = -q_k$$ — получаем преобразование инверсии!

Инверсия координат и импульсов — каноническое пр-е

(В) $F_2 = \sum_l q_l P_l, \quad p_k = \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = P_k, \quad Q_k = \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = q_k$ — тождественное преобр-е является каноническим!

(Г) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \quad F_1 = \frac{m\omega q^2}{2}\operatorname{ctg} Q$ — „для каникул" еще раз

$$\sum_k p_k dq_k - H dt = \sum_k P_k dQ_k - \tilde{H} dt + dF_1$$

$$p_k = \frac{\partial F_1}{\partial q_k}, \quad p = m\omega q \operatorname{ctg} Q \rightarrow p = \sqrt{2Pm\omega}\cos Q$$

$$P_k = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}, \quad P = \frac{m\omega q^2}{2}\frac{1}{\sin^2 Q} \rightarrow q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = \frac{2Pm\omega}{2m}\cos^2 Q + \frac{m\omega^2}{2}\cdot\frac{2P}{m\omega}\sin^2 Q = P\cdot\omega.$$

$$\rightarrow \dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q} = 0, \quad \dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P} = \omega, \quad Q(t) = \omega t + Q_0, \quad P(t) = P_0$$

$$\rightarrow q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\sin(\omega t + Q_0), \quad p(t) = \sqrt{2P_0 m\omega}\cos(\omega t + Q_0).$$

Канонические преобразования находят широкие применения в различных разделах физики, в которых используются методы гамильтоновой механики.